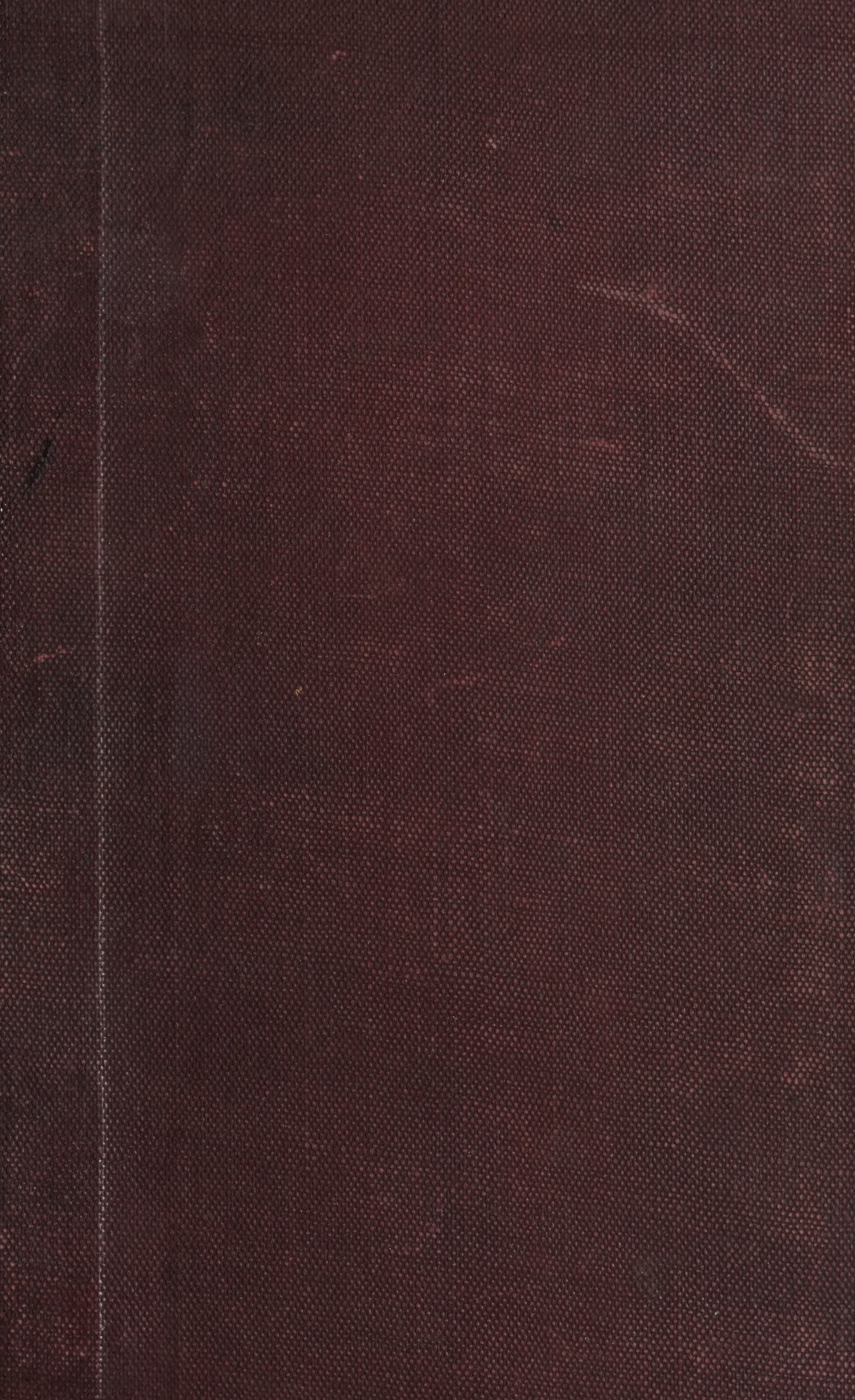
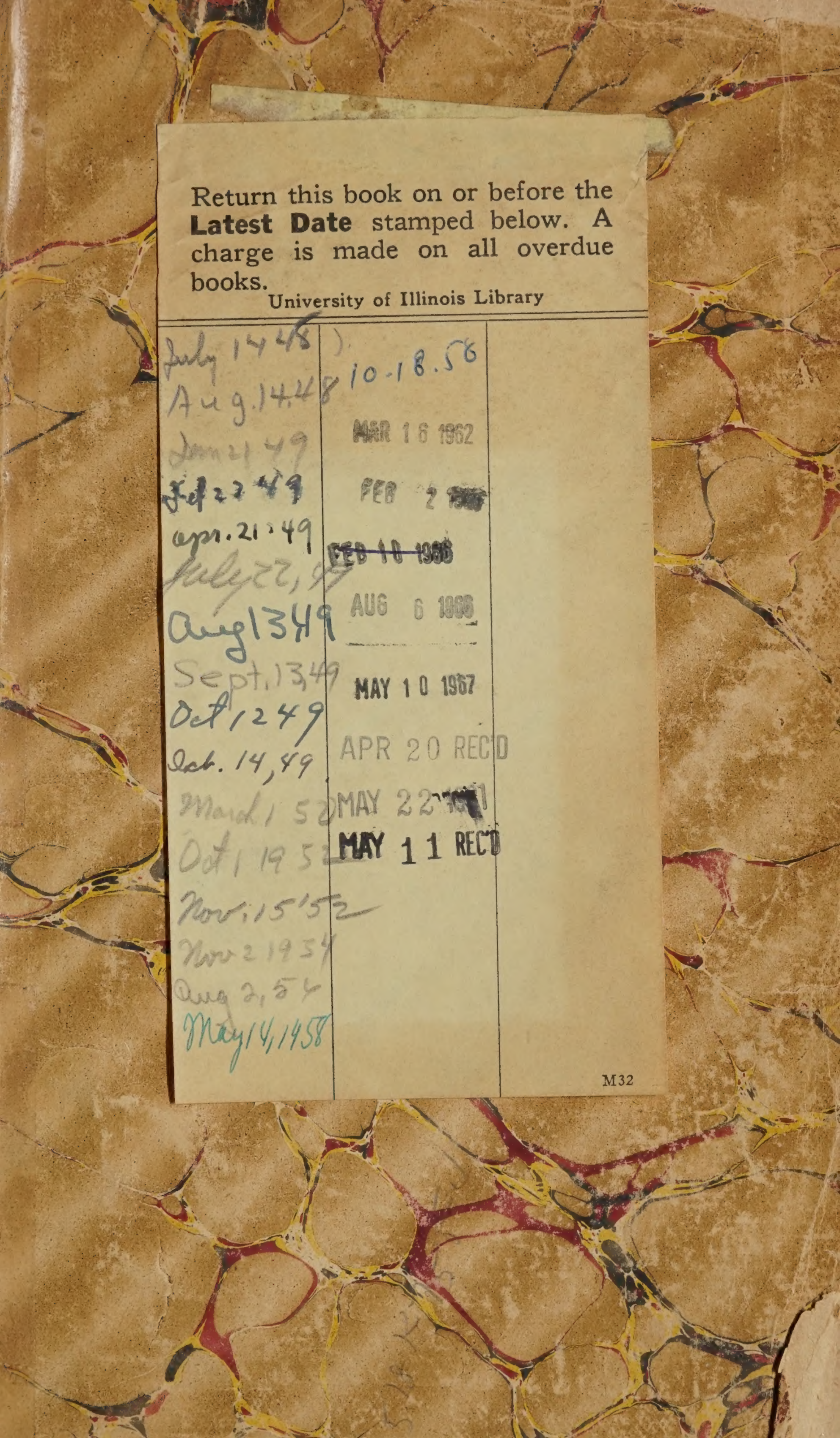





Return this book on or before the **Latest Date** stamped below. A charge is made on all overdue books.
University of Illinois Library
MAR 16 1962
AUG 6 1966
MAY 10 1967
APR 20 REC'D
MAY 11 REC'D
M32

CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET INTÉGRAL

ÉLÉMENTS
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

(ÉDITION REVUE)

PAR

William Anthony GRANVILLE
Président du collège de Pensylvanie.

EN COLLABORATION POUR L'ÉDITION

AVEC

Percey F. SMITH
Professeur à l'École scientifique Sheffield
de l'Université d'Yale.

Traduit de l'anglais par A.-A.-M. SALLIN

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1924

PRÉFACE DE L'AUTEUR

La faveur avec laquelle professeurs et étudiants ont accueilli nos *Éléments de Calcul différentiel et de Calcul intégral* a été pour nous une très grande satisfaction.

Dans ces dernières années, des progrès considérables ont été réalisés dans l'enseignement des éléments de l'Analyse et, dans cette édition revue de notre ouvrage, nous avons exposé les méthodes les meilleures et les plus récentes, parmi celles qui ont été appliquées avec succès dans nos établissements scolaires modernes.

Les traits caractéristiques de la première édition de notre ouvrage, qui contribuèrent tant à son utilité et à son succès, ont été conservés. Quelques coupures ont été faites dans l'introduction, afin d'arriver plus rapidement à la véritable matière de l'Analyse.

Comme ce livre est essentiellement destiné à l'enseignement, nous avons eu constamment présent à l'esprit le principe pédagogique qui veut que chaque proposition soit rendue évidente pour l'étudiant aussi bien par l'intuition que par l'analyse. Le but poursuivi n'est pas d'apprendre à l'étudiant à se fier à son intuition, mais, dans certains cas, à user de cette faculté en vue de la recherche analytique.

De nombreux graphiques, illustrant la théorie, ont été intercalés dans le texte.

Notre ouvrage est basé sur la méthode des limites. Il se divise en deux parties principales : le Calcul différentiel et le Calcul intégral.

Comme traits caractéristiques de cet ouvrage, nous pouvons appeler l'attention :

Sur l'effort qui a été fait pour rendre parfaitement clair chaque nouveau théorème en lui-même et en ce qui concerne son extension à d'autres questions ;

Sur le grand nombre d'exercices proposés et le soin avec lequel ils ont été gradués ;

Sur le fait d'avoir résumé sous forme de règles les méthodes de résolution des problèmes.

Dans la partie consacrée au Calcul intégral, la notion d'intégration étendue à une surface plane a été très largement développée ; on a insisté longuement sur la notion d'intégration, définie comme limite d'une somme.

L'existence de la limite e a été admise et sa valeur approximative calculée d'après son graphique.

Un grand nombre de nouveaux problèmes, avec ou sans réponses, ont été ajoutés et une collection d'exercices variés se trouve à la fin de presque tous les chapitres.

Parmi les sujets ajoutés, nous citerons : l'intégration approchée, la règle des trapèzes, la règle de la parabole, les trajectoires orthogonales, les centres des surfaces et des volumes, la pression des liquides, le travail effectué, etc....

Partout, des problèmes pratiques faciles on été ajoutés, problèmes qui illustrent la théorie en même temps qu'ils présentent de l'intérêt pour l'étudiant. Ces exercices ne supposent pas de connaissances étendues dans aucune branche particulière de la science ; ils sont basés sur des connaissances que tous ceux qui étudient l'Analyse sont supposés avoir généralement.

Nous avons essayé d'écrire un livre essentiellement moderne et pédagogique. Les moyens et les besoins de l'étudiant qui commence l'étude de l'Analyse ont été constamment présents à notre esprit.

Notre ouvrage contient plus de matière qu'il n'est nécessaire pour un cours ordinaire de cent leçons professé dans nos collèges et écoles d'ingénieurs. Les professeurs ont ainsi le moyen de choisir les sujets qui conviennent le mieux aux besoins de leurs classes.

En faisant une sélection appropriée parmi les sujets qu'il contient, notre ouvrage permet de préparer les étudiants, soit à un travail élémentaire de sciences appliquées, soit à un travail plus avancé de mathématiques pures.

William A. Granville.

Collège de Pensylvanie
Gesttysburg, Pa.

PRÉFACE DU TRADUCTEUR

Par leur heureuse conception pédagogique, les *Éléments de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de M. Granville nous paraissent appelés à rendre les plus grands services aux professeurs et aux élèves de nos établissements d'instruction.

L'exposition, basée sur une combinaison judicieuse des méthodes intuitive et analytique, est particulièrement simple, claire et intelligible. Les principes sont illustrés par des graphiques ainsi que par des exemples traités dans tous leurs détails, et, de plus, ces principes sont résumés dans des règles qui servent de méthodes pour la résolution des problèmes dont ils sont le fondement. De nombreux exercices, soigneusement gradués, servent d'application à la matière de chaque chapitre. Ces exercices sont généralement suivis des réponses aux questions qu'ils posent, ce qui permet à l'étudiant de contrôler son travail.

En raison même de sa conception pédagogique, cet ouvrage, dont la portée est sensiblement celle du programme de notre classe de Mathématiques spéciales, peut être étudié avec fruit, sans aucun secours étranger, par un bon élève de Mathématiques élémentaires, à plus forte raison si l'ouvrage est commenté par un professeur ou un répétiteur. C'est dire assez les services qu'il est appelé à rendre aux candidats à nos grandes écoles et l'intérêt qu'il peut présenter pour tous ceux qui désirent simplement étendre ou entretenir leurs connaissances mathématiques.

Les professeurs eux-mêmes y trouveront un choix d'exercices des plus variés et d'utiles renseignements, notamment au point de vue pédagogique.

A. A. M. SALLIN.

CALCUL DIFFÉRENTIEL

CHAPITRE I

RECUEIL DE FORMULES

1. Formules de référence. — Pour la commodité du lecteur, nous donnons la liste suivante de formules élémentaires d'Algèbre, de Géométrie, de Trigonométrie et de Géométrie analytique.

1. Théorème du binome (n étant un entier positif) :

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2\,!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!}a^{n-3}b^3 + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)\,!}a^{n-r+1}b^{r-1} + \cdots + b^n.$$

2. $n\,! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots (n-1)n.$

3. Dans l'équation du deuxième degré $ax^2+bx+c=0$,

Quand $b^2-4ac>0$, les racines sont réelles et inégales ;
Quand $b^2-4ac=0$, les racines sont réelles et égales ;
Quand $b^2-4ac<0$, les racines sont imaginaires.

4. Quand une équation du 2e degré est réduite à la forme $x^2+px+q=0$,

$p =$ somme des racines changée de signe,
$q =$ produit des racines.

5. Dans une progression arithmétique,

$$l = a+(n-1)d, \qquad s = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right].$$

6. Dans une progression géométrique,

$$l = ar^{n-1}, \qquad s = \frac{rl-a}{r-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

7. $\log ab = \log a + \log b.$

8. $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$

9. $\log a^n = n\log a.$

10. $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a.$

11. $\log 1 = 0.$

12. $\log_a a = 1.$

13. $\log \frac{1}{a} = -\log a.$

14. Circonférence de cercle $= 2\pi r$ (*).

15. Aire du cercle $= \pi r^2$.

(*) Dans les formules 14 à 25, r désigne le rayon, a la hauteur, B l'aire de la base, s l'apothème.

16. Volume du prisme $= Ba$.
17. Volume de la pyramide $= \frac{1}{3} Ba$.
18. Volume du cylindre circulaire droit $= \pi r^2 a$.
19. Surface latérale du cylindre circulaire droit $= 2\pi ra$.
20. Surface totale du cylindre circulaire droit $= 2\pi r(r + a)$.
21. Volume du cône circulaire droit $= \frac{1}{3}\pi r^2 a$.
22. Surface latérale du cône circulaire droit $= \pi rs$.
23. Surface totale du cône circulaire droit $= \pi r(r + s)$.
24. Volume de la sphère $= \frac{4}{3}\pi r^3$.
25. Surface de la sphère $= 4\pi r^2$.
26. $\sin x = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} x}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{cotg} x}$.
27. $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
28. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$; $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$.
29. $\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$; $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.
30. $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$.
31. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
32. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.
33. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.
34. $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.
35. $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.
36. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.
37. $\sin x = 2 \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$; $\cos x = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2}$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}$.
38. $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$; $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$.
39. $1 + \cos x = 2 \cos^2 \dfrac{x}{2}$; $1 - \cos x = 2 \sin^2 \dfrac{x}{2}$.
40. $\sin \dfrac{x}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$; $\cos \dfrac{x}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$; $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.
41. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$.
42. $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$.
43. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$.
44. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$.
45. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$; loi du sinus.
46. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; loi du cosinus.
47. $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$; distance entre les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2).
48. $d = \dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$; distance de la droite $Ax + By + C = 0$ à (x_1, y_1).
49. $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$; coordonnées du milieu de la droite joignant les points (x_1, y_1), (x_2, y_2).

50. $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$; formules de transformation par rapport à une nouvelle origine (x_0, y_0).

51. $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$, $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$; formules de transformation par rapport à de nouveaux axes faisant un angle θ avec les anciens.

52. $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$; transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires.

53. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{arc tg} \frac{y}{x}$; transformation des coordonnées polaires en coordonnées rectangulaires.

54. Différentes formes de l'équation d'une ligne droite :

(a) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; équation de la droite passant par deux points donnés (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

(b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; équation de la droite en fonction de ses coordonnées à l'origine.

(c) $y - y_1 = m(x - x_1)$; équation générale des droites qui passent par un point donné (x_1, y_1).

(d) $y = mx + b$; équation d'une droite parallèle à une droite donnée menée par l'origine.

(e) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, forme normale.

(f) $Ax + By + C = 0$, forme générale.

55. $\text{tg}\, \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$, angles de deux lignes droites dont les pentes sont m_1 et m_2.

$m_1 = m_2$ quand les lignes sont parallèles,

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ quand les lignes sont perpendiculaires.

56. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, équation d'un cercle de centre (α, β) et de rayon r.

2. Alphabet grec.

LETTRES	NOMS	LETTRES	NOMS	LETTRES	NOMS
Α α	Alpha.	Ι ι	Iota.	Ρ ρ	Rho.
Β β	Bêta.	Κ κ	Kappa.	Σ σ ς	Sigma.
Γ γ	Gamma.	Λ λ	Lambda.	Τ τ	Tau.
Δ δ	Delta.	Μ μ	Mu.	Υ υ	Upsilon.
Ε ε	Epsilon.	Ν ν	Nu.	Φ φ	Phi.
Ζ ζ	Zéta.	Ξ ξ	Ksi.	Χ χ	Khi.
Η η	Eta.	Ο ο	Omicron.	Ψ ψ	Psi.
Θ θ	Thêta.	Π π	Pi.	Ω ω	Oméga.

3. Règles concernant les signes des fonctions trigonométriques.

QUADRANT	SIN	COS	TG	COTG	SEC	COSEC
Premier.	+	+	+	+	+	+
Second.	+	—	—	—	—	+
Troisième.	—	—	+	+	—	—
Quatrième.	—	+	—	—	+	—

4. Valeurs naturelles des fonctions trigonométriques.

ANGLE EN RADIANS	ANGLE EN DEGRÉS	SIN	COS	TG	COTG	SEC	COSEC
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	∞	0	∞	1
π	180°	0	— 1	0	∞	— 1	∞
$\frac{3\pi}{2}$	270°	— 1	0	∞	0	∞	— 1
2π	360°	0	1	0	∞	1	∞

ANGLE EN RADIANS	ANGLE EN DEGRÉS	SIN	COS	TG	COTG	SEC	COSEC
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	∞	0	∞	1

ANGLE EN RADIANS	ANGLE EN DEGRÉS	SIN	COS	TG	COTG		
0,0000	0°	0,0000	1,0000	0,0000	∞	90°	1,5708
0,0175	1	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	89	1,5533
0,0349	2	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	88	1,5359
0,0524	3	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	87	1,5184
0,0698	4	0,0698	0,9976	0,0699	14,300	86	1,5010
0,0873	5	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	85	1,4835
0,1745	10	0,1736	0,9848	0,1763	5,671	80	1,3963
0,2618	15	0,2588	0,9659	0,2679	3,732	75	1,3090
0,3491	20	0,3420	0,9397	0,3640	2,747	70	1,2217
0,4363	25	0,4226	0,9063	0,4663	2,145	65	1,1345
0,5236	30	0,5000	0,8660	0,5774	1,732	60	1,0472
0,6109	35	0,5736	0,8192	0,7002	1,428	55	0,9599
0,6981	40	0,6428	0,7660	0,8391	1,192	50	0,8727
0,7854	45	0,7071	0,7071	1,0000	1,000	45	0,7854
		COS	SIN	COTG	TG	ANGLE EN DEGRÉS	ANGLE EN RADIANS

5. Logarithmes des nombres et des fonctions trigonométriques.

TABLE DES MANTISSES DES LOGARITHMES DÉCIMAUX DES NOMBRES

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0 000	0 414	0 792	1 139	1 461	1 761	2 041	2 304	2 553	2 788
2	3 010	3 222	3 424	3 617	3 802	3 979	4 150	4 314	4 472	4 624
3	4 771	4 914	5 051	5 185	5 315	5 441	5 563	5 682	5 798	5 911
4	6 021	6 128	6 232	6 335	6 435	6 532	6 628	6 721	6 812	6 902
5	6 990	7 076	7 160	7 243	7 324	7 404	7 482	7 559	7 634	7 709
6	7 782	7 853	7 924	7 993	8 062	8 129	8 195	8 261	8 325	8 388
7	8 451	8 513	8 573	8 633	8 692	8 751	8 808	8 865	8 921	8 976
8	9 031	9 085	9 138	9 191	9 243	9 294	9 345	9 395	9 445	9 494
9	9 542	9 590	9 638	9 685	9 731	9 777	9 823	9 868	9 912	9 956
10	0 000	43	86	128	170	212	253	294	334	374
11	0 414	0 453	0 492	0 531	0 569	0 607	0 645	0 682	0 719	0 755
12	0 792	0 828	0 864	0 899	0 934	0 969	1 004	1 038	1 072	1 106
13	1 139	1 173	1 206	1 239	1 271	1 303	1 335	1 367	1 399	1 430
14	1 461	1 492	1 523	1 553	1 584	1 614	1 644	1 673	1 703	1 732
15	1 761	1 790	1 818	1 847	1 875	1 903	1 931	1 959	1 987	2 014
16	2 041	2 068	2 095	2 122	2 148	2 175	2 201	2 227	2 253	2 279
17	2 304	2 330	2 355	2 380	2 405	2 430	2 455	2 480	2 504	2 529
18	2 553	2 577	2 601	2 625	2 648	2 672	2 695	2 718	2 742	2 765
19	2 788	2 810	2 833	2 856	2 878	2 900	2 923	2 945	2 967	2 989

TABLE DE LOGARITHMES DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

ANGLE EN RADIANS	ANGLE EN DEGRÉS	LOG SIN	LOG COS	LOG TG	LOG COTG		
0,0000	0°	»	»	»	»	90°	1,5708
0,0175	1	$\overline{2},2419$	$\overline{1},9999$	$\overline{2},2419$	1,7581	89	1,5533
0,0349	2	$\overline{2},5428$	$\overline{1},9997$	$\overline{2},5431$	1,4569	88	1,5359
0,0524	3	$\overline{2},7188$	$\overline{1},9994$	$\overline{2},7194$	1,2806	87	1,5184
0,0698	4	$\overline{2},8436$	$\overline{1},9989$	$\overline{2},8446$	1,1554	86	1,5010
0,0873	5	$\overline{2},9403$	$\overline{1},9983$	$\overline{2},9420$	1,0580	85	1,4835
0,1745	10	$\overline{1},2397$	$\overline{1},9934$	$\overline{1},2463$	0,7537	80	1,3963
0,2618	15	$\overline{1},4130$	$\overline{1},9849$	$\overline{1},4281$	0,5719	75	1,3090
0,3491	20	$\overline{1},5341$	$\overline{1},9730$	$\overline{1},5611$	0,4389	70	1,2217
0,4363	25	$\overline{1},6259$	$\overline{1},9573$	$\overline{1},6687$	0,3313	65	1,1345
0,5236	30	$\overline{1},6990$	$\overline{1},9375$	$\overline{1},7614$	0,2386	60	1,0472
0,6109	35	$\overline{1},7586$	$\overline{1},9134$	$\overline{1},8452$	0,1548	55	0,9599
0,6981	40	$\overline{1},8081$	$\overline{1},8843$	$\overline{1},9238$	0,0762	50	0,8727
0,7854	45	$\overline{1},8495$	$\overline{1},8495$	0,0000	0,0000	45	0,7854
		LOG COS	LOG SIN	LOG COTG	LOG TG	ANGLE EN DEGRÉS	ANGLE EN RADIANS

CHAPITRE II

VARIABLES ET FONCTIONS

6. Variables et constantes. — Une *variable* est une quantité à laquelle un nombre illimité de valeurs peuvent être attribuées. Les variables sont désignées par les dernières lettres de l'alphabet. Ainsi, dans l'équation d'une ligne droite

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

x et y peuvent être considérées comme les coordonnées variables d'un point se déplaçant le long de la ligne.

Une quantité dont la valeur reste invariable s'appelle une *constante*.

Les *constantes numériques* ou *absolues* gardent les mêmes valeurs dans tous les problèmes ; telles sont, par exemple, les constantes numériques 2, 5, $\sqrt{7}$, π, etc.

Les *constantes arbitraires* ou *paramètres* sont des constantes auxquelles un nombre quelconque de valeurs numériques peuvent être attribuées ; elles sont supposées garder ces valeurs pendant toute la durée des opérations. On les désigne généralement par les premières lettres de l'alphabet.

Ainsi, pour chaque paire de valeurs attribuées arbitrairement à a et b, l'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ représente une ligne droite particulière.

7. Intervalle d'une variable. — Très souvent, nous limitons nos investigations à une partie seulement de l'échelle des nombres. Par exemple, nous pouvons restreindre le champ de notre variable de façon qu'elle ne prenne que des valeurs comprises entre a et b, a et b pouvant être inclus, ou l'une de ces valeurs exclue ou toutes les deux à la fois. Sauf avis contraire, nous emploierons le symbole $[a, b]$, a étant inférieur à b, pour représenter les nombres a, b, et tous ceux qu'ils comprennent. Ce symbole $[a, b]$ se lit *intervalle de a à b*.

8. Variation continue. — On dit qu'une variable x varie d'une façon continue dans un intervalle $[a, b]$ quand x va en croissant de la valeur a jusqu'à la valeur b, en prenant toutes les valeurs entre a et b dans leur ordre de grandeur. Cette définition peut être illustrée géométriquement comme il suit (*fig.* 1) :

L'origine étant en O, plaçons sur la ligne les points A et B correspondant aux nombres a et b. Faisons correspondre également le point P à une valeur particulière de la variable x. L'intervalle $[a, b]$ est, évidemment, représenté par le segment AB. Dans ces conditions, quand x varie d'une façon continue de a à b inclusivement, c'est-à-dire dans l'intervalle $[a, b]$, le point P engendre le segment AB.

Fig. 1.

9. Fonctions. — *Quand deux variables sont dans un rapport tel que la valeur de la première dépende de la valeur de la seconde, on dit que la première variable est fonction de la seconde.*

Presque tous les problèmes scientifiques comportent des grandeurs et des rapports de cette sorte, et dans les faits de la vie quotidienne nous rencontrons à chaque instant des exemples illustrant la dépendance de deux grandeurs entre elles. Ainsi, le *poids* qu'un homme est capable de soulever dépend de sa *force*, quand tous les autres facteurs restent les mêmes. De même, la distance qu'un homme peut parcourir peut être considérée comme dépendant du *temps*. Nous pouvons également dire que l'*aire* d'un carré est une fonction de la *longueur* de son côté et le *volume* d'une sphère une fonction de son *diamètre*.

10. Variable indépendante et variable dépendante. — La seconde variable, à laquelle des valeurs arbitraires peuvent être attribuées dans des limites dépendant du problème à traiter, est appelée *variable indépendante* ou *argument*, et la première variable, dont la valeur est déterminée aussitôt que la valeur de la variable indépendante est fixée, est appelée *variable dépendante* ou *fonction*.

Quand nous considérons deux variables dépendant l'une de l'autre, nous pouvons généralement choisir celle que nous voulons comme *variable indépendante*, mais, ce choix étant fait, aucun changement de variable indépendante n'est permis sans certaines précautions et transformations.

Une quantité (la variable dépendante) peut être fonction de deux ou plusieurs autres quantités (les variables indépendantes ou arguments). Par exemple, le *coût* d'une étoffe est fonction de la *qualité* et de la *quantité*. La *surface* d'un triangle est fonction de sa *base* et de sa *hauteur* ; le *volume* d'un parallélépipède rectangle est fonction de ses *trois dimensions*.

11. Notation des fonctions. — Le symbole $f(x)$ est employé pour désigner une fonction de x ; on le lit *f de x*. Pour distinguer différentes fonctions, on change la lettre qui précède x ; par exemple $F(x)$, $\varphi(x)$, $f'(x)$, etc.

Au cours d'une recherche quelconque, le même symbole fonctionnel indique toujours la même loi de dépendance de la fonction par rapport à la variable. Dans les cas les plus simples, cette loi prend la forme d'une série d'opérations analytiques sur cette variable. Par suite, en pareille circonstance, le même symbole fonctionnel indiquera les mêmes opérations ou séries d'opérations, même s'il est appliqué à des quantités différentes.

Ainsi, si $$f(x)=x^2-9x+14,$$
alors $$f(y)=y^2-9y+14.$$
De même, $$f(a)=a^2-9a+14,$$
$$f(b+1)=(b+1)^2-9(b+1)+14=b^2-7b+6.$$
$$f(0)=0^2-9\cdot 0+14=14,$$
$$f(-1)=(-1)^2-9(-1)+14=24,$$
$$f(3)=3^2-9\cdot 3+14=-4,$$
$$f(7)=7^2-9\cdot 7+14=0, \text{ etc.}$$

De même, $\varphi(x, y)$ désigne une fonction de x et de y et se lit *φ de x et de y*.

Si $$\varphi(x, y)=\sin(x+y),$$
alors $$\varphi(a, b)=\sin(a+b),$$
et $$\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Enfin, si $$F(x, y, z)=2x+3y-12z,$$
alors $$F(m, -m, m)=2m-3m-12m=-13m,$$
et $$F(3, 2, 1)=2\cdot 3+3\cdot 2-12\cdot 1=0.$$

Evidemment, ce système de notation peut être étendu à l'infini.

12. Valeurs de la variable indépendante pour lesquelles une fonction est définie. — Considérons les fonctions

$$x^2 - 2x + 5, \quad \sin x, \quad \text{arc tg}\, x$$

de la variable indépendante x. En désignant dans chaque cas la variable dépendante par y, nous pouvons écrire

$$y = x^2 - 2x + 5, \quad y = \sin x, \quad y = \text{arc tg}\, x.$$

Dans chacun de ces cas, y (la valeur de la fonction) est connue, ou, comme on dit, *définie*, pour toutes les valeurs de x. Il n'en est pas de même de toutes les fonctions, ainsi que le montrent les exemples suivants, illustrant les exceptions les plus courantes :

(1) $$y = \frac{a}{x - b}.$$

Ici la valeur de y (c'est-à-dire la fonction) est *définie* pour toutes les valeurs de x, excepté pour $x = b$. Quand $x = b$, le diviseur devient nul et la valeur de y ne peut pas être tirée de la relation (1)(*). Pour cette valeur de la variable indépendante, on peut attribuer une valeur quelconque à la fonction.

(2) $$y = \sqrt{x}.$$

Dans ce cas, la fonction est *définie* seulement pour des valeurs positives de x. Les valeurs négatives de la variable indépendante donnent pour y des valeurs imaginaires qui doivent être exclues ici, notre étude étant limitée aux nombres réels.

(3) $$y = \log_a x.$$

Ici, y est *définie* seulement pour des valeurs positives de x. Pour des valeurs négatives de x, la fonction n'existe pas (voir § 19).

(4) $$y = \text{arc sin}\, x, \quad y = \text{arc cos}\, x.$$

Puisque les sinus et les cosinus ne peuvent devenir supérieurs à $+1$, ni inférieurs à -1, il s'ensuit que les fonctions ci-dessus sont *définies* pour toutes les valeurs de x s'étendant de -1 à $+1$ inclus, mais non pour les autres valeurs.

(*) Voir § 14, p. 13.

EXEMPLES

1. Étant donné $f(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$, montrer que

$$f(0) = -30, \qquad f(y) = y^3 - 10y^2 + 31y - 30,$$
$$f(2) = 0, \qquad f(a) = a^3 - 10a^2 + 31a - 30,$$
$$f(3) = f(5), \qquad f(yz) = y^3z^3 - 10y^2z^2 + 31yz - 30.$$
$$f(1) > f(-3), \qquad f(x-2) = x^3 - 16x^2 + 83x - 140,$$
$$f(-1) = -6f(6).$$

2. Si $f(x) = x^3 - 3x + 2$, trouver $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(1\frac{1}{3})$.

3. Si $f(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ et $\varphi(x) = x^4 - 55x^2 - 210x - 216$, montrer que $f(2) = \varphi(-2)$, $f(3) = \varphi(-3)$, $f(5) = \varphi(-4)$, $f(0) + \varphi(0) + 246 = 0$.

4. Si $F(x) = 2^x$, trouver $F(0)$, $F(-3)$, $F(\frac{1}{3})$, $F(-1)$.

5. Étant donné

$$F(x) = x(x-1)(x+6)\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x + \tfrac{5}{4}\right),$$

montrer que

$$F(0) = F(1) = F(-6) = F(\tfrac{1}{2}) = F(-\tfrac{5}{4}) = 0.$$

6. Si $f(m_1) = \dfrac{m_1 - 1}{m_1 + 1}$, montrer que

$$\frac{f(m_1) - f(m_2)}{1 + f(m_1)f(m_2)} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

7. Si $\varphi(x) = a^x$, montrer que $\varphi(y)\varphi(z) = \varphi(y + z)$.

8. Étant donné $\varphi(x) = \log \dfrac{1-x}{1+x}$, montrer que

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

9. Si $f(\varphi) = \cos\varphi$, montrer que

$$f(\varphi) = f(-\varphi) = -f(\pi - \varphi) = -f(\pi + \varphi).$$

10. Si $F(\theta) = \operatorname{tg}\theta$, montrer que

$$F(2\theta) = \frac{2F(\theta)}{1 - [F(\theta)]^2}.$$

11. Étant donné $\psi(x) = x^{2n} + x^{2m} + 1$, montrer que

$$\psi(1) = 3, \qquad \psi(0) = 1, \qquad \psi(a) = \psi(-a).$$

12. Si $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+7}$, trouver $f(\sqrt{2})$.

Rép. — 0,0204.

CHAPITRE III

THÉORIE DES LIMITES

13. Limite d'une variable. — Si une variable v prend successivement une série de valeurs approchant de plus en plus près d'une valeur constante l, de telle sorte que la quantité $|v - l|$ (*) devienne et reste finalement inférieure à une quantité positive arbitrairement choisie, aussi petite qu'elle soit, on dit que *v tend vers la limite l* ou *converge vers la limite l*, ce que l'on écrit symboliquement :

$$\text{limite } v \doteq l, \qquad \text{ou} \qquad v \doteq l.$$

Les exemples ci-après, qui nous sont familiers, éclaireront cette définition.

(1) Lorsque le nombre des côtés d'un polygone régulier inscrit augmente indéfiniment, la limite de la surface du polygone est la surface du cercle. Dans ce cas, *la variable est toujours inférieure à sa limite.*

(2) De même, la limite de la surface d'un polygone régulier circonscrit est aussi la surface du cercle, mais ici, *la variable est toujours supérieure à sa limite.*

(3) Considérons la série

$$\text{(A)} \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

La somme d'un nombre pair quelconque ($2n$) des premiers termes de cette série est

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\text{(B)} \qquad S_{2n} = \frac{\frac{1}{2^{2n}} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-1}}.$$ D'après 6, p. 1.

(*) Lire *valeur numérique* (ou *absolue*) *de la différence entre v et l.*

De même, la somme d'un nombre impair quelconque $(2n+1)$ des premiers termes de cette série est

$$S_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{2n}},$$

$$\text{(C)} \qquad S_{2n+1} = \frac{-\frac{1}{2^{2n+1}} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2n}}.$$ D'après 6, p. 1.

En écrivant (B) et (C) sous les formes ci-après :

$$\frac{2}{3} - S_{2n} = \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-1}}, \qquad S_{2n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3 \cdot 2^{2n}},$$

nous avons

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}} \left(\frac{2}{3} - S_{2n} \right) = \underset{n=\infty}{\text{limite}} \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-1}} = 0.$$

et

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}} \left(S_{2n+1} - \frac{2}{3} \right) = \underset{n=\infty}{\text{limite}} \frac{1}{3 \cdot 2^{2n}} = 0.$$

Par suite, d'après la définition de la limite d'une variable, on voit que S_{2n} et S_{2n+1} sont des quantités variables qui tendent vers $\frac{2}{3}$ comme limite, quand le nombre des termes croît indéfiniment.

En additionnant les deux, trois, quatre, etc. premiers termes de (A), les sommes trouvées d'après (B) et (C) sont alternativement plus petites et plus grandes que $\frac{2}{3}$, ce qui illustre le cas où *la variable*, ici la somme des termes de (A), *est alternativement plus petite et plus grande que sa limite*. Dans les exemples précédents, *la variable n'atteint jamais sa limite*. Il n'en est pas toujours ainsi, car, d'après la définition de la *limite d'une variable*, il est clair que le principe essentiel de cette définition est simplement que la valeur numérique (ou absolue) de la différence entre la variable et sa limite devienne et reste finalement inférieure à un nombre positif quelconque que nous pouvons choisir, si petit qu'il soit.

(4) Comme exemple du fait que la variable puisse atteindre sa limite, considérons l'exemple suivant. Inscrivons dans un cercle une série de polygones réguliers, le nombre des côtés augmentant indéfiniment. Choisissons l'un quelconque d'entre eux et construisons le

polygone circonscrit dont les côtés sont tangents au cercle aux sommets du polygone inscrit. Soient p_n et P_n les périmètres des polygones inscrit et circonscrit de n côtés et C la circonférence du cercle, et supposons que les valeurs de la variable x soient les suivantes :

$$P_n, \quad p_{n+1}, \quad C, \quad P_{n+1}, \quad p_{n+2}, \quad C, \quad P_{n+2}, \quad \text{etc.}$$

Évidemment, dans ce cas,

$$\lim_{n=\infty} x = C,$$

c'est-à-dire que *la limite est atteinte par la variable, dont les valeurs de trois en trois sont égales à* C.

14. La division par zéro est impossible. — $\frac{0}{0}$ est indéterminé, car le quotient de deux nombres est un troisième nombre qui multiplié par le diviseur reproduit le dividende. Mais, un nombre quelconque multiplié par zéro donne un produit nul ; de sorte que le quotient est indéterminé, c'est-à-dire que tout nombre, quel qu'il soit, peut être considéré comme quotient, résultat qui est sans aucune valeur.

$\frac{a}{0}$ n'a pas de sens, a étant différent de zéro, car il n'y a pas de nombre qui multiplié par zéro donne un produit égal à a. Par conséquent, *la division par zéro est une opération impossible*.

Il faut faire attention de ne pas diviser par zéro par inadvertance, ainsi que le montre l'exemple ci-après :

Supposons que $a = b$.
Alors, évidemment, $ab = a^2$.
En retranchant b^2 à chaque membre, il vient

$$ab - b^2 = a^2 - b^2,$$

ou, en mettant en facteur,

$$b(a - b) = (a + b)(a - b).$$

En divisant par $a - b$, on obtient

$$b = a + b.$$

Mais $\quad a = b,$
donc $\quad b = 2b$
ou $\quad 1 = 2.$

Ce résultat est absurde et provient de ce que nous avons divisé par $a - b = 0$.

15. Infiniment petits. — Une variable v dont la limite est zéro est appelée un *infiniment petit* (*), ce que l'on écrit

$$\text{limite } v = 0, \quad \text{ou} \quad v \doteq 0;$$

cela signifie que les valeurs numériques successives de v deviennent et restent finalement inférieures à tout nombre positif, aussi petit qu'il soit. On dit qu'une telle variable devient *infiniment petite* ou qu'elle *s'évanouit finalement.*

Si limite $v = l$, alors, limite $(v - l) = 0$, ce qui veut dire que *la différence entre une variable v et sa limite est un infiniment petit.*

Réciproquement, *si la différence entre une variable et une constante est un infiniment petit, la variable tend vers la constante comme limite.*

16. Le concept de l'infini (∞). — Si une variable v devient et reste finalement supérieure à tout nombre positif choisi, aussi grand qu'il soit, on dit que *v croît sans limite,* et l'on écrit

$$\text{limite } v = +\infty, \quad \text{ou} \quad v \doteq +\infty.$$

Si une variable v devient et reste finalement inférieure algébriquement à tout nombre négatif choisi, on dit que *v décroît sans limite,* et l'on écrit

$$\text{limite } v = -\infty, \quad \text{ou} \quad v \doteq -\infty.$$

Si une variable v devient et reste finalement supérieure en valeur numérique (ou absolue) à tout nombre positif choisi, aussi grand qu'il soit, on dit que *v croît sans limite en valeur numérique* (ou absolue), ou que *v devient infiniment grand* (**), et l'on écrit

$$\text{limite } v = \infty, \quad \text{ou} \quad v \doteq \infty.$$

L'infini (∞) n'est pas un nombre. L'infini sert simplement à caractériser un mode particulier de variation d'une variable en vertu duquel cette variable croît et décroît indéfiniment.

17. Valeur limite d'une fonction. — Une fonction $f(x)$ étant

---

(*) Il suit de là qu'une constante, si petite qu'elle soit, n'est pas un infiniment petit.

(**) L'expression $v \doteq +\infty$ se lit quelquefois : *v tend vers la limite plus l'infini.* De même, $v \doteq -\infty$ se lit : *v tend vers la limite moins l'infini,* et $v \doteq \infty$ se lit : *v en valeur numérique (ou absolue) tend vers l'infini comme limite.*

Quoique la notation ci-dessus soit commode à employer dans les cas envisagés, le lecteur ne doit pas oublier que l'infini n'est pas une limite au sens de la définition que nous avons donnée à la page 11, car l'infini n'est pas un nombre.

donnée, si la variable indépendante x prend une série de valeurs telles que

$$\text{limite } x = a$$

et qu'en même temps, la variable dépendante $f(x)$ prenne une série de valeurs correspondantes, telles que

$$\text{limite } f(x) = \text{A},$$

on écrit alors cette relation

$$\underset{x=a}{\text{limite}} f(x) = A$$

et on lit : *la limite de* $f(x)$, *quand* x *tend vers* a *d'une manière quelconque, est* A.

18. Fonctions continues et fonctions discontinues. — Une fonction $f(x)$ est dite *continue pour* $x = a$, si la valeur limite de la fonction quand x tend vers a, d'une manière quelconque, est la valeur prise par la fonction pour $x = a$, c'est-à-dire que si

$$\underset{x=a}{\text{limite}} f(x) = f(a),$$

$f(x)$ est alors *continue* pour $x = a$.

La fonction est dite discontinue pour $x = a$ si cette condition n'est pas satisfaite. Par exemple, si

$$\underset{x=a}{\text{limite}} f(x) = \infty,$$

la fonction est discontinue pour $x = a$.

Nous appelons maintenant l'attention du lecteur sur les cas suivants, qui se présentent fréquemment :

1[er] Cas. Comme exemple d'une fonction continue pour une valeur particulière de la variable, considérons la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Pour $x = 1$, $f(x) = f(1) = 3$.

D'autre part, si x tend vers 1 d'une manière quelconque, la fonction $f(x)$ tend vers 3 comme limite. Par suite, la fonction est continue pour $x = 1$.

2e Cas. La définition d'une fonction continue suppose que la fonction est définie pour $x = a$. Si ce n'est pas le cas, il est quelquefois possible d'assigner à la fonction une valeur telle que pour $x = a$ la condition de continuité puisse être satisfaite.

Le théorème suivant comprend ces cas :

Théorème. — *Si $f(x)$ n'est pas définie pour $x = a$ et si*

$$\text{limite}_{x=a} f(x) = B,$$

$f(x)$ sera continue pour $x = a$ si l'on prend B comme valeur de $f(x)$ pour $x = a$.

Ainsi, la fonction $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$

n'est pas définie pour $x = 2$ (parce qu'alors il y aurait division par zéro).

Mais pour toute autre valeur de x,

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2,$$

et $$\text{limite}_{x=2} (x + 2) = 4,$$

d'où $$\text{limite}_{x=2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Bien que la fonction ne soit pas définie pour $x = 2$, si nous lui assignons arbitrairement la valeur 4 pour $x = 2$, elle devient alors continue pour cette valeur.

Une fonction $f(x)$ est dite continue dans un intervalle quand elle est continue pour toutes les valeurs de x dans cet intervalle (*).

19. La continuité et la discontinuité des fonctions illustrées par leurs graphiques. — (1) Considérons la fonction x^2 et posons

(A) $$y = x^2.$$

(*) Dans cet ouvrage, nous nous occuperons uniquement des fonctions qui sont continues en général, c'est-à-dire continues pour toutes les valeurs de x, sauf pour certaines valeurs isolées, nos résultats n'étant considérés comme valables, d'une façon générale, que pour les valeurs de x qui rendent réellement continues les fonctions dont il s'agit. A moins que l'attention ne soit appelée spécialement sur ce point, nous ferons abstraction des valeurs exceptionnelles de x pour lesquelles la fonction est discontinue. La définition d'une fonction continue est quelquefois résumée brièvement (mais d'une façon imparfaite) sous cette forme : *une petite variation de x produit une petite variation de $f(x)$.*

Nous ne considérerons pas les fonctions ayant un nombre infini d'oscillations dans une région limitée.

Si nous donnons à x des valeurs déterminées et que nous calculions les valeurs correspondantes de y, nous pouvons construire une série de points. En traçant à main levée une ligne continue passant par ces points, nous obtiendrons une bonne représentation de l'allure générale de la fonction (*fig.* 2). Ce tableau ou image de la fonction s'appelle son *graphique*. C'est évidemment le lieu géométrique de tous les points satisfaisant à l'équation (A).

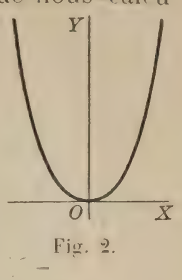


Fig. 2.

Une telle série ou assemblage de points s'appelle également une *courbe*. Evidemment, nous pouvons donner à x des valeurs suffisamment voisines l'une de l'autre pour que les valeurs de y (et par suite les points de la courbe) soient aussi rapprochées l'une de l'autre qu'il nous plaira. En d'autres termes, la courbe est ininterrompue et la fonction x^2 est continue pour toutes les valeurs de x.

(2) Le graphique de la fonction continue $\sin x$ (*fig.* 3) est obtenu en traçant le lieu de

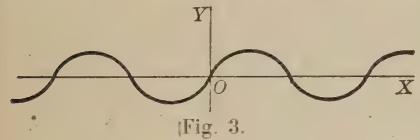


Fig. 3.

$$y = \sin x.$$

On voit que la courbe est ininterrompue.

(3) La fonction continue e^x se rencontre très fréquemment en analyse. Si nous construisons son graphique en partant de

$$y = e^x, \qquad (e = 2{,}718 \cdots)$$

nous obtenons une courbe continue, ainsi que le montre la figure 4.

Fig. 4.

Nous voyons clairement par la figure que

(*a*) quand $x = 0$, $\lim\limits_{x=0} y (= e^x) = 1$;

(*b*) quand $x > 0$, $y (= e^x)$ est positif et croît quand on va de l'origine vers la droite ;

(*c*) quand $x < 0$, $y (= e^x)$ est encore positif et décroît quand on va de l'origine vers la gauche.

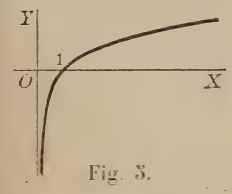


Fig. 5.

(4) La fonction $\log_e x$ est étroitement liée à celle que nous venons de discuter. En effet, si nous construisons son graphique (*fig.* 5), en partant de

$$y = \log_e x,$$

nous voyons qu'il se comporte par rapport à OX et à OY, comme le graphique de e^x par rapport à OY et à OX.

Dans ce cas, nous avons le tableau suivant :

(*a*) Pour $x = 1$, $\log_e x = \log_e 1 = 0$.

(*b*) Pour $x > 1$, $\log_e x$ est positif et croît quand x croît.

(*c*) Pour $1 > x > 0$, $\log_e x$ est négatif et croît en valeur numérique (ou absolue) quand x diminue, c'est-à-dire que

$$\underset{x=0}{\text{limite}} \log x = -\infty.$$

(*d*) Pour $x \leqslant 0$, $\log_e x$ n'est pas défini.

Par suite, le graphique se trouve entièrement à droite de OY.

(5) Considérons la fonction $\frac{1}{x}$ et posons

$$y = \frac{1}{x}.$$

Si nous traçons le graphique de cette fonction (*fig.* 6), nous voyons que quand x tend vers zéro par valeurs négatives, les points de la courbe s'abaissent jusqu'à l'infini et lorsque x tend vers zéro par valeurs positives, ils s'élèvent jusqu'à l'infini.

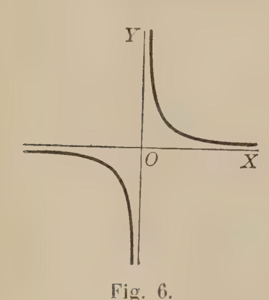


Fig. 6.

La courbe ne forme donc pas une branche continue allant d'un côté à l'autre de l'axe des y, ce qui montre graphiquement que la fonction est discontinue pour $x = 0$, mais continue pour toutes les autres valeurs de x.

(6) D'après le graphique (*fig.* 7) de

$$y = \frac{2x}{1 - x^2},$$

on voit que cette fonction est discontinue pour les deux valeurs $x = \pm 1$, mais qu'elle est continue pour toutes les autres valeurs de x.

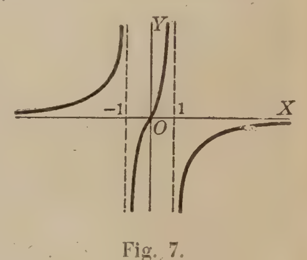


Fig. 7.

(7) Le graphique de

$$y = \operatorname{tg} x$$

montre (*fig.* 8) que la fonction tg x est discontinue pour un nombre infini de valeurs de la variable indépendante x, savoir $x = \frac{n\pi}{2}$, n désignant un nombre entier impair quelconque, positif ou négatif.

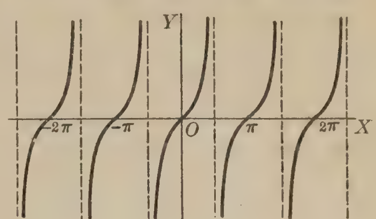


Fig. 8.

(8) La fonction arc tg x a une infinité de valeurs pour une valeur donnée de x, le graphique de l'équation $y = \text{arc tg}\, x$ consistant en un nombre infini de branches. Si, cependant, nous ne considérons qu'une branche en particulier, la fonction est continue. Par exemple, si nous disons que y doit être le plus petit arc en valeur numérique (ou absolue) dont la tangente est x, c'est-à-dire que y ne doit prendre que des valeurs entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, nous sommes alors limités à la branche passant par l'origine (*fig.* 9) et la condition de continuité est satisfaite.

Fig. 9.

(9) On trouve de même que arc tg $\frac{1}{x}$ est une fonction ayant un nombre infini de valeurs. En ne considérant (*fig.* 10) qu'une branche du graphique de $y = \text{arc tg}\, \frac{1}{x}$, nous voyons que quand x tend vers zéro par valeurs négatives, y a pour limite $-\frac{\pi}{2}$ et que quand x tend vers zéro par valeurs positives, y a pour limite $+\frac{\pi}{2}$. Par suite la fonction est discontinue pour $x = 0$. Sa valeur pour $x = 0$ peut être choisie arbitrairement.

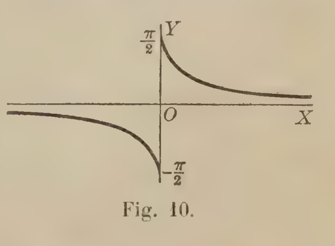


Fig. 10.

Il existe des fonctions qui sont discontinues pour toute valeur de la variable indépendante dans un certain champ. Dans les applications ordinaires de l'Analyse, nous avons affaire à des fonctions qui ne sont discontinues (lorsqu'elles le sont) que pour certaines valeurs isolées de la variable indépendante. De telles fonctions sont

donc continues, en général ; ce sont d'ailleurs les seules qui seront considérées dans cet ouvrage.

20. Théorèmes fondamentaux sur les limites. — Dans les problèmes relatifs aux limites, on fait généralement usage des théorèmes suivants. On suppose que la limite de chaque variable existe et qu'elle est finie.

Théorème I. — *La limite de la somme algébrique d'un nombre fini de variables est égale à la somme algébrique des limites des différentes variables.*

Théorème II. — *La limite du produit d'un nombre fini de variables est égale au produit des limites des différentes variables.*

Théorème III. — *La limite du quotient de deux variables est égale au quotient des limites des variables séparées, pourvu que la limite du dénominateur ne soit pas nulle.*

Avant de démontrer ces théorèmes, il est nécessaire d'établir les propriétés suivantes des infiniment petits :

(1) *La somme d'un nombre fini d'infiniment petits est un infiniment petit.*

Pour démontrer cette proposition, nous devons montrer que la valeur numérique de cette somme peut être rendue inférieure à toute quantité positive (telle que ε), si petite qu'elle soit (§ 15). Cette opération est évidemment possible, car la limite de tout infiniment petit étant zéro, chacun d'eux peut être rendu numériquement inférieur à $\frac{\varepsilon}{n}$ (n étant le nombre des infiniment petits) ; par suite, la somme de ces infiniment petits peut être rendue numériquement inférieure à ε.

(2) *Le produit d'une constante c par un infiniment petit est un infiniment petit.*

Car la valeur numérique du produit peut toujours être rendue inférieure à toute quantité positive, si petite qu'elle soit (telle que ε) en rendant la valeur numérique de l'infiniment petit inférieure à $\frac{\varepsilon}{c}$.

(3) *Le produit d'un nombre fini d'infiniment petits est un infiniment petit.*

Car la valeur numérique du produit peut être rendue inférieure à toute quantité positive choisie, si petite qu'elle soit. Si le produit

donné contient n facteurs, comme chaque infiniment petit peut être supposé inférieur à la racine n^e de ε, le produit peut être rendu inférieur à ε lui-même.

(4) *Si v est une variable tendant vers une limite l, différente de zéro, le quotient d'un infiniment petit par v est aussi un infiniment petit.*

Car si limite $v = l$ et que k soit un nombre numériquement inférieur à l, d'après la définition de la limite, v deviendra et restera finalement supérieur numériquement à k. Par suite, le quotient $\frac{\varepsilon}{v}$, où ε est un infiniment petit, deviendra et restera finalement inférieur numériquement à $\frac{\varepsilon}{k}$. Par conséquent, d'après (2), ce quotient est un infiniment petit.

Démonstration du théorème I. — Soient $v_1, v_2, v_3, \cdots$ les variables, et $l_1, l_2, l_3, \cdots$ leurs limites respectives.

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} v_1 - l_1 &= \varepsilon_1, \\ v_2 - l_2 &= \varepsilon_2, \\ v_3 - l_3 &= \varepsilon_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \quad , \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \cdots$ sont des infiniment petits (c'est-à-dire des variables ayant zéro pour limite).

En additionnant membre à membre, il vient

$$\text{(A)} \qquad (v_1 + v_2 + v_3 + \cdots) - (l_1 + l_2 + l_3 + \cdots) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots).$$

Puisque le membre de droite est un infiniment petit, d'après (1), p. 20, nous avons

$$\text{limite } (v_1 + v_2 + v_3 + \cdots) = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots$$

ou

$$\text{limite } (v_1 + v_2 + v_3 + \cdots) = \text{limite } v_1 + \text{limite } v_2 + \text{limite } v_3 + \cdots$$

C. q. f. d.

Démonstration du théorème II. — Soient v_1 et v_2 les variables, l_1 et l_2 leurs limites respectives et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ des infiniment petits.

Alors

$$\begin{aligned} v_1 &= l_1 + \varepsilon, \\ v_2 &= l_2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$v_1 v_2 = (l_1 + \varepsilon_1)(l_2 + \varepsilon_2)$$
$$= l_1 l_2 + l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

ou

(B) $$v_1 v_2 - l_1 l_2 = l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Puisque le membre de droite est un infiniment petit, d'après (1) et (2), p. 20, nous avons

$$\text{limite}\,(v_1 v_2) = l_1 l_2 = \text{limite}\, v_1 \cdot \text{limite}\, v_2.$$

C. q. f. d.

Démonstration du théorème III. — En employant la même notation que précédemment, il vient

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{l_1 + \varepsilon_1}{l_2 + \varepsilon_2} = \frac{l_1}{l_2} + \left(\frac{l_1 + \varepsilon_1}{l_2 + \varepsilon_2} - \frac{l_1}{l_2}\right)$$

ou

(C) $$\frac{v_1}{v_2} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_2 \varepsilon_1 - l_1 \varepsilon_2}{l_2(l_2 + \varepsilon_2)}.$$

Ici encore, le membre de droite est un infiniment petit d'après (4), p. 21, si $l_2 \neq 0$; par suite

$$\text{limite}\left(\frac{v_1}{v_2}\right) = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\text{limite}\, v_1}{\text{limite}\, v_2}.$$

C. q. f. d.

Il est évident que si l'on remplace une ou plusieurs variables par des constantes, notre raisonnement est toujours valable et que, par suite, les théorèmes ci-dessus restent vrais dans ce cas.

21. Valeurs limites particulières. — Les exemples ci-après ont une importance particulière dans l'étude de l'Analyse. Dans ces exemples, on suppose $a > 0$ et $c \neq 0$.

	Sous forme de limites, ils s'écrivent	*Formes abrégées souvent usitées*
(1)	$\displaystyle\lim_{x=0} \frac{c}{x} = \infty$;	$\frac{c}{0} = \infty.$
(2)	$\displaystyle\lim_{x=\infty} cx = \infty$;	$c \cdot \infty = \infty.$
(3)	$\displaystyle\lim_{x=\infty} \frac{x}{c} = \infty$;	$\frac{\infty}{c} = \infty.$

(4) $\lim_{x=\infty} \frac{c}{x} = 0$; $\frac{c}{\infty} = 0$.

(5) $\lim_{x=-\infty} a^x = +\infty$, quand $a < 1$; $a^{-\infty} = +\infty$.

(6) $\lim_{x=+\infty} a^x = 0$, quand $a < 1$; $a^{+\infty} = 0$.

(7) $\lim_{x=-\infty} a^x = 0$, quand $a > 1$; $a^{-\infty} = 0$.

(8) $\lim_{x=+\infty} a^x = +\infty$, quand $a > 1$; $a^{+\infty} = +\infty$.

(9) $\lim_{x=0} \log_a x = +\infty$, quand $a < 1$; $\log_a 0 = +\infty$.

(10) $\lim_{x=+\infty} \log_a x = -\infty$, quand $a < 1$; $\log_a(+\infty) = -\infty$.

(11) $\lim_{x=0} \log_a x = -\infty$, quand $a > 1$; $\log_a 0 = -\infty$.

(12) $\lim_{x=+\infty} \log_a x = +\infty$, quand $a > 1$; $\log_a(+\infty) = +\infty$.

Les expressions de la seconde colonne ne doivent pas être considérées comme exprimant des égalités numériques (∞ n'étant pas un nombre). Ce sont simplement des *équations symboliques* impliquant les relations indiquées dans la première colonne et c'est ainsi qu'on doit les comprendre.

22. Montrer que $\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (*). — Soit O le centre d'un cercle ayant pour rayon l'unité (*fig.* 11).

Soient arc AM = arc AM' = x et MT et M'T les tangentes au cercle en M et en M'. D'après la Géométrie,

$$\text{MPM}' < \text{MAM}' < \text{MTM}',$$

ou

$$2 \sin x < 2x < 2 \operatorname{tg} x.$$

En divisant par $2 \sin x$, nous obtenons

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Fig. 11.

(*) Si nous nous reportons au tableau de la page 4, nous voyons que pour tous les angles inférieurs à 10°, l'angle exprimé en radians et le sinus de l'angle ont trois décimales communes. Si nous consultions des tables à cinq décimales, nous verrions que pour tous les angles inférieurs à 2°,2, le sinus de l'angle et l'angle lui-même sont égaux jusqu'à la 4e décimale. Il résulte de là que nous pouvons conjecturer que

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Si, maintenant, nous faisons tendre x vers zéro, $\underset{x=0}{\text{limite}}\frac{x}{\sin x}$ doit être comprise entre la constante 1 et $\underset{x=0}{\text{limite}}\frac{1}{\cos x}$ qui est aussi égale à 1.

Par conséquent,

$$\underset{x=0}{\text{limite}}\frac{x}{\sin x}=1, \qquad \text{ou} \qquad \underset{x=0}{\text{limite}}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad \text{Th. III, p. 20.}$$

Il est intéressant d'observer l'allure de cette fonction d'après son graphique (*fig.* 12), qui est le lieu géométrique de l'équation

$$y=\frac{\sin x}{x}.$$

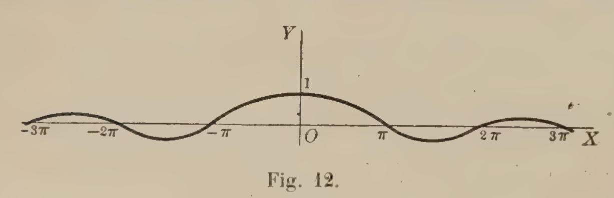


Fig. 12.

Bien que la fonction ne soit pas définie pour $x=0$, elle n'est cependant pas discontinue quand $x=0$, si nous convenons que

$$\frac{\sin 0}{0}=1. \qquad (2^e \text{ cas, p. } 16)$$

23. Le nombre e. — Une des limites les plus importantes de l'Analyse est la suivante :

$$\underset{x=0}{\text{limite}}(1+x)^{\frac{1}{x}}=2{,}71828\cdots=e.$$

La démonstration rigoureuse de l'existence d'une telle limite est au-dessus de la portée de cet ouvrage. Nous nous contenterons pour le moment de construire le lieu géométrique de l'équation

$$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

et de montrer graphiquement que quand $x \doteq 0$ la fonction

$$y=(1+x)^{\frac{1}{x}} \text{ (\textit{fig}. 13)}$$

x	y	x	y
10	1,0096		
5	1,4310		
2	1,7320		
1	2,0000		
0,5	2,2500	$-0{,}5$	4,0000
0,1	2,5937	$-0{,}1$	2,8680
0,01	2,7048	$-0{,}01$	2,7320
0,001	2,7169	$-0{,}001$	2,7195

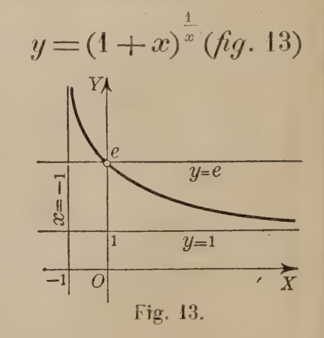


Fig. 13.

prend des valeurs très voisines de $2{,}718\cdots$ et que, par suite, $e = 2{,}718\cdots$ approximativement.

Quand $x \doteq 0$ par valeurs négatives, y décroît et tend vers e comme limite.

Quand $x \doteq 0$ par valeurs positives, y croît et tend également vers e comme limite.

Lorsque $x \doteq \infty$, y tend vers 1 et lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures à -1, y croît sans limite.

Dans le chapitre XVIII, n° 145, ex. 15, nous montrerons comment on peut calculer la valeur de e avec un nombre quelconque de décimales.

Les *logarithmes naturels* sont ceux qui ont pour base le nombre e. Ces logarithmes jouent un rôle très important en Mathématiques. Quand la base n'est pas indiquée explicitement dans cet ouvrage, c'est toujours la base e qui est sous-entendue. Ainsi, $\log_e v$ s'écrit simplement $\log v$.

Les logarithmes naturels possèdent la propriété caractéristique suivante :

Si $x \doteq 0$ d'une manière quelconque,

$$\text{limite}\,\frac{\log(1+x)}{x} = \text{limite}\,\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1.$$

24. Expressions prenant la forme $\frac{\infty}{\infty}$. — L'infini n'étant pas un nombre, l'expression $\infty : \infty$ est indéterminée. Pour évaluer une fraction prenant cette forme, le numérateur et le dénominateur étant des fonctions algébriques, nous utiliserons la règle suivante :

Règle. — *Diviser le numérateur et le dénominateur par la plus haute puissance de la variable figurant dans l'un ou l'autre des deux termes de la fraction. Substituer ensuite la valeur de la variable.*

EXEMPLE. — Évaluer $\underset{x=\infty}{\text{limite}}\,\frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3}$.

Solution. En substituant directement, nous obtenons

$$\underset{x=\infty}{\text{limite}}\,\frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3} = \frac{\infty}{\infty}\text{, expression qui est indéterminée.}$$

En appliquant la règle ci-dessus, nous divisons le numérateur et le dénominateur par x^3. Il vient alors

$$\lim_{x=\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3} = \lim_{x=\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}}{\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} - 7} = -\frac{2}{7}.$$

EXEMPLES

Établir les limites suivantes :

1. $\lim_{x=\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = 1.$

Démonstration. $\lim_{x=\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x=\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x=\infty} (1) + \lim_{x=\infty} \left(\frac{1}{x}\right)$ Th. I, p. 20

$= 1 + 0 = 1.$

2. $\lim_{x=\infty} \left(\frac{x^2+2x}{5-3x^2}\right) = -\frac{1}{3}.$

Démonstration. $\lim_{x=\infty} \left(\frac{x^2+2x}{5-3x^2}\right) = \lim_{x=\infty} \left(\frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{5}{x^2}-3}\right)$

[En divisant le numérateur et le dénominateur par x^2.]

$= \frac{\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x=\infty}\left(\frac{5}{x^2}-3\right)}$ Th. III, p. 20

$= \frac{\lim_{x=\infty}(1) + \lim_{x=\infty}\left(\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x=\infty}\left(\frac{5}{x^2}\right) - \lim_{x=\infty}(3)}$ Th. I, p. 20

$= \frac{1+0}{0-3} = -\frac{1}{3}.$

3. $\lim_{x=1} \frac{x^2-2x+5}{x^2+7} = \frac{1}{2}.$

4. $\lim_{x=0} \frac{3x^3+6x^2}{2x^4-15x^2} = -\frac{2}{5}.$

5. $\lim_{x=-2} \frac{x^2+1}{x+3} = 5.$

6. $\lim_{h=0} (3ax^2 - 2hx + 5h^2) = 3ax^2.$

7. $\lim_{x=\infty} (ax^2 + bx + c) = \infty.$

8. $\lim_{k=0} \frac{(x-k)^2 - 2kx^3}{x(x+k)} = 1.$

9. $\lim_{x=\infty} \frac{x^2+1}{3x^2+2x-1} = \frac{1}{3}.$

10. $\lim_{x=\infty} \frac{3+2x}{x^2-5x} = 0.$

11. $\lim_{\alpha=\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\alpha-a)}{\cos(2\alpha-a)} = -\operatorname{tg} a.$

12. $\lim_{x=\infty} \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f} = \frac{a}{d}.$

13. $\lim_{z=0} \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right) = a.$

14. $\lim_{x=0} \frac{2x^3 + 3x^2}{x^3} = \infty.$

15. $\lim_{x=\infty} \frac{5x^2 - 2x}{x} = \infty.$

16. $\lim_{y=\infty} \frac{y}{y+1} = 1.$

17. $\lim_{n=\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} = 1.$

18. $\lim_{s=1} \frac{s^3 - 1}{s - 1} = 3.$

19. $\lim_{h=0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}.$

20. $\lim_{h=0} \left[\cos(\theta + h)\frac{\sin h}{h}\right] = \cos\theta.$

21. $\lim_{x=\infty} \frac{4x^2 - x}{4 - 3x^2} = -\frac{4}{3}.$

22. $\lim_{\theta=0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}.$

23. $\lim_{x=a} \frac{1}{x-a} = -\infty$, si x tend vers a par valeurs inférieures à a.

24. $\lim_{x=a} \frac{1}{x-a} = +\infty$, si x tend vers a par valeurs supérieures à a.

CHAPITRE IV

DIFFÉRENTIATION

25. Introduction. — Nous allons maintenant étudier la manière dont une fonction varie lorsque la variable indépendante change de valeur. Le problème fondamental du Calcul différentiel consiste à établir la mesure de cette variation de la fonction avec une précision mathématique. C'est en cherchant des problèmes dans lesquels des quantités variaient sans cesse, que Newton (*) fut conduit à la découverte des principes fondamentaux de l'Analyse, l'instrument scientifique le plus puissant du mathématicien moderne.

26. Accroissements. — *L'accroissement* d'une variable qui passe d'une valeur numérique à une autre est la *différence* obtenue en retranchant la première valeur de la seconde. Un accroissement de x est désigné par le symbole Δx, qu'on lit *delta x*. Le lecteur est mis en garde contre la tendance à lire *delta fois x*, ce qui n'est pas la signification. Evidemment, cet accroissement peut être positif ou négatif (**), suivant que la variable croît ou décroît en valeur. De même,

Δy indique un accroissement de y,
$\Delta \varphi$ indique un accroissement de φ,
$\Delta f(x)$ indique un accroissement de $f(x)$, etc.

Si dans $y = f(x)$, la variable indépendante x prend un accroissement Δx, l'accroissement correspondant de $f(x)$ (ou de la variable dépendante y) s'indique toujours par Δy.

L'accroissement Δy est toujours supposé calculé à partir d'une valeur initiale de y correspondant à celle de x fixée arbitrairement,

(*) Isaac Newton (1642-1727), mathématicien anglais, fut un homme du plus extraordinaire génie. Il développa la science de l'Analyse sous le nom de Fluxions. Quoique Newton eût découvert et utilisé la nouvelle science dès 1670, son premier ouvrage publié dans lequel elle apparaît date de 1687 ; il a pour titre *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Ce fut le principal ouvrage de Newton. Laplace a dit de lui : « Il demeurera toujours prééminent au-dessus de toutes les autres productions de l'esprit humain. »

(**) Quelques auteurs appellent un *accroissement négatif* un *décroissement*.

à partir de laquelle Δx est compté. Par exemple, considérons la fonction

$$y = x^2.$$

En prenant $x = 10$, comme valeur initiale de x, on obtient $y = 100$ comme valeur initiale de y.

Supposons que x croisse jusqu'à $x = 12$, c'est-à-dire que $\Delta x = 2$. Alors, y croît jusqu'à $y = 144$ et $\Delta y = 44$.

Supposons que x décroisse jusqu'à $x = 9$, c'est-à-dire que $\Delta x = -1$; y décroît jusqu'à $y = 81$ et $\Delta y = -19$.

Il peut arriver que lorsque x croît, y décroisse ou inversement ; dans l'un et l'autre cas, Δx et Δy auront des signes opposés.

Il est clair également (ainsi qu'on l'a expliqué dans l'exemple ci-dessus) que si $y = f(x)$ est une fonction continue et que Δx décroisse en valeur numérique, Δy décroît également en valeur numérique.

27. Comparaison des accroissements. — Considérons la fonction

$$\text{(A)} \qquad y = x^2.$$

Supposons une valeur initiale fixée pour x et donnons à x un accroissement Δx. Alors, y prendra un accroissement correspondant Δy, et nous aurons

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2,$$

ou $$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 ;$$

retranchant (A), $$y \qquad = x^2$$

$$\text{(B)} \qquad \Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Nous obtenons l'accroissement Δy en fonction de x et de Δx.

Pour trouver le rapport des accroissements, divisons (B) par Δx ; nous obtenons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Si la valeur initiale de x est 4, il est évident que

$$\underset{\Delta x = 0}{\text{limite}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8.$$

Notons soigneusement la manière dont se comporte le rapport des accroissements de x et de y quand l'accroissement de x diminue.

VALEUR INITIALE de x	NOUVELLE VALEUR de x	ACCROISSEMENT Δx	VALEUR INITIALE de y	NOUVELLE VALEUR de y	ACCROISSEMENT Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
4	5	1	16	25	9	9
4	4,8	0,8	16	23,04	7,04	8,8
4	4,6	0,6	16	21,16	5,16	8,6
4	4,4	0,4	16	19,36	3,36	8,4
4	4,2	0,2	16	17,64	1,64	8,2
4	4,1	0,1	16	16,81	0,81	8,1
4	4,01	0,01	16	16,0801	0,0801	8,01

On voit que quand Δx décroît, Δy décroît également, mais leur rapport prend les valeurs successives, 9, 8,8, 8,6, 8,4, 8,2, 8,1, 8,01, ce qui montre que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut être amené aussi près de 8 que nous le voulons, en prenant Δx suffisamment petit. Par suite,

$$\underset{\Delta x = 0}{\text{limite}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8 \,(*).$$

28. Dérivée d'une fonction d'une seule variable. — La définition fondamentale du calcul différentiel est la suivante :

La dérivée (**) d'une fonction est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable indépendante quand ce dernier accroissement tend vers zéro.

Quand la limite de ce rapport existe, on dit que la fonction est *différentiable*, ou qu'elle *a une dérivée.*

La définition ci-dessus peut être représentée symboliquement comme il suit.

Etant donnée la fonction

(A) $$y = f(x),$$

considérons x comme ayant une valeur fixe. Donnons à x un accrois-

(*) Le lecteur doit être mis en garde contre l'erreur habituelle qui consiste à conclure que si le numérateur et le dénominateur d'une fraction tendent tous deux vers zéro, la limite de la valeur de la fraction (ou rapport) est zéro. La limite du rapport peut prendre n'importe quelle valeur numérique. Dans l'exemple ci-dessus la limite est 8.

(**) Appelée aussi *coefficient différentiel* ou *fonction dérivée.*

sement Δx ; la fonction y prend alors un accroissement Δy, et la nouvelle valeur de la fonction est

(B) $$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Pour trouver l'accroissement de la fonction, retranchons (A) de (B), nous obtenons

(C) $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

En divisant par l'accroissement de la variable, Δx, nous avons

(D) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

La limite de ce rapport quand Δx tend vers zéro est, d'après notre définition, la *dérivée* de la fonction donnée ; on la *désigne par le symbole* $\frac{dy}{dx}$.

Par conséquent,

(E) $$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x = 0}{\text{limite}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

définit *la dérivée de y [ou de f(x)] par rapport à x.*

D'après (D), nous avons également

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x = 0}{\text{limite}} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

La recherche de la dérivée d'une fonction est appelée *différentiation.*

Il doit être soigneusement noté que la dérivée est la *limite d'un rapport,* et non un rapport de limites. Ce dernier rapport prendrait la forme $\frac{0}{0}$ qui est indéterminée (§ 14, p. 13).

29. Symboles des dérivées. — Puisque Δy et Δx sont toujours finis et ont des valeurs déterminées, l'expression

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

est en réalité une fraction. Cependant, le symbole $\frac{dy}{dx}$ *ne doit pas*

être considéré comme une fraction, mais comme la valeur limite d'une fraction. Dans beaucoup de cas, nous verrons que ce symbole possède les propriétés d'une fraction et, plus tard, nous montrerons comment on peut attribuer des significations à dx et à dy, mais pour le moment le symbole $\frac{dy}{dx}$ doit être considéré comme un tout.

Puisque la dérivée d'une fonction de x est aussi, en général, une fonction de x, le symbole $f'(x)$ est également employé pour indiquer la dérivée de $f(x)$. Par suite, si

$$y = f(x),$$

nous pouvons écrire

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

ce qui se lit *la dérivée de y par rapport à x égale f prime de x*.

Le symbole $\frac{d}{dx}$, quand il est considéré en lui-même, est appelé *facteur de différentiation*; il indique que toute fonction écrite après lui doit être différentiée par rapport à x. Ainsi :

$\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}y$ indique que la fonction y doit être différentiée par rapport à x;

$\frac{d}{dx}f(x)$ indique que la fonction $f(x)$ doit être différentiée par rapport à x;

$\frac{d}{dx}(2x^2 + 5)$ indique que la fonction $(2x^2 + 5)$ doit être différentiée par rapport à x.

y' est une forme abrégée de $\frac{dy}{dx}$.

Le symbole D_x est employé par quelques auteurs à la place de $\frac{d}{dx}$. Dans ces conditions, si

$$y = f(x),$$

nous pouvons écrire les identités

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = D_x f(x) = f'(x).$$

30. Fonctions différentiables. — D'après la théorie des limites, il est clair que si la dérivée d'une fonction existe pour une certaine valeur de la variable indépendante, la fonction elle-même doit être continue pour cette valeur de la variable.

La réciproque, cependant, n'est pas toujours vraie, puisqu'on a découvert des fonctions qui sont continues et ne possèdent pas de dérivée. Mais de telles fonctions ne se rencontrent pas souvent dans les Mathématiques appliquées et, *dans cet ouvrage, nous ne considérerons que des fonctions différentiables*, c'est-à-dire des fonctions qui possèdent une dérivée pour toutes les valeurs de la variable indépendante, sauf, tout au plus, pour des valeurs isolées.

31. Règle générale pour différentier. — D'après la définition de la dérivée, on voit que pour différentier une fonction $y = f(x)$, il faut effectuer successivement les opérations ci-après :

RÈGLE GÉNÉRALE POUR DIFFÉRENTIER (*).

1re opération. — Remplacer x par $x + \Delta x$ dans la fonction, ce qui donne une nouvelle valeur de la fonction, $y + \Delta y$.

2e opération. — Retrancher la valeur donnée de la fonction de la nouvelle valeur afin de trouver Δy (l'accroissement de la fonction).

3e opération. — Diviser le reste Δy (l'accroissement de la fonction) par Δx (l'accroissement de la variable indépendante).

4e opération. — Trouver la limite de ce quotient quand Δx (l'accroissement de la variable indépendante) varie et tend vers zéro. C'est la dérivée cherchée.

Le lecteur doit se familiariser avec cette règle en l'appliquant à un grand nombre d'exemples. Nous allons maintenant étudier en détail trois de ces exemples.

EXEMPLE I. — Différentier $3x^2 + 5$.

Solution. En effectuant les opérations successives de la *règle générale,* nous obtenons après avoir posé $y = 3x^2 + 5$,

1°) $$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5$$
$$= 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5.$$

2°) $$\begin{array}{rl} y + \Delta y = & 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5 \\ y \qquad = & 3x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 5 \\ \hline \Delta y = & \qquad\quad 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 \end{array}$$

(*) Appelée aussi *règle des quatre opérations.*

3°) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x.$$

4°) $$\frac{dy}{dx} = 6x. \text{ Réponse.}$$

Nous pouvons aussi écrire ce résultat sous la forme $\frac{d}{dx}(3x^2 + 5) = 6x$.

EXEMPLE II. — Différentier $x^3 - 2x + 7$.

Solution. Posons $$y = x^3 - 2x + 7$$

1°) $$\begin{aligned} y + \Delta y &= (x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 7 \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 7. \end{aligned}$$

2°) $$\begin{array}{rl} y + \Delta y &= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 7 \\ y &= x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2x \qquad\quad + 7 \\ \hline \Delta y &= \qquad 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \qquad - 2 \cdot \Delta x. \end{array}$$

3°) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2.$$

4°) $$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2. \text{ Réponse.}$$

Ou $$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x + 7) = 3x^2 - 2.$$

EXEMPLE III. — Différentier $\frac{c}{x^2}$.

Solution. Posons $$y = \frac{c}{x^2}.$$

1°) $$y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2}.$$

2°) $$\begin{array}{rl} y + \Delta y &= \frac{c}{(x + \Delta x)^2} \\ y &= \frac{c}{x^2} \\ \hline \Delta y &= \frac{c}{(x + \Delta x)^2} - \frac{c}{x^2} = \frac{-c \cdot \Delta x(2x + \Delta x)}{x^2(x + \Delta x)^2}. \end{array}$$

3°) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -c \cdot \frac{2x + \Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2}.$$

4°) $$\frac{dy}{dx} = -c \cdot \frac{2x}{x^2 \cdot (x)^2} = -\frac{2c}{x^3}. \text{ Réponse.}$$

Ou $$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x^2}\right) = -\frac{2c}{x^3}.$$

EXEMPLES

Appliquer la *Règle générale* pour différentier les fonctions suivantes :

1. $y = 3x^2$. *Rép.* $\frac{dy}{dx} = 6x$.

2. $y = x^2 + 2$. $\frac{dy}{dx} = 2x$.

3. $y = 5 - 4x$. *Rép.* $\frac{dy}{dx} = -4$.

4. $s = 2t^2 - 4$. $\frac{ds}{dt} = 4t$.

5. $y=\frac{1}{x}$. *Rép.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$.

6. $y=\frac{x+2}{x}$. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x^2}$.

7. $y=x^3$. $\frac{dy}{dx}=3x^2$.

8. $y=2x^2-3$. $\frac{dy}{dx}=4x$.

9. $y=1-2x^3$. *Rép.* $\frac{dy}{dx}=-6x^2$.

10. $\rho=a\theta^2$. $\frac{d\rho}{d\theta}=2a\theta$.

11. $y=\frac{2}{x^2}$. $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^3}$.

12. $y=\frac{3}{x^2-1}$. $\frac{dy}{dx}=-\frac{6x}{(x^2-1)^2}$.

13. $y=7x^2+x$.
14. $s=at^2-2bt$.
15. $r=8t+3t^2$.
16. $y=\frac{3}{x^2}$.
17. $s=-\frac{a}{2t+3}$.
18. $y=bx^3-cx$.
19. $\rho=3\theta^3-2\theta^2$.
20. $y=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x$.
21. $y=\frac{x^2-5}{x}$.
22. $\rho=\frac{\theta^2}{1+\theta}$.
23. $y=\frac{1}{2}x^2+2x$.
24. $z=4x-3x^2$.
25. $\rho=3\theta+\theta^2$.
26. $y=\frac{ax+b}{x^2}$.
27. $z=\frac{x^3+2}{x}$.

28. $y=x^2-3x+6$. *Rép.* $y'=2x-3$.
29. $s=2t^2+5t-8$. $s'=4t+5$.
30. $\rho=5\theta^3-2\theta+6$. $\rho'=15\theta^2-2$.
31. $y=ax^2+bx+c$. $y'=2ax+b$.

32. Applications de la dérivée à la Géométrie. — Nous allons maintenant considérer un théorème qui est fondamental dans toutes les applications du Calcul différentiel à la Géométrie. Soit

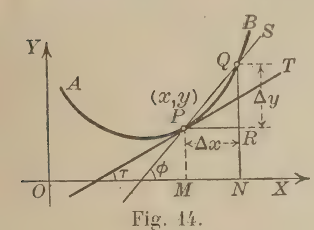


Fig. 14.

$$\text{(A)} \qquad y=f(x)$$

l'équation d'une courbe AB (*fig.* 14).

Différentions (A), d'après la *Règle générale* et interprétons chaque opération géométriquement.

1re opération. $y+\Delta y=f(x+\Delta x) \qquad =\text{NQ}$

2e opération. $y+\Delta y=f(x+\Delta x) \qquad =\text{NQ}$

$y \qquad\qquad =f(x) \qquad =\text{MP}=\text{NR}$

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\text{RQ}.$

3e opération. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\text{RQ}}{\text{MN}}=\frac{\text{RQ}}{\text{PR}}$

$=\operatorname{tg}\widehat{\text{RPQ}}=\operatorname{tg}\varphi$

$=$ pente de la sécante PQ.

4e opération. $\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

(B) $\qquad =\frac{dy}{dx}=$ valeur de la dérivée au point P.

Mais si nous faisons $\Delta x \doteq 0$, le point Q se déplacera le long de la courbe et s'approchera de plus en plus près de P : la sécante tournera autour de P et tendra vers la tangente comme position limite. Nous avons donc également

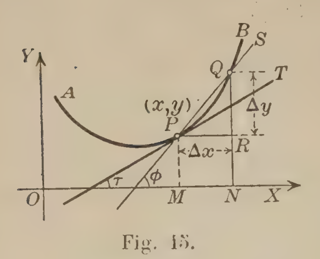


Fig. 15.

$$\underset{\Delta x = 0}{\text{limite}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x = 0}{\text{limite}} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \tau$$

(C) $\quad$ = pente de la tangente au point P.

Par suite, d'après (B) et (C),

$$\frac{dy}{dx} = \text{pente de la tangente PT.}$$

Par conséquent :

Théorème. — *La valeur de la dérivée en un point quelconque d'une courbe est égale à la pente de la tangente à la courbe en ce point.*

C'est ce problème de la tangente qui a conduit Leibnitz (*) à la découverte du calcul différentiel.

Exemple. — Trouver les pentes des tangentes à la parabole $y = x^2$, au sommet et au point où $x = \frac{1}{2}$.

Solution. En différentiant d'après la *Règle générale,* nous obtenons

(A) $\frac{dy}{dx} = 2x$ = pente de la tangente en un point *quelconque* de la courbe.

Pour trouver la pente de la tangente au sommet, nous substituons $x = 0$ dans (A), ce qui donne $\frac{dy}{dx} = 0$.

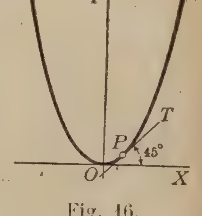


Fig. 16.

Par suite, la tangente au sommet a une pente nulle, c'est-à-dire qu'elle est parallèle à l'axe des x, et dans le cas qui nous occupe, elle coïncide avec lui.

Pour trouver la pente de la tangente au point P où x est égale à $\frac{1}{2}$, substituons dans (A) ; nous obtenons $\frac{dy}{dx} = 1$, c'est-à-dire que la tangente au point P fait un angle de 45° (*fig.* 16) avec l'axe des x.

(*) Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) est né à Leipzig. Ses facultés remarquables se manifestèrent par des recherches originales dans différentes branches du savoir. Il fut le premier à publier ses découvertes en Analyse dans un court essai publié dans le périodique *Acta Eruditorum*, à Leipzig, en 1684. On sait cependant que les manuscrits de Newton sur les Fluxions existaient déjà et quelques-uns disent que Leibnitz en tira les idées nouvelles. De nos jours, on pense que Newton et Leibnitz inventèrent l'Analyse chacun de leur côté. La notation employée aujourd'hui fut introduite par Leibnitz.

EXEMPLES

Trouver par différentiation les pentes des tangentes aux courbes ci-après, aux points indiqués. Vérifier chaque résultat en construisant la courbe et sa tangente.

1. $y = x^2 - 4$,	au point où $x = 2$.	*Rép.* 4.
2. $y = 6 - 3x^2$,	au point où $x = 1$.	-6.
3. $y = x^3$,	au point où $x = -1$.	3.
4. $y = \frac{2}{x}$,	au point où $x = -2$.	$-\frac{1}{2}$.
5. $y = x - x^2$,	au point où $x = 0$.	1.
6. $y = \frac{1}{x-1}$,	au point où $x = 3$.	$-\frac{1}{4}$.
7. $y = \frac{1}{2}x^2$,	au point où $x = 4$.	4.
8. $y = x^2 - 2x + 3$,	au point où $x = 1$.	0.
9. $y = 9 - x^2$,	au point où $x = -3$.	6.

10. Trouver la pente de la tangente à la courbe $y = 2x^3 - 6x + 5$, (*a*) au point où $x = 1$; (*b*) au point où $x = 0$. *Réponse : (a)* 0 ; (*b*) -6.

11. (*a*) Trouver les pentes des tangentes aux deux courbes $y = 3x^2 - 1$ et $y = 2x^2 + 3$, à leurs points d'intersection. (*b*) Sous quel angle se coupent-elles ?

Réponse : (*a*) ± 12, ± 8 ; (*b*) arc tg $\frac{4}{97}$.

12. Les courbes d'une ligne de chemin de fer ont généralement une forme parabolique. Supposons qu'une voie ferrée ait la forme de la parabole $y = x^2$ (*fig.* 16), les directions OX et OY étant respectivement l'Est et le Nord et l'unité de mesure, le kilomètre. Si un train se dirige vers l'Est quand il passe par O, dans quelle direction ira-t-il :

(*a*) Quand il sera à $\frac{1}{2}$ kilomètre à l'Est de OY ? *Rép.* Nord-Est.

(*b*) Quand il sera à $\frac{1}{2}$ kilomètre à l'Ouest de OY ? *Rép.* Sud-Est.

(*c*) Quand il sera à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ kilomètres à l'Est de OY ? *Rép.* Nord 30° E.

(*d*) Quand il sera à $\frac{1}{12}$ de kilomètre au Nord de OX ? *Rép.* E. 30° S. ou E. 30° N.

13. La route suivie par une voiture a la forme de la parabole cubique $y = x^3$. Supposons les mêmes directions et unités que dans l'exemple précédent. Si la voiture va vers l'Ouest quand elle passe par O, dans quelle direction ira-t-elle :

(*a*) Quand elle sera à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ kilomètre Est de OY ? *Rép.* Sud-Ouest.

(*b*) Quand elle sera à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ kilomètre Ouest de OY ? *Rép.* Sud-Ouest.

(*c*) Quand elle sera à $\frac{1}{2}$ kilomètre Nord de OX ? *Rép.* S. 27° 43′ Ouest.

(*d*) Quand elle sera à 2 kilomètres Sud de OX ?

(*e*) Quand elle sera équidistante de OX et de OY ?

CHAPITRE V

RÈGLES POUR DIFFÉRENTIER LES FORMES ÉLÉMENTAIRES CLASSIQUES

33. Importance de la Règle générale. — La *Règle générale* pour différentier, donnée dans le chapitre précédent, p. 33, est fondamentale parce qu'elle est tirée directement de la définition de la dérivée et il est très important que le lecteur soit parfaitement familiarisé avec elle. Cependant, on a trouvé trop lent ou trop pénible, en général, le procédé qui consiste à l'appliquer à des exemples. Aussi, pour faciliter le travail de différentiation, des règles spéciales ont été déduites de la *Règle générale* pour différentier certaines formes classiques qui se rencontrent fréquemment.

On a trouvé commode d'exprimer ces règles spéciales au moyen de formules, dont une liste suit. Le lecteur ne doit pas seulement se souvenir de chaque formule toute trouvée, mais il doit encore être capable d'exprimer la règle correspondante.

Dans ces formules, u, v et w désignent des quantités *variables* qui sont des fonctions de x et sont différentiables.

FORMULES DE DIFFÉRENTIATION.

I $$\frac{dc}{dx} = 0.$$

II $$\frac{dx}{dx} = 1.$$

III $$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

IV $$\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}.$$

V $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

VI $$\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}.$$

VI *a* $$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

VII $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

VII *a* $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{c}.$$

VIII $$\frac{d}{dx}(\log_a v) = \log_a e \cdot \frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

VIII *a* $$\frac{d}{dx}(\log v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

IX $$\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \log a \frac{dv}{dx}$$

IX *a* $$\frac{d}{dx}(e^v) = e^v\frac{dv}{dx}.$$

X $$\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \log u \cdot u^v\frac{dv}{dx}$$

XI $$\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v\frac{dv}{dx}.$$

XII $$\frac{d}{dx}(\cos v) = -\sin v\frac{dv}{dx}.$$

XIII $$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} v) = \sec^2 v\frac{dv}{dx}.$$

XIV $$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} v) = -\operatorname{cosec}^2 v\frac{dv}{dx}.$$

XV $$\frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \operatorname{tg} v\frac{dv}{dx}.$$

XVI $$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} v) = -\operatorname{cosec} v \operatorname{cotg} v\frac{dv}{dx}.$$

XVII $$\frac{d}{dx}(\sin\operatorname{vers} v) = \sin v\frac{dv}{dx}$$

XVIII $$\frac{d}{dx}(\text{arc sin } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

XIX $$\frac{d}{dx}(\text{arc cos } v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}}$$

XX $$\frac{d}{dx}(\text{arc tg } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{1 + v^2}.$$

XXI $$\frac{d}{dx}(\text{arc cotg } v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1 + v^2}.$$

XXII $$\frac{d}{dx}(\text{arc sec } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2 - 1}}.$$

XXIII $$\frac{d}{dx}(\text{arc cosec } v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2 - 1}}.$$

XXIV $$\frac{d}{dx}(\text{arc sin vers } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{2v - v^2}}.$$

XXV $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$ y étant une fonction de v.

XXVI $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$ y étant une fonction de x.

34. Différentiation d'une constante. — Une fonction qui conserve la même valeur pour toute valeur de la variable indépendante est une constante et nous pouvons la désigner par

$$y = c.$$

Quand x prend un accroissement Δx, la fonction ne change pas de valeur, c'est-à-dire que $\Delta y = 0$ et $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Mais $$\lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx} = 0.$$

I $$\frac{dc}{dx} = 0.$$

La dérivée d'une constante est nulle.

35. Différentiation d'une variable par rapport à elle-même.

Soit $$y = x.$$

En appliquant la *Règle générale*, p. 33, nous avons :

1° $$y + \Delta y = x + \Delta x.$$

2° $$\Delta y = \Delta x.$$

3° $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

4° $$\frac{dy}{dx} = 1.$$

II $$\frac{dx}{dx} = 1.$$

La dérivée d'une variable par rapport à elle-même est l'unité.

36. Différentiation d'une somme.

Soit $$y = u + v - w.$$

D'après la *Règle générale*, nous avons :

1° $$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w.$$

2° $$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

3° $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

4° $$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

[En appliquant le théorème I, p. 20.]

III $$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

De même, pour la somme algébrique de tout nombre fini de fonctions.

La dérivée de la somme algébrique d'un nombre fini de fonctions est égale à la somme algébrique de leurs dérivées.

37. Différentiation du produit d'une constante par une fonction.

Soit $$y = cv.$$

D'après la *Règle générale,* nous avons

1° $$y + \Delta y = c(v + \Delta v) = cv + c\Delta v.$$

2° $$\Delta y = c \cdot \Delta v.$$

3° $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

4° $$\frac{dy}{dx} = c\frac{dv}{dx}.$$

[En appliquant le théorème II, p. 20.]

IV $$\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}.$$

La dérivée du produit d'une constante par une fonction est égale au produit de la constante par la dérivée de la fonction.

38. Différentiation du produit de deux fonctions.

Soit $$y = uv.$$

D'après la *Règle générale,* nous avons

1° $$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

ou, en effectuant les multiplications indiquées,

$$y + \Delta y = uv + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

2° $$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \Delta v.$$

3° $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

4° $$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

[En appliquant le théorème II, p. 20, puisque quand Δx tend vers zéro, il en est de même de Δu et de $\left(\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$.]

V $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

La dérivée du produit de deux fonctions est égale au produit de la première fonction par la dérivée de la seconde plus le produit de la seconde fonction par la dérivée de la première.

39. Différentiation du produit d'un nombre fini quelconque de fonctions. — En divisant les deux membres de la formule **V** par uv, cette formule prend la forme

$$\frac{\frac{d}{dx}(uv)}{uv} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} + \frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

Si nous avons le produit de n fonctions,

$$y = v_1 v_2 \cdots v_n,$$

nous pouvons écrire

$$\frac{\frac{d}{dx}(v_1 v_2 \cdots v_n)}{v_1 v_2 \cdots v_n} = \frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\frac{d}{dx}(v_2 v_3 \cdots v_n)}{v_2 v_3 \cdots v_n}$$

$$= \frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\frac{dv_2}{dx}}{v_2} + \frac{\frac{d}{dx}(v_3 v_4 \cdots v_n)}{v_3 v_4 \cdots v_n}$$

$$= \frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\frac{dv_2}{dx}}{v_2} + \frac{\frac{dv_3}{dx}}{v_3} + \cdots + \frac{\frac{dv_n}{dx}}{v_n}.$$

En multipliant les deux membres par $v_1 v_2 \cdots v_n$, nous obtenons

$$\frac{d}{dx}(v_1 v_2 \cdots v_n) = (v_2 v_3 \cdots v_n)\frac{dv_1}{dx} + (v_1 v_3 \cdots v_n)\frac{dv_2}{dx} + \cdots + (v_1 v_2 \cdots v_{n-1})\frac{dv_n}{dx}.$$

La dérivée du produit d'un nombre fini de fonctions est égale à la somme de tous les produits qui peuvent être formés en multipliant la dérivée de chaque fonction par toutes les autres fonctions.

40. Différentiation d'une fonction dont l'exposant est une constante. — Si, dans le résultat qui précède, chacun des n facteurs est égal à v, nous obtenons

$$\frac{\frac{d}{dx}(v^n)}{v^n} = n\,\frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

VI $$\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}.$$

Quand $v = x$, ce résultat devient

VI*a* $$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Nous avons démontré la formule **VI**, seulement dans le cas où n est un nombre entier et positif. Au § 46, nous montrerons que cette formule est vraie pour toute valeur de n et nous nous servirons, dès maintenant, de ce résultat général.

La dérivée d'une fonction dont l'exposant est une constante est égale au produit de l'exposant par la fonction dont l'exposant est diminué d'une unité et par la dérivée de la fonction.

41. Différentiation d'un quotient.

Soit $$y = \frac{u}{v}, \qquad v \neq 0.$$

D'après la *Règle générale*, nous avons

1° $$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

2° $$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

3° $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

4° $$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

(En appliquant les théorèmes II et III, p. 20.)

VII $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

La dérivée d'une fraction est égale au dénominateur multiplié par la dérivée du numérateur moins le numérateur multiplié par

la dérivée du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.

Quand le dénominateur est une constante, faisons $v = c$ dans **VII**, nous obtenons

VII a $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{c}.$$

$$\left(\text{Puisque } \frac{dv}{dx} = \frac{dc}{dx} = 0.\right)$$

Nous pouvons aussi obtenir **VII a** comme il suit, en partant de **IV** :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{c}.$$

La dérivée du quotient d'une fonction par une constante est égale à la dérivée de la fonction divisée par la constante.

Toutes les fonctions algébriques explicites d'une variable indépendante peuvent être différentiées en suivant les règles que nous avons établies jusqu'ici.

EXEMPLES (*)

Différentier les fonctions suivantes :

1. $y = x^3$.

Solution. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$. *Rép.* d'après VI *a*

[$n = 3$.]

2. $y = ax^4 - bx^2$.

Solution. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^4 - bx^2) = \frac{d}{dx}(ax^4) - \frac{d}{dx}(bx^2)$ d'après III

$= a\frac{d}{dx}(x^4) - b\frac{d}{dx}(x^2)$ d'après IV

$= 4ax^3 - 2bx$. *Rép.* d'après VI *a*

3. $y = x^{\frac{4}{3}} + 5$.

Solution. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{4}{3}}\right) + \frac{d}{dx}(5)$ d'après III

$= \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$. *Rép.* d'après VI *a* et I

(*) Dans l'étude de la différentiation, le lecteur devra s'exercer à différentier oralement les fonctions simples.

4. $y = \frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{7x}{\sqrt[3]{x^4}} + 8\sqrt[7]{x^3}$.

Solution. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3x^{\frac{13}{5}}\right) - \frac{d}{dx}\left(7x^{-\frac{1}{3}}\right) + \frac{d}{dx}\left(8x^{\frac{3}{7}}\right)$ d'après III

$= \frac{39}{5}x^{\frac{8}{5}} + \frac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{24}{7}x^{-\frac{4}{7}}$. *Rép.* d'après IV et VI *a*

5. $y = (x^2 - 3)^5$.

Solution. $\frac{dy}{dx} = 5(x^2 - 3)^4 \frac{d}{dx}(x^2 - 3)$ d'après VI

$(v = x^2 - 3 \text{ et } n = 5)$

$\frac{dy}{dx} = 5(x^2 - 3)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 - 3)^4$. *Réponse.*

Nous aurions pu développer cette fonction d'après le théorème du binome et appliquer ensuite III, etc., mais le procédé ci-dessus est préférable.

6. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Solution. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(a^2 - x^2)$ d'après VI

$[v = a^2 - x^2, \text{ et } n = \tfrac{1}{2}.]$

$= \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. *Rép.*

7. $y = (3x^2 + 2)\sqrt{1 + 5x^2}$.

Solution. $\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 2)\frac{d}{dx}(1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}} + (1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x^2 + 2)$ d'après V

$\left[u = 3x^2 + 2, \text{ et } v = (1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}}.\right]$

$= (3x^2 + 2)\frac{1}{2}(1 + 5x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1 + 5x^2)$

$+ (1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}} 6x$ d'après VI, etc.

$= (3x^2 + 2)(1 + 5x^2)^{-\frac{1}{2}} 5x + 6x(1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{5x(3x^2 + 2)}{\sqrt{1 + 5x^2}} + 6x\sqrt{1 + 5x^2} = \frac{45x^3 + 16x}{\sqrt{1 + 5x^2}}$. *Rép.*

8. $y = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Solution. $\frac{dy}{dx} = \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(a^2 + x^2) - (a^2 + x^2)\frac{d}{dx}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 - x^2}$ d'après VII

$= \frac{2x(a^2 - x^2) + x(a^2 + x^2)}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

[En multipliant le numérateur et le dénominateur par $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.]

$\frac{dy}{dx} = \frac{3a^2x - x^3}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$. *Réponse.*

9. $y = 5x^4 + 3x^2 - 6.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 20x^3 + 6x.$

10. $y = 3cx^2 - 8fx + 5e.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 6cx - 8f.$

11. $y = x^{a+b}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = (a+b)x^{a+b-1}.$

12. $y = x^n + nx + n.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1} + n.$

13. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5.$ $\qquad f'(x) = 2x^2 - 3x.$

14. $f(x) = (a+b)x^2 + cx + d.$ $\qquad f'(x) = 2(a+b)x + c.$

15. $\dfrac{d}{dx}(a + bx + cx^2) = b + 2cx.$

16. $\dfrac{d}{dy}(5y^m - 3y + 6) = 5my^{m-1} - 3.$

17. $\dfrac{d}{dx}(2x^{-2} + 3x^{-3}) = -4x^{-3} - 9x^{-4}.$

18. $\dfrac{d}{ds}(3s^{-4} - s) = -12s^{-5} - 1.$

19. $\dfrac{d}{dx}\left(4x^{\frac{1}{2}} + x^2\right) = 2x^{-\frac{1}{2}} + 2x.$

20. $\dfrac{d}{dy}\left(y^{-2} - 4y^{-\frac{1}{2}}\right) = -2y^{-3} + 2y^{-\frac{3}{2}}.$

21. $\dfrac{d}{dx}(2x^3 + 5) = 6x^2.$

22. $\dfrac{d}{dt}(3t^5 - 2t^2) = 15t^4 - 4t.$

23. $\dfrac{d}{d\theta}(a\theta^4 + b\theta) = 4a\theta^3 + b.$

24. $\dfrac{d}{d\alpha}\left(5 - 2\alpha^{\frac{3}{2}}\right) = -3\alpha^{\frac{1}{2}}.$

25. $\dfrac{d}{dt}\left(9t^{\frac{5}{3}} + t^{-1}\right) = 15t^{\frac{3}{2}} - t^{-2}.$

26. $\dfrac{d}{dx}(2x^{12} - x^9) = 24x^{11} - 9x^8.$

27. $r = c\theta^3 + d\theta^2 + e\theta.$ $\qquad r' = 3c\theta^2 + 2d\theta + e.$

28. $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}.$ $\qquad y' = 21x^{\frac{5}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}.$

29. $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}.$ $\qquad y' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x^2}.$

30. $y = \dfrac{a + bx + cx^2}{x}.$ $\qquad y' = c - \dfrac{a}{x^2}.$

31. $y = \dfrac{(x-1)^3}{x^{\frac{1}{3}}}.$ $\qquad y' = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.$

32. $y = \dfrac{x^{\frac{5}{2}} - x - x^{\frac{1}{2}} + a}{x^{\frac{3}{2}}}.$ $\qquad y' = \dfrac{2x^{\frac{5}{2}} + x + 2x^{\frac{1}{2}} - 3a}{2x^{\frac{5}{2}}}.$

33. $y = (2x^3 + x^2 - 5)^3.$ $\qquad y' = 6x(3x+1)(2x^3 + x^2 - 5)^2.$

34. $f(x) = (a + bx^2)^{\frac{5}{4}}.$ $\qquad f'(x) = \dfrac{5bx}{2}(a + bx^2)^{\frac{1}{4}}.$

35. $f(x) = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2).$ $\qquad f'(x) = 4x(1 + 3x + 10x^3).$

36. $f(x) = (a + x)\sqrt{a - x}.$ $\qquad f'(x) = \dfrac{a - 3x}{2\sqrt{a - x}}.$

37. $f(x) = (a+x)^m(b+x)^n$. $\qquad f'(x) = (a+x)^m(b+x)^n\left[\dfrac{m}{a+x} + \dfrac{n}{b+x}\right]$

38. $y = \dfrac{1}{x^n}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

39. $y = x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^4 + a^2x^2 - 4x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

40. Différentier les fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{d}{dx}(2x^3 - 4x + 6)$. $\qquad$ (e) $\dfrac{d}{dt}(b + at^2)^{\frac{1}{2}}$. $\qquad$ (i) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)$.

(b) $\dfrac{d}{dt}(at^7 + bt^5 - 9)$. $\qquad$ (f) $\dfrac{d}{dx}(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}$. $\qquad$ (j) $\dfrac{d}{dt}(5 + 2t)^{\frac{9}{2}}$.

(c) $\dfrac{d}{d\theta}\left(3\theta^{\frac{3}{2}} - 2\theta^{\frac{1}{2}} + 6\theta\right)$. $\qquad$ (g) $\dfrac{d}{d\varphi}\left(4 - \varphi^{\frac{2}{5}}\right)$. $\qquad$ (k) $\dfrac{d}{ds}\sqrt{a + b\sqrt{s}}$.

(d) $\dfrac{d}{dx}(2x^3 + x)^{\frac{5}{3}}$. $\qquad$ (h) $\dfrac{d}{dt}\sqrt{1 + 9t^2}$. $\qquad$ (l) $\dfrac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{5}{3}}\right)$.

41. $y = \dfrac{2x^4}{b^2 - x^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8b^2x^3 - 4x^5}{(b^2 - x^2)^2}$.

42. $y = \dfrac{a-x}{a+x}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2a}{(a+x)^2}$.

43. $s = \dfrac{t^3}{(1+t)^2}$. $\qquad \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3t^2 + t^3}{(1+t)^3}$.

44. $f(s) = \dfrac{(s+4)^2}{s+3}$. $\qquad f'(s) = \dfrac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$.

45. $f(\theta) = \dfrac{\theta}{\sqrt{a - b\theta^2}}$. $\qquad f'(\theta) = \dfrac{a}{(a - b\theta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

46. $F(r) = \sqrt{\dfrac{1+r}{1-r}}$. $\qquad F'(r) = \dfrac{1}{(1-r)\sqrt{1-r^2}}$.

47. $\psi(y) = \left(\dfrac{y}{1-y}\right)^m$. $\qquad \psi'(y) = \dfrac{my^{m-1}}{(1-y)^{m+1}}$.

48. $\varphi(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1+x^2}}$. $\qquad \varphi'(x) = \dfrac{1 + 4x^2}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

49. $y = \sqrt{2px}$. $\qquad y' = \dfrac{p}{y}$.

50. $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. $\qquad y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

51. $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. $\qquad y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

52. $r = \sqrt{a\varphi + c\sqrt{\varphi^3}}$. $\qquad r' = \dfrac{\sqrt{a} + 3c\varphi}{2\sqrt{\varphi}}$.

53. $u = \dfrac{v^c + v^d}{cd}$. $\qquad u' = \dfrac{v^{c-1}}{d} + \dfrac{v^{d-1}}{c}$.

54. $p = \dfrac{(q+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{q-1}}$. $\qquad p' = \dfrac{(q-2)\sqrt{q+1}}{(q-1)^{\frac{3}{2}}}$.

55. Différentier les fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\right)$. (d) $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{ay^2}{b+y^3}\right)$. (g) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^3}{1+x^4}\right)$. (e) $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{a^2-s^2}{\sqrt{a^2+s^2}}\right)$. (h) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)$. (f) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\sqrt{4-2x^3}}{x}$. (i) $\dfrac{d}{dt}\sqrt{\dfrac{1+t^2}{1-t^2}}$.

42. Différentiation d'une fonction de fonction. — Il arrive quelquefois que y, au lieu d'être définie directement comme fonction de x, est donnée comme fonction d'une autre variable v, qui est définie comme fonction de x. Dans ce cas, y est une fonction de x par l'intermédiaire de v et elle est appelée une *fonction de fonction.*

Par exemple, si $\qquad y = \dfrac{2v}{1-v^2}$

et $\qquad v = 1 - x^2$,

y est une fonction de fonction.

En éliminant v, nous pouvons exprimer y directement comme fonction de x, mais, en général, ce procédé n'est pas le meilleur quand on désire trouver $\dfrac{dy}{dx}$.

Si $y = f(v)$ et $v = \varphi(x)$, y est alors une fonction de x par l'intermédiaire de v. Par suite, quand nous donnons à x un accroissement Δx, v prendra un accroissement Δv et y prendra également un accroissement correspondant Δy. Dans cette hypothèse, appliquons simultanément la *Règle générale* aux deux fonctions

$$y = f(v) \quad \text{et} \quad v = \varphi(x).$$

1° $y + \Delta y = f(v + \Delta v)$ $\qquad v + \Delta v = \varphi(x + \Delta x)$

2° $y + \Delta y = f(v + \Delta v)$ $\qquad v + \Delta v = \varphi(x + \Delta x)$

$y = f(v)$ $\qquad v = \varphi(x)$

$\Delta y = f(v + \Delta v) - f(v)$. $\qquad \Delta v = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$

3° $\dfrac{\Delta y}{\Delta v} = \dfrac{f(v+\Delta v) - f(v)}{\Delta v}$, $\qquad \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = \dfrac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$.

Les membres de gauche fournissent une expression du rapport de l'accroissement de chaque fonction à l'accroissement de la variable correspondante, et les membres de droite expriment les mêmes rapports sous une autre forme. Avant de passer à la limite, formons le produit de ces deux rapports, en utilisant à cet effet les formes des membres de gauche.

Nous obtenons ainsi

$$\frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}, \qquad \text{qui est égal à } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ce que l'on écrit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

4° En passant à la limite, il vient

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}, \qquad \text{(Théor. II, p. 20)}$$

ce que l'on peut également écrire

$$\text{(B)} \qquad \frac{dy}{dx} = f'(v) \cdot \phi'(x).$$

Si $y = f(v)$ et $v = \varphi(x)$, la dérivée de y par rapport à x est égale au produit de la dérivée de y par rapport à v par la dérivée de v par rapport à x.

43. Différentiation des fonctions inverses. — Soit y une fonction de x donnée par la relation

$$y = f(x).$$

Dans le cas des fonctions considérées dans cet ouvrage, on peut ordinairement résoudre cette équation par rapport à x, ce qui donne

$$x = \varphi(y),$$

c'est-à-dire considérer y comme la variable indépendante et x comme la variable dépendante. Dans ce cas,

$$f(x) \quad \text{et} \quad \varphi(y)$$

sont dites des *fonctions inverses*.

Quand on veut distinguer entre les deux, il est d'usage d'appeler la

première, *fonction directe*, et la seconde, *fonction inverse*. Ainsi, dans les exemples qui suivent, si les seconds membres de la première colonne sont considérés comme fonctions directes, les membres correspondants de la deuxième colonne seront respectivement leurs fonctions inverses.

$$y = x^2 + 1, \qquad x = \pm\sqrt{y - 1}.$$
$$y = a^x, \qquad x = \log_a y.$$
$$y = \sin x, \qquad x = \text{arc} \sin y.$$

Différentions maintenant simultanément, d'après la *Règle générale*, les fonctions inverses

$$y = f(x) \qquad \text{et} \qquad x = \varphi(y).$$

1° $y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad x + \Delta x = \varphi(y + \Delta y)$

2° $y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad x + \Delta x = \varphi(y + \Delta y)$

$\underline{y \qquad = f(x)}, \qquad \underline{x \qquad = \varphi(y)}$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)$

3° $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y}.$

En faisant le produit des membres de gauche de ces relations, nous obtenons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1,$$

ou

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

4° En passant à la limite,

(C) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}},$$

ou

(D) $$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

La dérivée de la fonction inverse est égale à l'inverse de la dérivée de la fonction directe.

44. Différentiation d'un logarithme. — Soit

$$y = \log_a v \,(*).$$

(*) Le lecteur ne doit pas oublier que cette fonction n'est définie que pour les valeurs positives la base a et de la variable v.

Différentions d'après la *Règle générale*, p. 33, en considérant v comme la variable indépendante, nous avons

1° $$y+\Delta y=\log_a(v+\Delta v).$$

2° $$\Delta y=\log_a(v+\Delta v)-\log_a v\,(*)$$

$$=\log_a\left(\frac{v+\Delta v}{v}\right)=\log_a\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right).$$

(D'après 8, p. 1.)

3° $$\frac{\Delta y}{\Delta v}=\frac{1}{\Delta v}\log_a\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)=\log_a\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{1}{\Delta v}}$$

$$=\frac{1}{v}\log_a\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{v}{\Delta v}}.$$

[En divisant le logarithme par v et en multipliant, en même temps, l'exposant de la parenthèse par v, on change la forme de l'expression, mais non sa valeur (voir 9, p. 1).]

4° $$\frac{dy}{dv}=\frac{1}{v}\log_a e.$$

[Quand Δv tend vers zéro, $\frac{\Delta v}{v}$ tend aussi vers 0. Par conséquent, $\underset{\Delta v=0}{\text{limite}}\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{v}{\Delta v}}=e$, d'après le § 23 de la p. 24, en posant $x=\frac{\Delta v}{v}$.]

Par suite,

(A) $$\frac{dy}{dv}=\frac{d}{dv}\left(\log_a v\right)=\log_a e\cdot\frac{1}{v}.$$

Puisque v est une fonction de x et qu'il s'agit de différentier $\log_a v$ par rapport à x, nous devons faire usage de la formule (A), § 42, relative à la différentiation d'une *fonction de fonction*, savoir :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

En substituant la valeur de $\frac{dy}{dv}$ tirée de (A), nous obtenons

$$\frac{dy}{dx}=\log_a e\cdot\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

(*) Si nous effectuons les troisième et quatrième opérations de la *Règle générale* sans transformer le membre de droite, nous avons

3° opération. $$\frac{\Delta y}{\Delta v}=\frac{\log_a(v+\Delta v)-\log_a v}{\Delta v}.$$

4° opération. $$\frac{dy}{dv}=\frac{0}{0},$$ qui est indéterminée.

Par suite, la valeur limite du membre de droite dans la 3° opération ne peut être trouvée par substitution directe et la transformation ci-dessus est nécessaire.

VIII $$\frac{d}{dx}(\log_a v) = \log_a e \cdot \frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

Quand $a = e$, $\log_a e = \log_e e = 1$, et **VIII** devient

VIII *a* $$\frac{d}{dx}(\log v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

La dérivée du logarithme d'une fonction est égale au produit du module (*) *du système de logarithmes par la dérivée de la fonction divisé par la fonction.*

45. Différentiation de la fonction exponentielle simple.

Soit $$y = a^v, \qquad a > 0.$$

En prenant les logarithmes des deux membres dans le système de base e, nous obtenons

$$\log y = v \log a,$$

ou

$$v = \frac{\log y}{\log a}$$

$$= \frac{1}{\log a} \cdot \log y.$$

Différentions par rapport à y, d'après la formule **VIII** *a*,

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{y};$$

et d'après (C), § 43, concernant les fonctions inverses, nous obtenons

$$\frac{dy}{dv} = \log a \cdot y,$$

ou

(A) $$\frac{dy}{dv} = \log a \cdot a^v.$$

Puisque v est une fonction de x et qu'il s'agit de différentier a^v

(*) Le logarithme de e par rapport à une base quelconque a ($= \log_a e$) est appelé le *module* du système dont la base est a. On montre en Algèbre qu'on peut trouver le logarithme d'un nombre N dans un système de base quelconque a, au moyen de la formule

$$\log_a N = \log_a e \log_e N = \frac{\log_e N}{\log_e a}.$$

Le module des logarithmes décimaux de Briggs est

$$\log_{10} e = 0{,}434294\ldots$$

par rapport à x, nous devons faire usage de la formule (A), § 42, relative à la différentiation d'une *fonction de fonction,* savoir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

En substituant la valeur de $\frac{dy}{dv}$ tirée de (A), nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} = \log a \cdot a^v \cdot \frac{dv}{dx}.$$

IX $$\frac{d}{dx}(a^v) = \log a \cdot a^v \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Quand $a = e$, $\log a = \log e = 1$, et **IX** devient

IX *a* $$\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}.$$

La dérivée d'une constante ayant une variable comme exposant est égale au produit du logarithme naturel de la constante par la fonction exponentielle donnée et par la dérivée de l'exposant.

46. Différentiation de la fonction exponentielle générale.

Soit $$y = u^v\ (*).$$

En prenant les logarithmes des deux membres dans le système de base e, nous avons

$$\log_e y = v \log_e u,$$

ou $$y = e^{v \log u}.$$

En différentiant d'après la formule **IX *a***, il vient

$$\frac{dy}{dx} = e^{v \log u} \frac{d}{dx}(v \log u)$$

$$= e^{v \log u}\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \log u \frac{dv}{dx}\right) \qquad \text{d'après } \mathbf{V}$$

$$= u^v\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \log u \frac{dv}{dx}\right).$$

X $$\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \log u \cdot u^v \frac{dv}{dx}.$$

(*) u ne peut prendre ici que des valeurs positives.

La dérivée d'une fonction à exposant variable est égale à la somme des deux résultats obtenus en différentiant d'abord d'après **VI**, *en considérant l'exposant comme une constante, et en différentiant de nouveau d'après* **IX**, *en considérant la fonction comme une constante.*

Soit $v = n$ une constante quelconque. La formule **X** se réduit alors à

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Mais ce résultat est la formule différentiée au § 40. Par conséquent, la formule **VI** est vraie pour une valeur quelconque de n.

Exemple I. — Différentier $y = \log(x^2 + a)$.

Solution.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + a)}{x^2 + a} \quad \text{d'après VIII } a$$

$$[v = x^2 + a.]$$

$$= \frac{2x}{x^2 + a}. \quad \textit{Rép.}$$

Exemple II. — Différentier $y = \log\sqrt{1 - x^2}$.

Solution.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{d'après VIII } a$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{d'après VI}$$

$$= \frac{x}{x^2 - 1}. \quad \textit{Rép.}$$

Exemple III. — Différentier $y = a^{3x^2}$.

Solution.

$$\frac{dy}{dx} = \log a \cdot a^{3x^2}\frac{d}{dx}(3x^2) \quad \text{d'après IX}$$

$$= 6x \log a \cdot a^{3x^2}. \quad \textit{Rép.}$$

Exemple IV. — Différentier $y = be^{c^2 + x^2}$.

Solution.

$$\frac{dy}{dx} = b\frac{d}{dx}(e^{c^2 + x^2}) \quad \text{d'après IV}$$

$$= be^{c^2 + x^2}\frac{d}{dx}(c^2 + x^2) \quad \text{d'après IX } a$$

$$= 2bxe^{c^2 + x^2}. \quad \textit{Rép.}$$

EXEMPLE V. — Différentier $y = x^{e^x}$.

Solution. $$\frac{dy}{dx} = e^x x^{e^x - 1}\frac{d}{dx}(x) + x^{e^x}\log x \frac{d}{dx}(e^x)$$ d'après X

$$= e^x x^{e^x - 1} + x^{e^x}\log x \cdot e^x$$

$$= e^x x^{e^x}\left(\frac{1}{x} + \log x\right). \textit{ Rép.}$$

47. Différentiation logarithmique. — Au lieu d'appliquer tout de suite les formules VIII et VIII *a* pour différentier les fonctions logarithmiques, on peut quelquefois simplifier le travail en utilisant d'abord une des formules 7-10, page 1. Ainsi, l'exemple 2 ci-dessus peut être résolu de la façon suivante :

EXEMPLE I. — Différentier $y = \log\sqrt{1 - x^2}$.

Solution. En utilisant le n° 10, p. 1, nous pouvons écrire le membre de droite sans radical, de la façon suivante :

$$y = \frac{1}{2}\log(1 - x^2).$$

Alors $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dx}(1 - x^2)}{1 - x^2},$$ d'après VIII *a* ;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{x}{x^2 - 1}. \textit{ Réponse.}$$

EXEMPLE II. — Différentier $y = \log\sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$.

Solution. En simplifiant au moyen du n° 10 et du n° 8, p. 1, nous avons

$$y = \tfrac{1}{2}[\log(1 + x^2) - \log(1 - x^2)].$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{d}{dx}(1 + x^2)}{1 + x^2} - \frac{\frac{d}{dx}(1 - x^2)}{1 - x^2}\right]$$ d'après VIII *a*, etc.

$$= \frac{x}{1 + x^2} + \frac{x}{1 - x^2} = \frac{2x}{1 - x^4}. \textit{ Rép.}$$

Pour différentier une fonction exponentielle, en particulier une variable à exposant variable, la meilleure méthode est de prendre d'abord le logarithme de la fonction et de différentier ensuite. Ainsi, l'exemple V, p. 56, est solutionné de façon plus élégante comme il suit :

EXEMPLE III. — Différentier $y = x^{e^x}$.

Solution. En prenant les logarithmes des deux membres, il vient

$$\log y = e^x \log x, \qquad \text{d'après 9, p. 1.}$$

Différentions maintenant les deux membres par rapport à x :

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = e^x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(e^x) \qquad \text{d'après VIII et V}$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot e^x,$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot y\left(\frac{1}{x} + \log x\right)$$

$$= e^x x^{e^x}\left(\frac{1}{x} + \log x\right). \quad \textit{Rép.}$$

Exemple IV. — Différentier $y = (4x^2 - 7)^{2+\sqrt{x^2-5}}$.

Solution. Prenons les logarithmes des deux membres, nous avons

$$\log y = \left(2 + \sqrt{x^2 - 5}\right) \log (4x^2 - 7).$$

En différentiant par rapport à x, il vient

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(2 + \sqrt{x^2 - 5}\right)\frac{8x}{4x^2 - 7} + \log (4x^2 - 7) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = x(4x^2 - 7)^{2+\sqrt{x^2-5}}\left[\frac{8\left(2 + \sqrt{x^2 - 5}\right)}{4x^2 - 7} + \frac{\log (4x^2 - 7)}{\sqrt{x^2 - 5}}\right]. \quad \textit{Rép.}$$

Dans le cas d'une fonction composée d'un grand nombre de facteurs, il est quelquefois commode de prendre les logarithmes avant de différentier. Ainsi :

Exemple V. — Différentier $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$.

Solution. En prenant les logarithmes des deux membres, nous avons

$$\log y = \frac{1}{2}\left[\log (x-1) + \log (x-2) - \log (x-3) - \log (x-4)\right].$$

Différentions des deux côtés par rapport à x, il vient

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right]$$

$$= -\frac{2x^2 - 10x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^2 - 10x - 11}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{\frac{3}{2}}(x-4)^{\frac{3}{2}}}. \quad \textit{Rép.}$$

EXEMPLES

Différentier les fonctions suivantes :

1. $y = \log(x + a)$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x + a}$.

2. $y = \log(ax + b)$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{ax + b}$.

3. $y = \log \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{1 - x^4}$.

4. $y = \log(x^2 + x)$. $\qquad y' = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x}$.

5. $y = \log(x^3 - 2x + 5)$. $\qquad y' = \dfrac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 5}$.

6. $y = \log_a(2x + x^3)$. $\qquad y' = \log_a e \cdot \dfrac{2 + 3x^2}{2x + x^3}$.

7. $y = x \log x$. $\qquad y' = \log x + 1$.

8. $f(x) = \log x^3$. $\qquad f'(x) = \dfrac{3}{x}$.

9. $f(x) = \log^3 x$. $\qquad f'(x) = \dfrac{3 \log^2 x}{x}$.

Note. — $\log^3 x = (\log x)^3$. Utiliser d'abord la formule VI, $v = \log x$, $n = 3$; et ensuite la formule VIII a.

10. $f(x) = \log \dfrac{a + x}{a - x}$. $\qquad f'(x) = \dfrac{2a}{a^2 - x^2}$.

11. $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$. $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

12. $\dfrac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$.

13. $\dfrac{d}{dx} e^{4x + 5} = 4e^{4x + 5}$.

14. $\dfrac{d}{dx} a^{3x} = 3a^{3x} \log a$.

15. $\dfrac{d}{dt} \log(3 - 2t^2) = \dfrac{4t}{2t^2 - 3}$.

16. $\dfrac{d}{dy} \log \dfrac{1 + y}{1 - y} = \dfrac{2}{1 - y^2}$.

17. $\dfrac{d}{dx} e^{b^2 + x^2} = 2xe^{b^2 + x^2}$.

18. $\dfrac{d}{d\theta} a^{\log \theta} = \dfrac{1}{\theta} a^{\log \theta} \log a$.

19. $\dfrac{d}{ds} b^{s^2} = 2s \log b \cdot b^{s^2}$.

20. $\dfrac{d}{dv} ae^{\sqrt{v}} = \dfrac{ae^{\sqrt{v}}}{2\sqrt{v}}$.

21. $\dfrac{d}{dx} a^{e^x} = \log a \cdot a^{e^x} \cdot e^x$.

22. $y = 7^{x^2 + 2x}$. $\qquad y' = 2 \log 7 \cdot (x + 1) 7^{x^2 + 2x}$.

23. $y = c^{a^2 - x^2}$. $\qquad y' = -2x \log c \cdot c^{a^2 - x^2}$.

24. $y = \log \dfrac{e^x}{1 + e^x}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

25. $\dfrac{d}{dx}\left[e^x(1 - x^2)\right] = e^x(1 - 2x - x^2)$.

26. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$.

27. $\dfrac{d}{dx}(x^2 e^{ax}) = xe^{ax}(ax + 2)$.

28. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$

29. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$

30. $y = x^n a^x.$ $\qquad y' = a^x x^{n-1}(n + x \log a).$

31. $y = x^x.$ $\qquad y' = x^x(\log x + 1).$

32. $y = x^{\frac{1}{x}}.$ $\qquad y' = \frac{x^{\frac{1}{x}}(1 - \log x)}{x^2}.$

33. $y = x^{\log x}.$ $\qquad y' = \log x^2 \cdot x^{\log x - 1}.$

34. $f(y) = \log y \cdot e^y.$ $\qquad f'(y) = e^y\left(\log y + \frac{1}{y}\right).$

35. $f(s) = \frac{\log s}{e^s}.$ $\qquad f'(s) = \frac{1 - s \log s}{se^s}.$

36. $f(x) = \log(\log x).$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x \log x}.$

37. $F(x) = \log^4(\log x).$ $\qquad F'(x) = \frac{4 \log^3(\log x)}{x \log x}.$

38. $\varphi(x) = \log(\log^4 x).$ $\qquad \varphi'(x) = \frac{4}{x \log x}.$

39. $\psi(y) = \log\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$ $\qquad \psi'(y) = \frac{1}{1 - y^2}.$

40. $f(x) = \log\frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}.$ $\qquad f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1 + x^2}}.$

NOTE. — Rendre d'abord le dénominateur rationnel.

41. $y = x^{\frac{1}{\log x}}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 0.$

42. $y = e^{x^x}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = e^{x^x}(1 + \log x)x^x.$

43. $y = \frac{c^x}{x^x}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{c}{x}\right)^x\left(\log\frac{c}{x} - 1\right).$

44. $y = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = n\left(\frac{x}{n}\right)^{xn}\left(1 + \log\frac{x}{n}\right).$

45. $w = v^{e^v}.$ $\qquad \frac{dw}{dv} = v^{e^v}e^v\left(\frac{1 + v \log v}{v}\right).$

46. $z = \left(\frac{a}{t}\right)^t.$ $\qquad \frac{dz}{dt} = \left(\frac{a}{t}\right)^t(\log a - \log t - 1).$

47. $y = x^{x^n}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = x^{x^n + n - 1}(n \log x + 1).$

48. $y = x^{x^x}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = x^{x^x}x^x\left(\log x + \log^2 x + \frac{1}{x}\right)$

49. $y = a^{\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{xy \log a}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

50. Différentier les fonctions suivantes :

(a) $\frac{d}{dx}x^2\log x$. (f) $\frac{d}{dx}e^x\log x$. (k) $\frac{d}{dx}\log(a^x+b^x)$.

(b) $\frac{d}{dx}(e^{2x}-1)^4$. (g) $\frac{d}{dx}x^3 3^x$. (l) $\frac{d}{dx}\log_{10}(x^2+5x)$.

(c) $\frac{d}{dx}\log\frac{3x+1}{x+3}$. (h) $\frac{d}{dx}\frac{1}{x\log x}$. (m) $\frac{d}{dx}\frac{2+x^2}{e^{3x}}$.

(d) $\frac{d}{dx}\log\frac{1-x^2}{\sqrt{1+x}}$. (i) $\frac{d}{dx}\log x^3\sqrt{1+x^2}$. (n) $\frac{d}{dx}(x^2+a^2)e^{x^2+a^2}$.

(e) $\frac{d}{dx}x^{\sqrt{x}}$. (j) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)^x$. (o) $\frac{d}{dx}(x^2+4)^x$.

51. $y=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$. $\frac{dy}{dx}=-\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$.

Note. — Dans cet exemple et dans les suivants, prendre les logarithmes des deux membres avant de différentier.

52. $y=\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{(x-2)^{\frac{3}{4}}(x-3)^{\frac{7}{3}}}$. $\frac{dy}{dx}=-\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}(7x^2+30x-97)}{12(x-2)^{\frac{7}{4}}(x-3)^{\frac{10}{3}}}$.

53. $y=x\sqrt{1-x}(1+x)$. $\frac{dy}{dx}=\frac{2+x-5x^2}{2\sqrt{1-x}}$.

54. $y=\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

55. $y=x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$. $\frac{dy}{dx}=5x^4(a+3x)^2(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$.

48. Différentiation de sin v.

Soit
$$y=\sin v.$$

D'après la *Règle générale*, p. 33, en considérant v comme variable indépendante, nous avons :

1° $$y+\Delta y=\sin(v+\Delta v),$$

2° $$\Delta y=(\sin v+\Delta v)-\sin v\ (*),$$

(*) Si nous effectuons les 3e et 4e opérations sans transformer le membre de droite, nous obtenons les résultats suivants :

3e opération. $\frac{\Delta y}{\Delta v}=\frac{\sin(v+\Delta v)-\sin v}{\Delta v}$.

4e opération. $\frac{dy}{dv}=\frac{0}{0}$, qui est indéterminé (voir le renvoi de la page 52).

$$= 2\cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta v}{2} \cdot \text{(*)}$$

3°
$$\frac{\Delta y}{\Delta v} = \cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{\Delta v}{2}}{\frac{\Delta v}{2}}\right).$$

4°
$$\frac{dy}{dv} = \cos v.$$

[Parce que $\lim_{\Delta v = 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta v}{2}}{\frac{\Delta v}{2}}\right) = 1$, d'après le § 22, p. 23 et que $\lim_{\Delta v = 0} \cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right) = \cos v$.]

Puisque v est une fonction de x et qu'il s'agit de différentier $\sin v$ par rapport à x, nous devons utiliser la formule (A), § 42, relative à la différentiation d'une *fonction de fonction*, savoir :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

En substituant la valeur $\frac{dy}{dv}$ tirée de 4°, nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} = \cos v \frac{dv}{dx}.$$

XI
$$\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v \frac{dv}{dx}.$$

L'énoncé des règles correspondant aux formules trouvées sera désormais laissé aux soins du lecteur.

49. Différentiation de $\cos v$.

Soit
$$y = \cos v.$$

D'après la formule n° 29, p. 2, cette égalité peut s'écrire

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right).$$

(*) Soit $A = v + \Delta v$ et $B = v$.

Additionnant, $A + B = 2v + \Delta v$. Retranchant $A - B = \Delta v$.

Par suite, $\frac{1}{2}(A + B) = v + \frac{\Delta v}{2}$. $\frac{1}{2}(A - B) = \frac{\Delta v}{2}$.

En substituant ces valeurs de A, B, $\frac{1}{2}(A + B)$, $\frac{1}{2}(A - B)$ en fonction de v et de Δv dans la formule trigonométrique (42, p. 2),

$$\sin A - \sin B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A + B)\sin\tfrac{1}{2}(A - B),$$

nous obtenons
$$\sin(v + \Delta v) - \sin v = 2\cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right)\sin\frac{\Delta v}{2}.$$

En différentiant d'après la formule **XI**, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\left(-\frac{dv}{dx}\right) = -\sin v\frac{dv}{dx}.$$

[Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v$, d'après 29, p. 2.]

XII $$\frac{d}{dx}(\cos v) = -\sin v\frac{dv}{dx}.$$

50. Différentiation de tg *v*.

Soit $$y = \operatorname{tg} v.$$

D'après la formule n° 27, p. 2, cette égalité peut s'écrire

$$y = \frac{\sin v}{\cos v}.$$

En différentiant par la formule **VII**, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos v\frac{d}{dx}(\sin v) - \sin v\frac{d}{dx}(\cos v)}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{\cos^2 v\frac{dv}{dx} + \sin^2 v\frac{dv}{dx}}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{\frac{dv}{dx}}{\cos^2 v} = \sec^2 v\frac{dv}{dx}.$$

XIII $$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} v) = \sec^2 v\frac{dv}{dx}.$$

51. Différentiation de cotg *v*.

Posons $$y = \operatorname{cotg} v.$$

D'après la formule n° 26, p. 2, cette égalité peut s'écrire

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg} v}.$$

En différentiant d'après la formule **VII**, il vient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} v)}{\operatorname{tg}^2 v}$$

$$= -\frac{\sec^2 v \frac{dv}{dx}}{\operatorname{tg}^2 v} = -\operatorname{cosec}^2 v \frac{dv}{dx}.$$

XIV $$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} v) = -\operatorname{cosec}^2 v \frac{dv}{dx}.$$

52. Différentiation de $\sec v$.

Soit $$y = \sec v.$$

D'après la formule 26, p. 2, cette égalité peut s'écrire

$$y = \frac{1}{\cos v}.$$

En différentiant d'après la formule **VII**, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}(\cos v)}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{\sin v \frac{dv}{dx}}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{1}{\cos v} \frac{\sin v}{\cos v} \frac{dv}{dx}$$

$$= \sec v \operatorname{tg} v \frac{dv}{dx}.$$

XV $$\frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \operatorname{tg} v \frac{dv}{dx}.$$

53. Différentiation de $\operatorname{cosec} v$.

Soit $$y = \operatorname{cosec} v.$$

D'après la formule n° 26, p. 2, cette égalité peut s'écrire

$$y = \frac{1}{\sin v}.$$

En différentiant d'après la formule **VII**, il vient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}(\sin v)}{\sin^2 v}$$

$$= -\frac{\cos v \frac{dv}{dx}}{\sin^2 v}$$

$$= -\operatorname{cosec} v \operatorname{cotg} v \frac{dv}{dx}.$$

XVI $$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} v) = -\operatorname{cosec} v \operatorname{cotg} v \frac{dv}{dx}.$$

54. Différentiation de sin vers v. (*)

Soit $$y = \sin \operatorname{vers} v.$$

D'après la trigonométrie, cette égalité peut s'écrire

$$y = 1 - \cos v.$$

En différentiant, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \sin v \frac{dv}{dx}.$$

XVII $$\frac{d}{dx}(\sin \operatorname{vers} v) = \sin v \frac{dv}{dx}.$$

Dans l'établissement des formules que nous avons trouvées jusqu'ici, il n'a été nécessaire d'appliquer la *Règle générale*, p. 33 (c'est-à-dire les quatre opérations), que pour les formules ci-après :

III $$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$ Somme algébrique.

V $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$ Produit.

VII $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$ Quotient.

(*) *Sinus verse*, partie du rayon comprise entre le pied du sinus et l'extrémité de l'arc. *Cosinus verse*, diamètre diminué du sinus verse.

VIII $$\frac{d}{dx}(\log_a v) = \log_a e \frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$ Logarithme.

XI $$\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v \frac{dv}{dx}.$$ Sinus.

XXV $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$ Fonction de fonction.

XXVI $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$ Fonctions inverses.

Non seulement toutes les autres formules que nous avons établies dépendent de celles qui précèdent, mais encore toutes celles que nous établirons à l'avenir en dépendront également. D'où il suit que la dérivation des formules fondamentales relatives à la différentiation comprend seulement le calcul de deux limites relativement faciles, savoir :

$$\underset{v=0}{\text{limite}} \frac{\sin v}{v} = 1,$$ d'après § 22, p. 23.

et

$$\underset{v=0}{\text{limite}} (1+v)^{\frac{1}{v}} = e,$$ d'après § 23, p. 24.

EXEMPLES

Différentier les fonctions suivantes :

1. $y = \sin ax^2$.

$$\frac{dy}{dx} = \cos ax^2 \frac{d}{dx}(ax^2)$$ d'après XI

$[v = ax^2.]$

$$= 2ax \cos ax^2.$$

2. $y = \operatorname{tg} \sqrt{1-x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 \sqrt{1-x} \frac{d}{dx}(1-x)^{\frac{1}{2}}$$ d'après XIII

$[v = \sqrt{1-x}.]$

$$= \sec^2 \sqrt{1-x} \cdot \tfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)$$

$$= -\frac{\sec^2 \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}.$$

3. $y = \cos^3 x$.

Cette égalité peut s'écrire également

$$y = (\cos x)^3.$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\cos x)^2 \frac{d}{dx}(\cos x) \quad \text{d'après VI}$$

$$(v = \cos x \quad \text{et} \quad n = 3)$$

$$= 3\cos^2 x(-\sin x) \quad \text{d'après XII}$$

$$= -3\sin x \cos^2 x.$$

4. $y = \sin nx \sin^n x$.

$$\frac{dy}{dx} = \sin nx \frac{d}{dx}(\sin x)^n + \sin^n x \frac{d}{dx}(\sin nx) \quad \text{d'après V}$$

$$[u = \sin nx \quad \text{et} \quad v = \sin^n x.]$$

$$= \sin nx \cdot n(\sin x)^{n-1} \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin^n x \cos nx \frac{d}{dx}(nx) \quad \text{d'après VI et XI}$$

$$= n \sin nx \cdot \sin^{n-1} x \cos x + n \sin^n x \cos nx$$

$$= n \sin^{n-1} x (\sin nx \cos x + \cos nx \sin x)$$

$$= n \sin^{n-1} x \sin (n+1)x.$$

5. $y = \sec ax$. *Rép.* $\frac{dy}{dx} = a \sec ax \operatorname{tg} ax$.

6. $y = \operatorname{tg}(ax + b)$. $\frac{dy}{dx} = a \sec^2 (ax + b)$.

7. $s = \cos 3ax$. $\frac{ds}{dx} = -3a \sin 3ax$.

8. $s = \operatorname{cotg}(2t^2 + 3)$. $\frac{ds}{dt} = -4t \operatorname{cosec}^2 (2t^2 + 3)$.

9. $f(y) = \sin 2y \cos y$. $f'(y) = 2\cos 2y \cos y - \sin 2y \sin y$.

10. $F(x) = \operatorname{cotg}^2 5x$. $F'(x) = -10 \operatorname{cotg} 5x \operatorname{cosec}^2 5x$.

11. $F(\theta) = \operatorname{tg} \theta - \theta$. $F'(\theta) = \operatorname{tg}^2 \theta$.

12. $f(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$. $f'(\varphi) = \varphi \cos \varphi$.

13. $f(t) = \sin^3 t \cos t$. $f'(t) = \sin^2 t (3\cos^2 t - \sin^2 t)$.

14. $r = a \cos 2\theta$. $\frac{dr}{d\theta} = -2a \sin 2\theta$.

15. $\frac{d}{dx} \sin^2 x = \sin 2x$.

16. $\frac{d}{dx} \cos^3 x^2 = -6x \cos^2 x^2 \sin x^2$.

17. $\frac{d}{dt} \operatorname{cosec} \frac{t^2}{2} = -t \operatorname{cosec} \frac{t^2}{2} \operatorname{cotg} \frac{t^2}{2}$.

18. $\frac{d}{ds} a\sqrt{\cos 2s} = -\frac{a \sin 2s}{\sqrt{\cos 2s}}$.

19. $\frac{d}{d\theta} a(1 - \cos \theta) = a \sin \theta$.

20. $\frac{d}{dx}(\log \cos x) = -\operatorname{tg} x$.

21. $\frac{d}{dx}(\log \operatorname{tg} x) = \frac{2}{\sin 2x}$.

22. $\frac{d}{dx}(\log \sin^2 x) = 2 \operatorname{cotg} x$.

23. $\frac{d}{dt} \cos \frac{a}{t} = \frac{a}{t^2} \sin \frac{a}{t}$.

24. $\frac{d}{d\theta} \sin \frac{1}{\theta^2} = -\frac{2}{\theta^3} \cos \frac{1}{\theta^2}$.

25. $\frac{d}{dx}e^{\sin x} = e^{\sin x}\cos x.$

26. $\frac{d}{dx}\sin(\log x) = \frac{\cos(\log x)}{x}.$

27. $\frac{d}{dx}\operatorname{tg}(\log x) = \frac{\sec^2(\log x)}{x}.$

28. $\frac{d}{dx}a\sin^3\frac{\theta}{3} = a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}.$

29. $\frac{d}{d\alpha}\sin(\cos\alpha) = -\sin\alpha\cos(\cos\alpha).$

30. $\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{tg}x - 1}{\sec x} = \sin x + \cos x.$

31. $y = \log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}.$

32. $y = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}.$

33. $f(x) = \sin(x+a)\cos(x-a).$ $\quad f'(x) = \cos 2x.$

34. $y = a^{\operatorname{tg} nx}.$ $\quad y' = na^{\operatorname{tg} nx}\sec^2 nx \log a.$

35. $y = e^{\cos x}\sin x.$ $\quad y' = e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x).$

36. $y = e^x \log\sin x.$ $\quad y' = e^x(\operatorname{cotg} x + \log\sin x).$

37. Différentier les fonctions suivantes :

(a) $\frac{d}{dx}\sin 5x^2.$ (f) $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}(\log x).$ (k) $\frac{d}{dt}e^{a-b\cos t}.$

(b) $\frac{d}{dx}\cos(a - bx).$ (g) $\frac{d}{dx}\sin^3 2x.$ (l) $\frac{d}{dt}\sin\frac{t}{3}\cos^2\frac{t}{3}.$

(c) $\frac{d}{dx}\operatorname{tg}\frac{ax}{b}.$ (h) $\frac{d}{dx}\cos^2(\log x).$ (m) $\frac{d}{d\theta}\operatorname{cotg}\frac{b}{\theta^2}.$

(d) $\frac{d}{dx}\operatorname{cotg}\sqrt{ax}.$ (i) $\frac{d}{dx}\operatorname{tg}^2\sqrt{1-x^2}.$ (n) $\frac{d}{d\varphi}\sqrt{1+\cos^2\varphi}.$

(e) $\frac{d}{dx}\sec e^{3x}.$ (j) $\frac{d}{dx}\log(\sin^2 ax).$ (o) $\frac{d}{ds}\log\sqrt{1-2\sin^2 s}.$

38. $\frac{d}{dx}(x^n e^{\sin x}) = x^{n-1}e^{\sin x}(n + x\cos x).$

39. $\frac{d}{dx}(e^{ax}\cos mx) = e^{ax}(a\cos mx - m\sin mx).$

40. $f(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}.$ $\quad f'(\theta) = -\frac{2\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}.$

41. $f(\varphi) = \frac{e^{a\varphi}(a\sin\varphi - \cos\varphi)}{a^2+1}.$ $\quad f'(\varphi) = e^{a\varphi}\sin\varphi.$

42. $f(s) = (s\operatorname{cotg} s)^2.$ $\quad f'(s) = 2s\operatorname{cotg} s(\operatorname{cotg} s - s\operatorname{cosec}^2 s).$

43. $r = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\theta - \operatorname{tg}\theta + \theta.$ $\quad \frac{dr}{d\theta} = \operatorname{tg}^4\theta.$

44. $y = x^{\sin x}.$ $\quad \frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \log x\cos x\right).$

45. $y = (\sin x)^x.$ $\quad y' = (\sin x)^x[\log\sin x + x\operatorname{cotg} x].$

46. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$ $\quad y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}(1 + \sec^2 x\log\sin x).$

47. Démontrer que $\frac{d}{dx}\cos v = -\sin v\frac{dv}{dx}$, en utilisant la *Règle générale.*

48. Démontrer que $\frac{d}{dx}\operatorname{cotg} v = -\operatorname{cosec}^2 v\frac{dv}{dx}$, en remplaçant cotg v par $\frac{\cos v}{\sin v}$.

55. Différentiation de arc sin v.

Soit $$y = \text{arc} \sin v \text{ (*)}.$$

Alors $$v = \sin y.$$

En différentiant par rapport à y d'après la formule XI, on obtient

$$\frac{dv}{dy} = \cos y;$$

par suite, $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\cos y},$$ d'après (C), p. 51.

Mais puisque v est une fonction de x, ce résultat peut être substitué dans

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}, \qquad \text{(A), p. 50}$$

ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{dv}{dx}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

[$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-v^2}$, le signe positif étant pris devant le radical puisque $\cos y$ est positif pour toutes les valeurs de y comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ inclusivement.]

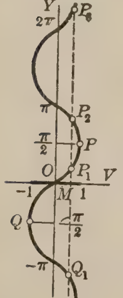


Fig. 17.

XVIII $$\frac{d}{dx}(\text{arc} \sin v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

56. Différentiation de arc cos v.

Soit $$y = \text{arc} \cos v \text{ (**)}.$$

Alors $$v = \cos y.$$

(*) Il faut se rappeler que cette fonction n'est définie que pour les valeurs de v comprises entre -1 et $+1$ inclusivement et que y (la fonction) peut prendre une infinité de valeurs, car il y a un nombre infini d'arcs dont le sinus est égal à v. Ainsi, dans la figure 17 (lieu géométrique de $y = \text{arc} \sin v$) quand $v = OM$, $y = MP_1, MP_2, MP_3, \ldots MQ_1, MQ_2, \ldots$ Dans la discussion ci-dessus, afin de ne faire prendre qu'une seule valeur à la fonction, on considère seulement les valeurs de y comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ inclusivement (points de l'arc QOP), c'est-à-dire le plus petit arc en valeur numérique (ou absolue) dont le sinus est v.

(**) Cette fonction est définie seulement pour les valeurs de v comprises entre -1 et $+1$

En différentiant par rapport à y d'après la formule **XII**, il vient

$$\frac{dv}{dy} = -\sin y;$$

par suite,
$$\frac{dy}{dv} = -\frac{1}{\sin y}.$$
D'après (C), p. 51.

Mais puisque v est une fonction de x, ce résultat peut être substitué dans la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}, \qquad \text{(A), p. 50,}$$

ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} \cdot \frac{dv}{dx}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

[$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-v^2}$, le signe positif étant pris devant le radical, puisque $\sin y$ est positif pour toutes les valeurs de y comprises entre 0 et π inclusivement.]

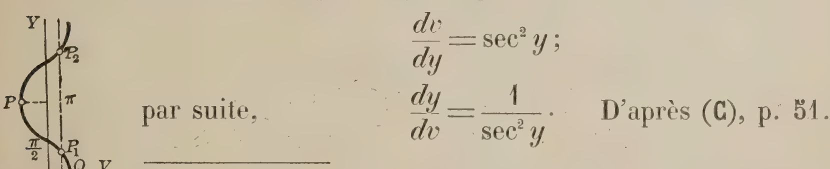
XIX $$\frac{d}{dx}(\text{arc} \cos v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

57. Différentiation de arc tg v.

Soit $$y = \text{arc tg } v \, (*).$$

Alors, $$v = \text{tg } y.$$

En différentiant par rapport à y, d'après la formule **XIV**, il vient



$$\frac{dv}{dy} = \sec^2 y;$$

par suite,
$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$
D'après (C), p. 51.

Fig. 18.

inclusivement et peut prendre une infinité de valeurs. Dans la figure 18 (lieu géométrique de $y = \text{arc} \cos v$), quand $v = \text{OM}$, $y = \text{MP}_1, \text{MP}_2, \ldots, \text{MQ}_1, \text{MQ}_2, \ldots$ Afin de ne faire prendre qu'une seule valeur à la fonction, on ne considère que les valeurs de y entre 0 et π inclusivement, c'est-à-dire le plus petit arc positif dont le cosinus est v. C'est pourquoi dans la discussion ci-dessus, nous nous limitons à l'arc QP du graphique.

(*) Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de v et elle peut prendre une infinité de valeurs ainsi qu'on peut le voir clairement par son graphique (*fig.* 19). Afin de ne lui faire prendre qu'une seule valeur, nous ne considérerons que les valeurs de y comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire le plus petit arc en valeur numérique (ou absolue) dont la tangente est v (branche AOB).

Fig. 19.

Mais, puisque v est une fonction de x, ce résultat peut être substitué dans la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}, \qquad \text{(A), p. 50,}$$

ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{1 + v^2} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$[\sec^2 y = 1 + \mathrm{tg}^2 y = 1 + v^2.]$

XX $$\frac{d}{dx}(\text{arc tg } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{1 + v^2}.$$

58. Différentiation de arc cotg v (*). — En suivant la méthode du dernier paragraphe, nous obtenons

XXI $$\frac{d}{dx}(\text{arc cotg } v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1 + v^2}.$$

59. Différentiation de arc sec v.

Soit $$y = \text{arc sec } v\,(^{**});$$

alors $$v = \sec y.$$

(*) Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de v et elle peut prendre une infinité de valeurs, comme on peut le voir par son graphique (*fig.* 20 *a*). Afin de ne lui faire prendre qu'une seule valeur, on ne considère que les valeurs de y comprises entre 0 et π, c'est-à-dire le plus petit arc positif dont la cotangente est v. C'est pourquoi dans la discussion ci-dessus nous nous limitons à la branche AB.

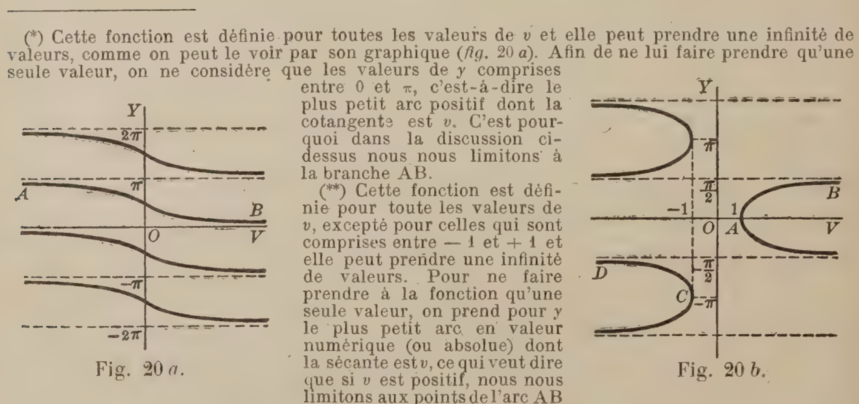


Fig. 20 *a*.

(**) Cette fonction est définie pour toute les valeurs de v, excepté pour celles qui sont comprises entre -1 et $+1$ et elle peut prendre une infinité de valeurs. Pour ne faire prendre à la fonction qu'une seule valeur, on prend pour y le plus petit arc en valeur numérique (ou absolue) dont la sécante est v, ce qui veut dire que si v est positif, nous nous limitons aux points de l'arc AB (*fig.* 20 *b*) y prenant des valeurs comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (0 peut être inclus); et si v est négatif, nous nous limitons aux points de l'arc DC, y prenant des valeurs comprises entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$ ($-\pi$ inclus).

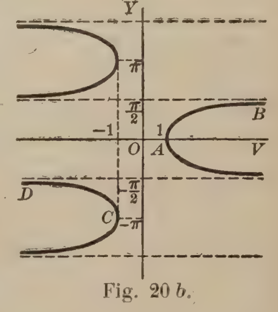


Fig. 20 *b*.

En différentiant par rapport à y, d'après la formule **XV**, on obtient

$$\frac{dv}{dy} = \sec y \operatorname{tg} y;$$

par suite,
$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\sec y \operatorname{tg} y}.$$
D'après (C), p. 50.

Mais puisque v est une fonction de x, ce résultat peut être substitué dans la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$
(A), p. 51.

ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \operatorname{tg} y} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{v\sqrt{v^2 - 1}} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

[$\sec y = v$ et $\operatorname{tg} y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{v^2 - 1}$, le signe plus étant pris devant le radical, puisque $\operatorname{tg} y$ est positif pour toutes les valeurs de y comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$, y compris 0 et $-\pi$.]

XXII $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \sec v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2 - 1}}.$$

60. Différentiation de arc cosec v(*).

Soit $$y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} v;$$

alors $$v = \operatorname{cosec} y.$$

En différentiant par rapport à y d'après la formule **XVI** et en suivant la méthode du dernier paragraphe, nous obtenons

XXIII $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \operatorname{cosec} v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2 - 1}}.$$

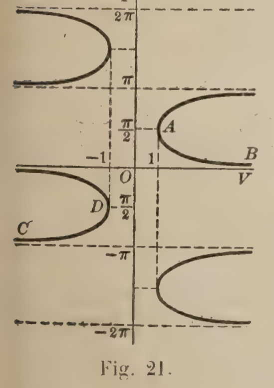


Fig. 21.

(*) Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de v, à l'exception de celles comprises entre — 1 et + 1 et elle peut prendre une infinité de valeurs. Pour ne faire prendre à la fonction qu'une seule valeur, on prend pour y le plus petit arc en valeur numérique dont la cosécante est v, ce qui veut dire que si v est positif, nous nous limitons aux points de l'arc AB (*fig.* 21), y prenant des valeurs comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2}\text{ peut être inclus}\right)$ et si v est négatif, nous nous limitons aux points de l'arc CD, y prenant des valeurs comprises entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\text{ inclus}\right)$.

61. Différentiation de arc sin vers v.

Soit $$y = \text{arc sin vers } v \ (*);$$
alors $$v = \text{sin vers } y.$$

En différentiant par rapport à y, d'après la formule **XVII**, il vient

$$\frac{dv}{dy} = \sin y;$$

par suite, $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\sin y}.$$ D'après (**C**), p. 51.

Mais, puisque v est une fonction de x, ce résultat peut être substitué dans la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$ (**A**), p. 50,

ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin y} \cdot \frac{dv}{dx}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2v - v^2}} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

[$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - (1 - \text{sin vers } y)^2} = \sqrt{2v - v^2}$, le signe plus étant pris devant le radical, puisque $\sin y$ est positif pour toutes les valeurs de y comprises entre 0 et π inclusivement.]

XXIV $$\frac{d}{dx}(\text{arc sin vers } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{2v - v^2}}.$$

EXEMPLES

Différentier les fonctions suivantes :

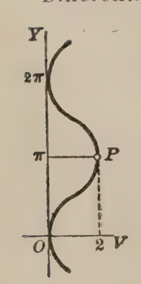


Fig. 22.

1. $y = \text{arc tg } ax^2$.

Solution. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(ax^2)}{1 + (ax^2)^2}$$ d'après XX

[$v = ax^2$.]

$$= \frac{2ax}{1 + a^2x^4}.$$

(*) Cette fonction est définie seulement pour les valeurs de v comprises entre 0 et 2 inclusivement et elle peut prendre une infinité de valeurs. Pour rendre la fonction continue, on prend pour y le plus petit arc positif dont le sinus verse est v, c'est-à-dire que y se trouve compris entre 0 et π inclusivement. C'est pourquoi nous nous limitons à l'arc OP du graphique (*fig.* 22).

2. $y = \text{arc sin}(3x - 4x^3)$.

Solution. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(3x - 4x^3)}{\sqrt{1 - (3x - 4x^3)^2}}$$ d'après XVIII

$[v = 3x - 4x^3.]$

$$= \frac{3 - 12x^2}{\sqrt{1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6}} = \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. $y = \text{arc sec}\,\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Solution. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{x^2+1}{x^2-1}\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 - 1}}$$ d'après XXII

$\left[v = \frac{x^2+1}{x^2-1}.\right]$

$$= \frac{\frac{(x^2-1)2x - (x^2+1)2x}{(x^2-1)^2}}{\frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x}{x^2-1}} = -\frac{2}{x^2+1}.$$

4. $\frac{d}{dx}\text{arc sin}\,\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

5. $\frac{d}{dx}\text{arc cotg}\,(x^2 - 5) = \frac{-2x}{1 + (x^2 - 5)^2}$.

6. $\frac{d}{dx}\text{arc tg}\,\frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2}{1 + x^2}$.

7. $\frac{d}{dx}\text{arc cosec}\,\frac{1}{2x^2 - 1} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

8. $\frac{d}{dx}\text{arc sin vers}\,2x^2 = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

9. $\frac{d}{dx}\text{arc tg}\sqrt{1 - x} = -\frac{1}{2\sqrt{1 - x}(2 - x)}$.

10. $\frac{d}{dx}\text{arc cosec}\,\frac{3}{2x} = \frac{2}{\sqrt{9 - 4x^2}}$.

11. $\frac{d}{dx}\text{arc sin vers}\,\frac{2x^2}{1 + x^2} = \frac{2}{1 + x^2}$.

12. $\frac{d}{dx}\text{arc tg}\,\frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$.

13. $\frac{d}{dx}\text{arc sin}\,\frac{x + 1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

14. $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\,\text{arc sin}\,\frac{x}{a}$. $\quad f'(x) = 2\sqrt{a^2 - x^2}$.

15. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + a\,\text{arc sin}\,\frac{x}{a}$. $\quad f'(x) = \left(\frac{a - x}{a + x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

16. $x = r\,\text{arc sin vers}\,\frac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$. $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}}$.

17. $\theta = \text{arc sin}\,(3r - 1)$. $\quad \frac{d\theta}{dr} = \frac{3}{\sqrt{6r - 9r^2}}$.

18. $\varphi = \text{arc tg}\,\frac{r + a}{1 - ar}$. $\quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{1 + r^2}$.

19. $s = \text{arc sec}\,\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$. $\quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$.

20. $\frac{d}{dx}(x\,\text{arc sin}\,x) = \text{arc sin}\,x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

21. $\frac{d}{d\theta}(\operatorname{tg}\theta \operatorname{arc}\operatorname{tg}\theta) = \sec^2\theta \operatorname{arc}\operatorname{tg}\theta + \frac{\operatorname{tg}\theta}{1+\theta^2}$.

22. $\frac{d}{dt}[\log(\operatorname{arc}\cos t)] = -\frac{1}{\operatorname{arc}\cos t\sqrt{1-t^2}}$.

23. $f(y) = \operatorname{arc}\cos(\log y)$. $\qquad f'(y) = -\frac{1}{y\sqrt{1-(\log y)^2}}$.

24. $f(\theta) = \operatorname{arc}\sin\sqrt{\sin\theta}$. $\qquad f'(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{cosec}\theta}$.

25. $f(\varphi) = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$. $\qquad f'(\varphi) = \frac{1}{2}$.

26. $p = e^{\operatorname{arc}\operatorname{tg} q}$. $\qquad \frac{dp}{dq} = \frac{e^{\operatorname{arc}\operatorname{tg} q}}{1+q^2}$.

27. $u = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{e^v - e^{-v}}{2}$. $\qquad \frac{du}{dv} = \frac{2}{e^v + e^{-v}}$.

28. $s = \operatorname{arc}\cos\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$. $\qquad \frac{ds}{dt} = -\frac{2}{e^t + e^{-t}}$.

29. $y = x^{\operatorname{arc}\sin x}$. $\qquad y' = x^{\operatorname{arc}\sin x}\left(\frac{\operatorname{arc}\sin x}{x} + \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

30. $y = e^{x^x}\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$. $\qquad y' = e^{x^x}\left[\frac{1}{1+x^2} + x^x \operatorname{arc}\operatorname{tg} x(1+\log x)\right]$.

31. $y = \operatorname{arc}\sin(\sin x)$. $\qquad y' = 1$.

32. $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{4\sin x}{3+5\cos x}$. $\qquad y' = \frac{4}{5+3\cos x}$.

33. $y = \operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{a}{x} + \log\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. $\qquad y' = \frac{2ax^2}{x^4 - a^4}$.

34. $y = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$. $\qquad y' = \frac{x^2}{1-x^4}$.

35. $y = \sqrt{1-x^2}\operatorname{arc}\sin x - x$. $\qquad y' = -\frac{x\operatorname{arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

36. Différentier les fonctions suivantes :

(a) $\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\sin 2x^2$.

(b) $\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\operatorname{tg} a^2x$.

(c) $\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\sec\frac{x}{a}$.

(d) $\frac{d}{dx}x\operatorname{arc}\cos x$.

(e) $\frac{d}{dx}x^2\operatorname{arc}\operatorname{cotg} ax$.

(f) $\frac{d}{dt}t^3\operatorname{arc}\sin\frac{t}{3}$.

(g) $\frac{d}{dt}e^{\operatorname{arc}\operatorname{tg} at}$.

(h) $\frac{d}{d\varphi}\operatorname{tg}\varphi^2\cdot\operatorname{arc}\operatorname{tg}\varphi^{\frac{1}{2}}$.

(i) $\frac{d}{d\theta}\operatorname{arc}\sin a^\theta$.

(j) $\frac{d}{d\theta}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{1+\theta^2}$.

(k) $\frac{d}{dy}\operatorname{arc}\sin\sqrt{1-y^2}$.

(l) $\frac{d}{dz}\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\log 3az)$.

(m) $\frac{d}{ds}(a^2+s^2)\operatorname{arc}\sec\frac{s}{2}$.

(n) $\frac{d}{d\alpha}\operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{2\alpha}{3}$.

(o) $\frac{d}{dt}\sqrt{1-t^2}\operatorname{arc}\sin t$.

Les formules (A), p. 50, relatives à la différentiation d'une *fonction de fonction*, et (C), p. 51, concernant la différentiation des *fonctions inverses*, ont été ajoutées

à la liste des formules du commencement de ce chapitre, respectivement sous les nos XXV et XXVI. Dans les huit exemples qui suivent, on trouvera d'abord $\frac{dy}{dv}$ et $\frac{dv}{dx}$ par différentiation, et ensuite on substituera les résultats dans

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \qquad \text{d'après XXV}$$

pour trouver $\frac{dy}{dx}$. (*)

En général, nos résultats devront être exprimés explicitement par rapport à la variable indépendante, c'est-à-dire, $\frac{dy}{dx}$ par rapport à x, $\frac{dx}{dy}$ par rapport à y, $\frac{d\varphi}{d\theta}$ par rapport à θ, etc.

37. $y = 2v^2 - 4$, $v = 3x^2 + 1$.

$\frac{dy}{dv} = 4v$; $\frac{dv}{dx} = 6x$; en substituant dans XXV,

$$\frac{dy}{dx} = 4v \cdot 6x = 24x(3x^2 + 1).$$

38. $y = \operatorname{tg} 2v$, $v = \operatorname{arc\,tg}(2x - 1)$.

$\frac{dy}{dv} = 2 \sec^2 2v$; $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$; en substituant dans XXV,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sec^2 2v}{2x^2 - 2x + 1} = 2\frac{\operatorname{tg}^2 2v + 1}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2(x - x^2)^2}.$$

$\left[\text{Puisque } v = \operatorname{arc\,tg}(2x - 1),\ \operatorname{tg} v = 2x - 1,\ \operatorname{tg} 2v = \frac{2x - 1}{2x - 2x^2}.\right]$

39. $y = 3v^2 - 4v + 5$, $v = 2x^3 - 5$. $\qquad \frac{dy}{dx} = 72x^5 - 204x^2$.

40. $y = \frac{2v}{3v - 2}$, $v = \frac{x}{2x - 1}$. $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{4}{(x - 2)^2}$.

41. $y = \log(a^2 - v^2)$, $v = a \sin x$. $\qquad \frac{dy}{dx} = -2 \operatorname{tg} x$.

42. $y = \operatorname{arc\,tg}(a + v)$, $v = e^x$. $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1 + (a + e^x)^2}$.

43. $r = e^{2s} + e^s$, $s = \log(t - t^2)$. $\qquad \frac{dr}{dt} = 4t^3 - 6t^2 + 1$.

Dans les exemples ci-après, on trouvera d'abord $\frac{dx}{dy}$ par différentiation et ensuite on substituera dans

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad \text{d'après XXVI}$$

pour trouver $\frac{dy}{dx}$.

(*) Ainsi qu'on l'a indiqué p. 49 on pourrait éliminer v entre les deux expressions données de façon à trouver y directement comme fonction de x, mais dans la plupart des cas, la méthode ci-dessus est préférable.

44. $x = y\sqrt{1+y}$. $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{1+y}}{2+3y} = \frac{2x}{2y+3y^2}$.

45. $x = \sqrt{1+\cos y}$. $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2\sqrt{1+\cos y}}{\sin y} = -\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$.

46. $x = \frac{y}{1+\log y}$. $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log y)^2}{\log y}$.

47. $x = a \log \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$. $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y\sqrt{a^2-y^2}}{a^2}$.

48. $x = r \operatorname{arc\,sin\,vers} \frac{y}{r} - \sqrt{2ry-y^2}$. $\qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r-y}{y}}$.

49. Montrer qu'au point de vue géométrique, la formule XXVI signifie que la tangente fait des angles complémentaires avec les axes de coordonnées.

62. Fonctions implicites. — Quand une relation entre x et y est donnée au moyen d'une équation *non résolue par rapport à* y, on dit que y est une *fonction implicite* de x. Par exemple, l'équation

$$x^2 - 4y = 0$$

définit y comme fonction implicite de x. Evidemment, x est également définie au moyen de cette équation comme fonction implicite de y. De même,

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

définit une quelconque des trois variables comme fonction implicite des deux autres. Il est quelquefois possible de résoudre l'équation définissant une fonction implicite par rapport à l'une des variables et de la changer ainsi en une fonction explicite. Par exemple, les deux fonctions implicites qui précèdent peuvent être résolues par rapport à y, ce qui donne

$$y = \frac{x^2}{4}$$

et

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - z^2};$$

la première relation montre y comme fonction explicite de x et la seconde comme fonction explicite de x et de z.

Cependant, dans certains cas, une telle solution peut être impossible ou trop compliquée pour être employée.

Les deux fonctions implicites utilisées pour illustrer ce paragraphe peuvent être désignées respectivement par

$$f(x, y) = 0$$

et

$$F(x, y, z) = 0.$$

63. Différentiation des fonctions implicites. — Quand y est définie comme fonction implicite de x au moyen d'une équation de la forme

(A) $$f(x, y) = 0,$$

nous avons expliqué dans le dernier paragraphe combien il peut être difficile d'obtenir y en fonction de x, c'est-à-dire de trouver y comme fonction explicite de x, de telle sorte que les formules que nous avons établies dans ce chapitre puissent être appliquées directement. Tel serait le cas, par exemple, pour l'équation

(B) $$ax^6 + 2x^3y - y^7x - 10 = 0.$$

Nous appliquons dans ce cas la règle ci-après :

Différentier en regardant y comme fonction de x et égaler le résultat à zéro (*), c'est-à-dire

(C) $$\frac{d}{dx} f(x, y) = 0.$$

Appliquons cette règle en trouvant $\frac{dy}{dx}$ d'après (B).

$$\frac{d}{dx}(ax^6 + 2x^3y - y^7x - 10) = 0; \quad \text{d'après (C)}$$

$$\frac{d}{dx}(ax^6) + \frac{d}{dx}(2x^3y) - \frac{d}{dx}(y^7x) - \frac{d}{dx}(10) = 0;$$

$$6ax^5 + 2x^3\frac{dy}{dx} + 6x^2y - y^7 - 7xy^6\frac{dy}{dx} = 0;$$

$$(2x^3 - 7xy^6)\frac{dy}{dx} = y^7 - 6ax^5 - 6x^2y;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7xy^6}.$$

Le lecteur devra observer qu'en général le résultat contiendra à la fois x et y.

(*) Ce procédé sera justifié au § 8. Seules les valeurs correspondantes de x et de y qui satisfont à l'équation donnée peuvent être substituées dans la dérivée.

EXEMPLES

Différentier les fonctions suivantes d'après la règle ci dessus :

1. $y^2 = 4px$. $\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$.

2. $x^2 + y^2 = r^2$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

3. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$.

4. $y^3 - 3y + 2ax = 0$. $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{3(1-y^2)}$.

5. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$.

6. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

7. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3b^{\frac{2}{3}}xy^{\frac{1}{3}}}{a^2}$.

8. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}$.

9. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

10. $x^y = y^x$. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy \log y}{x^2 - xy \log x}$.

11. $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{\rho}$.

12. $\rho^2 \cos\theta = a^2 \sin 3\theta$. $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{3a^2 \cos 3\theta + \rho^2 \sin\theta}{2\rho\cos\theta}$.

13. $\cos(uv) = cv$. $\frac{du}{dv} = \frac{c + u\sin(uv)}{-v\sin(uv)}$.

14. $\theta = \cos(\theta + \varphi)$. $\frac{d\theta}{d\varphi} = -\frac{\sin(\theta+\varphi)}{1 + \sin(\theta+\varphi)}$.

15. Trouver $\frac{dy}{dx}$ dans les équations suivantes :

(*a*) $x^2 = ay$.
(*b*) $x^2 + 4y^2 = 16$.
(*c*) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
(*d*) $y^2 = x^3 + a$.
(*e*) $x^2 - y^2 = 16$.
(*f*) $xy + y^2 + 4x = 0$.
(*g*) $yx^2 - y^3 = 5$.
(*h*) $x^2 - 2x^3 = y^3$.
(*i*) $x^2y^3 + 4y = 0$.
(*j*) $y^2 = \sin 2x$.
(*k*) $\operatorname{tg} x + y^3 = 0$.
(*l*) $\cos y + 3x^2 = 0$.
(*m*) $x \operatorname{cotg} y + y = 0$.
(*n*) $y^2 = \log x$.
(*o*) $e^{x^2} + 2y^3 = 0$.

16. Une piste de course a la forme du cercle $x^2 + y^2 = 2500$. Les directions OX et OY sont respectivement l'Est et le Nord et l'unité est le mètre. Si un

coureur part vers l'Est du point le plus extrême Nord, dans quelle direction courra-t-il quand il sera :

(*a*) à $25\sqrt{2}$ mètres à l'Est de OY ? *Rép.* Sud-Est ou Sud-Ouest.
(*b*) à $25\sqrt{2}$ mètres au Nord de OX ? *Rép.* Sud-Est ou Nord-Est.
(*c*) à 30 mètres à l'Ouest de OY ? *Rép.* E 36° 52′ 12″ N ou O 36° 52′ 12″ N.
(*d*) à 40 mètres au Sud de OX ?
(*e*) à 10 mètres à l'Est de OY ?

17. Le circuit parcouru par une automobile a la forme d'une ellipse dont le grand axe a 6 kilomètres de longueur et va de l'Est à l'Ouest, tandis que le petit axe a 2 kilomètres de longueur. Si une voiture part vers le Nord du point le plus extrême Est, dans quelle direction roulera-t-elle quand elle sera :

(*a*) à 2 kilomètres à l'Ouest du point de départ ?

(*b*) à $\frac{1}{2}$ kilomètre au Nord du point de départ ?

EXEMPLES DIVERS

Différentier les fonctions suivantes :

1. $\arcsin\sqrt{1-4x^2}$. *Rép.* $\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

2. xe^{x^2}. $e^{x^2}(2x^2+1)$.

3. $\log\sin\frac{v}{2}$. $\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{v}{2}$.

4. $\arccos\frac{a}{y}$. $\frac{a}{y\sqrt{y^2-a^2}}$.

5. $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

6. $\frac{x}{1+\log x}$. $\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$.

7. $\log\sec(1-2x)$. $-2\operatorname{tg}(1-2x)$.

8. x^2e^{2-3x}. $xe^{2-3x}(2-3x)$.

9. $\log\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}$. $\operatorname{cosec} t$.

10. $\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos x)}$. $\frac{1}{2}$.

11. $\operatorname{arc\,tg}\frac{2s}{\sqrt{s^2-1}}$. $\frac{2}{(1-5s^2)\sqrt{s^2-1}}$.

12. $(2x-1)\sqrt[3]{\frac{2}{1+x}}$. $\frac{7+4x}{3(1+x)}\sqrt[3]{\frac{2}{1+x}}$.

13. $\frac{x^3\arcsin x}{3}+\frac{(x^2+2)\sqrt{1-x^2}}{9}$. $x^2\arcsin x$.

14. $\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{3} + \log \sec^2 \frac{\theta}{3}$.

15. $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$.

16. $\left(\frac{3}{x}\right)^{2x}$.

17. $x^{\operatorname{tg} x}$.

18. $\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{3}{2}}}$.

19. $e^{\sec(1-3x)}$.

20. $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{1-x^2}$.

21. $\dfrac{z^2}{\cos z}$.

22. $e^{\operatorname{tg} x^2}$.

23. $\log \sin^2 \frac{1}{2}\theta$.

24. $e^{ax} \log \sin ax$.

25. $\sin^3 \varphi \cos \varphi$.

26. $\dfrac{a}{2\sqrt{(b-cx^n)^m}}$.

27. $\dfrac{m+x}{1+m^2} \cdot \dfrac{e^{m \operatorname{arc\,tg} x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

28. $\operatorname{tg}^2 x - \log \sec^2 x$.

29. $\dfrac{3 \log (2 \cos x + 3 \sin x) + 2x}{13}$.

30. $\operatorname{arc\,cotg} \frac{a}{x} + \log \sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$.

31. $(\log \operatorname{tg} 3 - x^2)^3$.

32. $\dfrac{2 - 3t^{\frac{1}{2}} + 4t^{\frac{1}{3}} + t^2}{t}$.

33. $\dfrac{(1+x)(1-2x)(2+x)}{(3+x)(2-3x)}$.

34. $\operatorname{arc\,tg} (\log 3x)$.

35. $\sqrt[3]{(b-ax^m)^n}$.

36. $\log \sqrt{(a^2-bx^2)^m}$.

37. $\log \sqrt{\dfrac{y^2+1}{y^2-1}}$.

38. $e^{\operatorname{arc\,sec} 2\theta}$.

39. $\sqrt{\dfrac{(2-3x)^3}{1+4x}}$.

40. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2-x^2}}{\cos x}$.

41. $e^x \log \sin x$.

42. $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

43. $\operatorname{arc\,tg} a^x$.

44. $a^{\sin^2 mx}$.

45. $\operatorname{cotg}^3 (\log ax)$.

46. $(1-3x^2)e^{\frac{1}{x}}$.

47. $\log \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

CHAPITRE VI

APPLICATIONS SIMPLES DE LA DÉRIVÉE

64. Direction d'une courbe. — On a montré au § 32, p. 35, que si

$$y = f(x)$$

est l'équation d'une courbe (*fig.* 23),

$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\,\tau =$ pente de la tangente à la courbe en un point quelconque P.

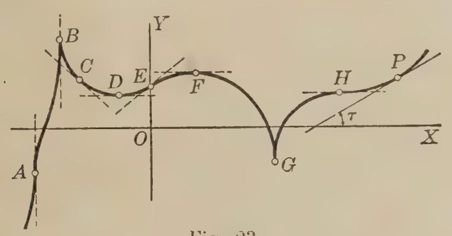


Fig. 23.

La *direction d'une courbe* en un point quelconque est définie comme étant la même que la direction de la tangente à la courbe en ce point. De cette définition, il suit immédiatement que

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\,\tau = \text{pente de la courbe en un point quelconque P.}$$

Pour un point particulier dont les coordonnées sont connues, nous écrivons

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} = \text{pente de la courbe (ou de la tangente) au point } (x_1, y_1).$$

Aux points tels que D, F, H, où la courbe (ou la tangente) est *parallèle à l'axe des x*,

$$\tau = 0^\circ; \qquad \text{par suite } \frac{dy}{dx} = 0.$$

Aux points tels que A, B, G où la courbe (ou la tangente) est *perpendiculaire à l'axe des x*,

$$\tau = 90^\circ; \quad \text{par suite } \frac{dy}{dx} = \infty.$$

Aux points tels que E, où la courbe *monte* (*),

$$\tau = \text{un angle aigu}; \quad \text{par suite } \frac{dy}{dx} = \text{un nombre positif.}$$

La courbe (ou la tangente) a une pente positive à gauche de B, entre D et F et à droite de G.

Aux points tels que C, où la courbe *descend* (*),

$$\tau = \text{un angle obtus}; \quad \text{par suite } \frac{dy}{dx} = \text{un nombre négatif.}$$

La courbe (ou la tangente) a une pente négative entre B et D, et entre F et G.

Exemple I. — Étant donné la courbe $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$ (*fig.* 24) :

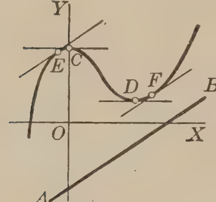


Fig. 24.

(*a*) Trouver τ quand $x = 1$.
(*b*) Trouver τ quand $x = 3$.
(*c*) Trouver les points où la courbe est parallèle à OX.
(*d*) Trouver les points où $\tau = 45^\circ$.
(*e*) Trouver les points où la courbe est parallèle à la ligne $2x - 3y = 6$ (ligne AB).

Solution. En différentiant, il vient

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x = \text{pente en un point quelconque.}$$

(*a*) $\operatorname{tg} \tau = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1$; par suite $\tau = 135^\circ$. *Rép.*

(*b*) $\operatorname{tg} \tau = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 9 - 6 = 3$; par suite $\tau = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3$. *Rép.*

(*c*) $\tau = 0^\circ$, $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = 0$; par suite $x^2 - 2x = 0$. En résolvant cette équation, nous trouvons que $x = 0$ ou 2, ce qui donne les points C et D où la courbe (ou la tangente) est parallèle à OX.

(*d*) $\tau = 45^\circ$, $\operatorname{tg} \tau = 1$; par suite $x^2 - 2x = 1$. En résolvant, nous obtenons $x = 1 \pm \sqrt{2}$, ce qui donne deux points où la pente de la courbe (ou de la tangente) est égale à l'unité.

(*e*) Pente de la ligne $= \frac{2}{3}$; par suite $x^2 - 2x = \frac{2}{3}$.

(*) Quand on se déplace de gauche à droite sur la courbe.

En résolvant, nous obtenons $x = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$, ce qui donne les points E et F où la courbe (ou la tangente) est parallèle à la ligne AB.

Puisqu'une courbe en un point quelconque a la même direction que sa tangente en ce point, l'angle de deux courbes en un point commun sera l'angle de leurs tangentes en ce point.

Exemple II. — Trouver l'angle d'intersection des cercles

(A) $$x^2 + y^2 - 4x = 1,$$

(B) $$x^2 + y^2 - 2y = 9.$$

Solution. En résolvant ces équations simultanément, nous trouvons que les points d'intersection sont (3, 2) et (1, — 2).

On tire de (A)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - x}{y}.$$ D'après § 63, p. 77.

et de (B)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - y}.$$ D'après § 63, p. 77.

Fig. 25.

$$\left[\frac{2 - x}{y}\right]_{\substack{x=3 \\ y=2}} = -\tfrac{1}{2} =$$ pente de la tangente au cercle (A) au point (3, 2).

$$\left[\frac{x}{1 - y}\right]_{\substack{x=3 \\ y=2}} = -3 =$$ pente de la tangente au cercle (B) au point (3, 2).

La formule pour trouver l'angle de deux lignes dont les pentes sont m_1 et m_2 est

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

En substituant, il vient

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{1}{2} + 3}{1 + \frac{3}{2}} = 1.$$

Par suite, $\theta = 45°$. *Réponse.*

C'est aussi l'angle d'intersection au point (1, — 2).

EXEMPLES

La figure correspondante devra être tracée dans chacun des exemples suivants :

1. Trouver la pente de $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ à l'origine. *Rép. :* $1 = \operatorname{tg} \tau$.

2. Quel angle fait la tangente à la courbe $x^2 y^2 = a^3(x + y)$ à l'origine avec l'axe des x ? *Rép. :* $\tau = 135°$.

3. Quelle est la direction dans laquelle le point engendrant le graphique de $y = 3x^2 - x$ tend à se déplacer au moment où $x = 1$? *Rép.* : Parallèlement à une ligne dont la pente est 5.

4. Montrer que $\frac{dy}{dx}$ (ou la pente) est constante pour une ligne droite.

5. Trouver les points où la courbe $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ est parallèle à l'axe des x. *Rép.* $x = 3$, $x = -1$.

6. En quel point de $y^2 = 2x^3$ la pente est-elle égale à 3 ? *Rép.* 2, 4.

7. En quel point du cercle $x^2 + y^2 = r^2$ la pente de la tangente est-elle égale à $-\frac{3}{4}$? *Rép.* $\pm\frac{3r}{5}$, $\pm\frac{4r}{5}$.

8. En quel point un mobile décrivant la parabole $y = x^2 - 7x + 3$ se déplacera-t-il parallèlement à la ligne $y = 5x + 2$? *Rép.* 6, -3.

9. Trouver les points où un mobile décrivant le cercle $x^2 + y^2 = 169$ se déplacera perpendiculairement à la ligne $5x + 12y = 60$. *Rép.* ± 12, ∓ 5.

10. Montrer que toutes les courbes du système $y = \log kx$ ont la même pente, c'est-à-dire que la pente est indépendante de k.

11. La trajectoire du projectile d'un canon décrit la parabole $y = 2x - x^2$; l'unité est le kilomètre ; OX est horizontal, OY vertical et l'origine est le point de projection. Trouver la direction du mouvement du projectile :

(*a*) à l'instant de la projection ;
(*b*) quand il atteint un rocher vertical distant de 1 kilomètre $\frac{1}{2}$.
(*c*) En quel point la trajectoire fera-t-elle un angle de 45° avec l'horizontale ?
(*d*) En quel point le projectile se déplacera-t-il horizontalement ?

Rép. (*a*) arc tg 2 ; (*b*) 135° ; (*c*) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$; (*d*) (1, 1).

12. Si, dans l'exemple précédent, le canon était situé sur le versant d'une colline incliné à 45°, sous quel angle un coup de feu tiré en l'air par ce canon atteindrait-il le versant de la colline ? *Rép.* 45°.

13. Sous quel angle une route suivant la ligne $3y - 2x - 8 = 0$ coupe-t-elle une voie de chemin de fer suivant la parabole $y^2 = 8x$? *Rép.* arc tg $\frac{1}{5}$ et arc tg $\frac{1}{8}$.

14. Trouver l'angle d'intersection de la parabole $y^2 = 6x$ et du cercle $x^2 + y^2 = 16$. *Rép.* arc tg $\frac{5}{3}\sqrt{3}$.

15. Montrer que l'hyperbole $x^2 - y^2 = 5$ et l'ellipse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ se coupent à angles droits.

16. Montrer que le cercle $x^2 + y^2 = 8ax$ et la cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$:
(*a*) sont perpendiculaires à l'origine ;
(*b*) se coupent sous un angle de 45° en deux autres points.

17. Trouver l'angle d'intersection de la parabole $x^2 = 4ay$ et de la courbe $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$. *Rép.* arc tg 3 = 71° 33',9.

18. Montrer que les tangentes au folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$ aux points où il rencontre la parabole $y^2 = ax$ sont parallèles à l'axe des y.

19. En combien de points un mobile décrivant la courbe $y = x^3 - 2x^2 + x - 4$ se déplacera-t-il parallèlement à l'axe des x ? Quels sont ces points ?

Rép. Deux ; en $(1, -4)$ et $(\frac{1}{3}, -\frac{104}{27})$.

20. Trouver l'angle sous lequel se coupent les paraboles $y = 3x^2 - 1$ et $y = 2x^2 + 3$. *Rép.* arc tg $\frac{4}{97}$.

21. Trouver la relation qui existe entre les coefficients des coniques $a_1x^2 + b_1y^2 = 1$ et $a_2x^2 + b_2y^2 = 1$ quand elles se coupent à angles droits.

Rép. $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2}$.

65. Équations de la tangente et de la normale ; longueurs de la sous-tangente et de la sous-normale. Coordonnées rectangulaires. — L'équation d'une ligne droite passant par le point (x_1, y_1) et ayant une pente m est

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$ 54, (c), p. 3.

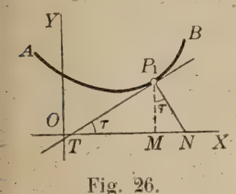


Fig. 26.

Si cette ligne est tangente à la courbe AB au point $P_1(x_1, y_1)$ (*fig.* 26), nous avons alors, d'après le § 64, p. 81,

$$m = \operatorname{tg} \tau = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x = x_1 \\ y = y_1}} = \frac{dy_1}{dx_1} (*).$$

Par suite, au point de contact $P_1(x_1, y_1)$, l'équation de la tangente TP_1 est

(1) $$\mathbf{y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1).}$$

La normale étant perpendiculaire à la tangente, sa pente est

$$-\frac{1}{m} = -\frac{dx_1}{dy_1}.$$ D'après 55, p. 3.

Et puisqu'elle passe également par le point de contact $P_1(x_1, y_1)$, nous avons pour *équation de la normale* P_1N

(2) $$\mathbf{y - y_1 = -\frac{dx_1}{dy_1}(x - x_1).}$$

(*) Cette notation signifie que nous devons d'abord trouver $\frac{dy}{dx}$ et ensuite substituer dans le résultat x_1 à x et y_1 à y. Nous avertissons le lecteur de ne pas interpréter le symbole $\frac{dy_1}{dx_1}$ comme étant *la dérivée de* y_1 *par rapport à* x_1, car cela n'aurait aucune signification, puisque x_1 et y_1 sont des constantes.

La portion de la tangente qui est interceptée entre le point de contact et OX est appelée *longueur de la tangente* (TP_1) et sa projection sur l'axe des x est appelée *longueur de la sous-tangente* (TM). De même, nous avons la *longueur de la normale* (P_1N) et la *longueur de la sous-normale* (MN).

Dans le triangle TP_1M (*fig.* 26), $\operatorname{tg}\tau = \frac{MP_1}{TM}$; par suite (*)

$$(3) \qquad TM = \frac{MP_1}{\operatorname{tg}\tau} = y_1 \frac{dx_1}{dy_1} = \text{longueur de la sous-tangente.}$$

Dans le triangle MP_1N (*fig.* 26), $\operatorname{tg}\tau = \frac{MN}{MP_1}$; par suite (**).

$$(4) \qquad MN = MP_1 \operatorname{tg}\tau = y_1 \frac{dy_1}{dx_1} = \text{longueur de la sous-normale.}$$

La longueur de la tangente (TP_1) et la longueur de la normale (P_1N) peuvent être trouvées directement d'après la figure, chacune d'elles étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont on connaît les deux côtés. Ainsi,

$$TP_1 = \sqrt{\overline{TM}^2 + \overline{MP}_1^2} = \sqrt{\left(y_1 \frac{dx_1}{dy_1}\right)^2 + (y_1)^2}$$

$$(5) \qquad = y_1 \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)^2 + 1} = \text{longueur de la tangente.}$$

$$P_1N = \sqrt{\overline{MP_1}^2 + \overline{MN}^2} = \sqrt{(y_1)^2 + \left(y_1 \frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}$$

$$(6) \qquad = y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2} = \text{longueur de la normale.}$$

Nous conseillons au lecteur d'obtenir les longueurs de la tangente et de la normale directement d'après la figure, plutôt que de faire usage des formules (5) et (6).

Quand la longueur de la sous-tangente ou de la sous-normale en un point d'une courbe est déterminée, la tangente et la normale peuvent être construites facilement.

(*) Si la sous-tangente est située à droite de T, nous la considérons comme positive; si elle est située à gauche, comme négative.

(**) Si la sous-normale est située à droite de M, nous la considérons comme positive; si elle est située à gauche, comme négative.

EXEMPLES

1. Trouver les équations de la tangente et de la normale, les longueurs de la sous-tangente, de la sous-normale, de la tangente et de la normale au point (a, a) de la cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

Solution. $$\frac{dy}{dx} = \frac{3ax^2 - x^3}{y(2a - x)^2}.$$

Par suite, $$\frac{dy_1}{dx_1} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=a\\y=a}} = \frac{3a^3 - a^3}{a(2a - a)^2} = 2 = \text{pente de la tangente.}$$

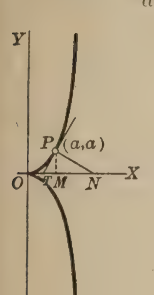


Fig. 27.

La substitution dans (1) donne

$$y = 2x - a, \text{ équation de la tangente.}$$

La substitution dans (2) donne

$$2y + x = 3a, \text{ équation de la normale.}$$

La substitution dans (3) donne

$$\text{TM} = \frac{a}{2} = \text{longueur de la sous-tangente.}$$

La substitution dans (4) donne

$$\text{MN} = 2a = \text{longueur de la sous-normale.}$$

On a également

$$\text{PT} = \sqrt{(\text{TM})^2 + (\text{MP})^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5} = \text{longueur de la tangente,}$$

et $\text{PM} = \sqrt{(\text{MN})^2 + (\text{MP})^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5} = \text{longueur de la normale.}$

2. Trouver les équations de la tangente et de la normale à l'ellipse

$$x^2 + 2y^2 - 2xy - x = 0$$

aux points où $x = 1$. *Rép.* $A(1,0)$, $2y = x - 1$, $y + 2x = 2$.
$A(1,1)$, $2y = x + 1$, $y + 2x = 3$.

3. Trouver les équations de la tangente et de la normale, les longueurs de la sous-tangente et de la sous-normale au point (x_1, y_1) du cercle $x^2 + y^2 = r^2$ (*).

Rép. $x_1x + y_1y = r^2$, $x_1y - y_1x = 0$, $-\frac{y_1^2}{x_1}$, $-x_1$.

4. Montrer que la sous-tangente à la parabole $y^2 = 4px$ est divisée en deux parties égales par le sommet et que la sous-normale est constante et égale à $2p$.

5. Trouver l'équation de la tangente au point (x_1, y_1) de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Rép. $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$.

(*) Dans les exemples 3 et 5, le lecteur devra observer que si nous faisons abstraction des indices dans les équations des tangentes, elles se réduisent aux courbes elles-mêmes.

6. Trouver les équations de la tangente et de la normale à la courbe $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ au point où $x = 2a$.

Rép. $x + 2y = 4a, \quad y = 2x - 3a$.

7. Démontrer qu'en un point quelconque de la chaînette $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ les longueurs de la sous-normale et de la normale sont respectivement

$$\frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right) \text{ et } \frac{y^2}{a}.$$

8. Trouver les équations de la tangente et de la normale, les longueurs de la sous-tangente et de la sous-normale à chacune des courbes ci-après aux points qui sont indiqués :

(*a*) $y = x^3$ au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$;
(*b*) $y^2 = 4x$ au point $(9, -6)$;
(*c*) $x^2 + 5y^2 = 14$ au point où $y = 1$;
(*d*) $x^2 + y^2 = 25$ au point $(-3, -4)$;
(*e*) $y = 9 - x^2$ au point $(-3, 0)$;
(*f*) $x^2 = 6y$ au point où $x = -6$;
(*g*) $x^2 - xy + 2x - 9 = 0$ au point $(3, 2)$;
(*h*) $2x^2 - y^2 = 14$ au point $(3, -2)$.

9. Démontrer que la longueur de la sous-tangente à $y = a^x$ est constante et égale à $\frac{1}{\log a}$.

10. Trouver l'équation de la tangente à la parabole $y^2 = 20x$ qui fait un angle de 45° avec l'axe des x. *Rép.* $y = x + 5$.

Note. — Trouver d'abord le point de contact par la méthode de l'exemple 1, (*d*), p. 82.

11. Trouver les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 52$ qui sont parallèles à la ligne $2x + 3y = 6$. *Rép.* $2x + 3y \pm 26 = 0$.

12. Trouver les équations des tangentes à l'hyperbole $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$ qui sont perpendiculaires à la ligne $2y + 5x = 10$. *Rép.* $2x - 5y \pm 8 = 0$.

13. Montrer que dans l'hyperbole équilatère $2xy = a^2$ l'aire du triangle formé par une tangente et les axes de coordonnées est constante et égale à a^2.

14. Trouver les équations des tangentes et des normales à la courbe $y^2 = 2x^2 - x^3$ aux points où $x = 1$. *Rép.* A(1, 1), $2y = x + 1$, $y + 2x = 3$.
A(1, — 1), $2y = -x - 1$, $y - 2x = -3$.

15. Montrer que la somme des parties de la tangente à la parabole $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ interceptées sur les axes de coordonnées est constante et égale à a.

16. Trouver l'équation de la tangente à la courbe $x^2(x + y) = a^2(x - y)$ à l'origine. *Rép.* $y = x$.

17. Montrer que pour l'hypocycloïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ la portion de la tangente comprise entre les axes de coordonnées est constante et égale à a.

18. Montrer que la courbe $y = ae^{\frac{x}{c}}$ a une sous-tangente constante.

66. Équations paramétriques d'une courbe. — Soit l'équation d'une courbe

(A) $$F(x, y) = 0.$$

Si x est donnée comme fonction d'une troisième variable, t par exemple, qu'on appelle *paramètre*, en vertu de (A), y est également une fonction de t et la même relation fonctionnelle (A) entre x et y peut généralement être exprimée au moyen d'équations de la forme

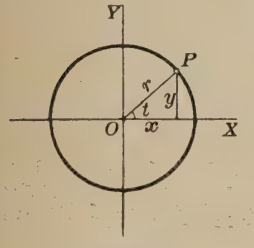


Fig. 28.

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} x = f(t), \\ y = \varphi(t), \end{cases}$$

chaque valeur de t donnant une valeur de x et une valeur de y. Les équations (B) sont appelées les *équations paramétriques* de la courbe. Si nous éliminons t entre les équations (B), il est évident que la relation (A) doit en résulter. Par exemple, prenons l'équation du cercle

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{ou} \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Soit

$$x = r \cos t.$$

Dans ces conditions,

$$y = r \sin t,$$

et nous avons

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t, \end{cases}$$

comme équations paramétriques du cercle dans la figure 28, t étant le paramètre.

Si nous éliminons t entre les équations (C), en élevant au carré et en additionnant les résultats, nous avons

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2,$$

qui est l'équation du cercle en coordonnées rectangulaires. Il est évident que si t varie de 0 à 2π, le point $P(x, y)$ décrira une circonférence complète.

Au § 71, nous discuterons le mouvement d'un point P, mouvement qui est défini par des équations telles que

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = \varphi(t), \end{cases}$$

que nous appellerons les équations paramétriques du trajet parcouru,

le temps t étant le paramètre. Ainsi dans l'ex. 2, p. 105, nous voyons que

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t \end{cases}$$

sont, en effet, les équations de la trajectoire d'un projectile, le temps t étant le paramètre. L'élimination de t donne l'équation rectangulaire de la trajectoire

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Puisque d'après (B), y est donnée comme fonction de t et t comme fonction de x, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \qquad \text{d'après } \mathbf{XXV}$$

$$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}, \qquad \text{d'après } \mathbf{XXVI}$$

c'est-à-dire

$$\text{(D)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\phi'(t)}{f'(t)}.$$

Par suite, si les équations paramétriques d'une courbe sont données, nous pourrons trouver les équations de la tangente et de la normale, les longueurs de la sous-tangente et de la sous-normale en un point donné de la courbe, en trouvant d'abord la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en ce point, d'après (D) et ensuite en substituant dans les formules (1), (2), (3), (4) du dernier paragraphe.

Exemple 1. — Trouver les équations de la tangente et de la normale, les longueurs des sous-tangentes et sous-normales à l'ellipse

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi \text{ (*)} \end{cases}$$

au point où $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

(*) Traçons comme dans la figure 29, les cercles auxiliaires, principal et secondaire de l'ellipse.

Solution. Le paramètre étant φ,

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a \sin \varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = b \cos \varphi.$$

En substituant dans (D), on obtient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos \varphi}{a \sin \varphi} = \text{pente en un point quelconque.}$$

En substituant $\varphi = \frac{\pi}{4}$ dans les équations données (E), nous obtenons $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ comme point de contact. Par suite,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{b}{a}.$$

En substituant dans (1), p. 85, il vient

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

ou

$$bx + ay = \sqrt{2}ab, \text{ équation de la tangente.}$$

En substituant dans (2), p. 85, nous avons

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

ou $\sqrt{2}(ax - by) = a^2 - b^2$, équation de la normale.

En substituant dans (3) et (4), p. 86, nous obtenons

$$\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^2}{a\sqrt{2}} = \text{longueur de la sous-normale}$$

$$\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{a}{\sqrt{2}} = \text{longueur de la sous-tangente.}$$

Exemple II. — Étant donnée l'équation de la cycloïde (*) sous la forme paramétrique

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta), \end{cases}$$

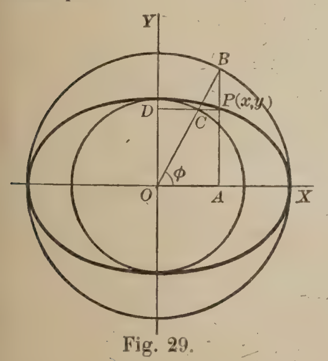


Fig. 29.

Par les deux points B et C sur le même rayon, traçons des lignes parallèles aux axes de coordonnées. Ces lignes se coupent en un point $P(x, y)$ sur l'ellipse, parce que

$$x = OA = OB \cos \varphi = a \cos \varphi$$

et $$y = AP = OD = OC \sin \varphi = b \sin \varphi$$

ou, $$\frac{x}{a} = \cos \varphi \quad \text{et} \quad \frac{y}{b} = \sin \varphi.$$

Élevons maintenant au carré et additionnons, nous obtenons

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

qui est l'équation de l'ellipse en coordonnées rectangulaires.

φ est quelquefois appelé l'angle excentrique de l'ellipse au point P.

(*) La trajectoire décrite par un point de la circonférence d'un cercle qui roule sans frottement

θ étant le paramètre variable, trouver les longueurs de la sous-tangente, de la sous-normale, de la tangente et de la normale au point où $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Solution. $\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$, $\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$.

En substituant dans (D), p. 90, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \text{pente en un point quelconque.}$$

Puisque $\theta = \frac{\pi}{2}$, le point de contact est $\left(\frac{\pi a}{2} - a, a\right)$ et $\frac{dy_1}{dx_1} = 1$.

En substituant dans (3), (4), (5) et (6) du dernier paragraphe, nous obtenons :
longueur de la sous-tangente $= a$, longueur de la sous-normale $= a$,
longueur de la tangente $= a\sqrt{2}$, longueur de la normale $= a\sqrt{2}$. *Rép.*

EXEMPLES

Trouver les équations de la tangente et de la normale, les longueurs de la sous-tangente et de la sous-normale à chacune des courbes ci-après, au point indiqué :

	Tangente	*Normale*	*S.-tg.*	*S.-n^le*
1. $x = t^2$, $2y = t$; $t = 1$.	$x - 4y + 1 = 0$,	$8x + 2y - 9 = 0$,	2,	$\frac{1}{[illegible]}$.
2. $x = t$, $y = t^3$; $t = 2$.	$12x - y - 16 = 0$,	$x + 12y - 98 = 0$,	$\frac{2}{3}$,	96.
3. $x = t^2$, $y = t^3$; $t = 1$.	$3x - 2y - 1 = 0$,	$2x + 3y - 5 = 0$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{2}$.
4. $x = 2e^t$, $y = e^{-t}$; $t = 0$.	$x + 2y - 4 = 0$,	$2x - y - 3 = 0$,	-2,	$-\frac{1}{2}$.
5. $x = \sin t$, $y = \cos 2t$; $t = \frac{\pi}{6}$.	$2y + 4x - 3 = 0$,	$4y - 2x - 1 = 0$,	$-\frac{1}{4}$,	-1.

6. $x = 1 - t$, $y = t^2$; $t = 3$.

7. $x = 3t$, $y = 6t - t^2$; $t = 0$.

8. $x = t^3$, $y = t$; $t = 2$.

9. $x = t^3$, $y = t^2$; $t = -1$.

10. $x = 2 - t$, $y = 3t^2$; $t = 1$.

11. $x = \cos t$, $y = \sin 2t$; $t = \frac{\pi}{3}$.

---

sur une ligne droite fixe a reçu le nom de cycloïde. Soit a le rayon du cercle roulant, P le point qui engendre la courbe et M le point de contact avec la ligne fixe OX qui est appelée la base (*fig.* 30). Si l'arc PM = OM en longueur, P viendra en O si le cercle roule vers la gauche. Nous avons, en désignant l'angle PCM par θ,

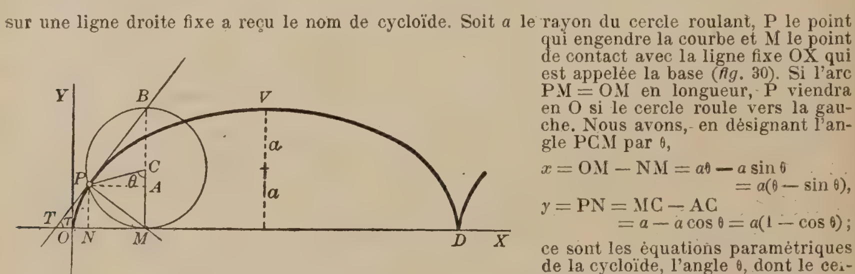


Fig. 30.

$$x = \mathrm{OM} - \mathrm{NM} = a\theta - a\sin\theta = a(\theta - \sin\theta),$$
$$y = \mathrm{PN} = \mathrm{MC} - \mathrm{AC} = a - a\cos\theta = a(1 - \cos\theta) ;$$

ce sont les équations paramétriques de la cycloïde, l'angle θ, dont le cercle roulant tourne, étant le paramètre. OD $= 2\pi a$ s'appelle la base d'un arc de la cycloïde et le point V s'appelle le sommet. En éliminant θ, nous obtenons l'équation en coordonnées rectangulaires

$$x = a \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

12. $x = 3e^{-t}$, $y = 2e^{t}$; $t = 0$.

13. $x = \sin t$, $y = 2\cos t$; $t = \frac{\pi}{4}$.

14. $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$; $t = \frac{\pi}{2}$.

15. $x = \log(t+2)$, $y = t$; $t = 2$.

Dans les courbes suivantes, trouver les longueurs (*a*) de la sous-tangente, (*b*) de la sous-normale, (*c*) de la tangente, (*d*) de la normale en un point quelconque :

16. Courbe $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

Rép. (*a*) $y \operatorname{cotg} t$, (*b*) $y \operatorname{tg} t$, (*c*) $\frac{y}{\sin t}$, (*d*) $\frac{y}{\cos t}$.

17. Hypocycloïde (astroïde) $\begin{cases} x = 4a\cos^3 t, \\ y = 4a\sin^3 t. \end{cases}$

Rép. (*a*) $-y \operatorname{cotg} t$, (*b*) $-y \operatorname{tg} t$, (*c*) $\frac{y}{\sin t}$, (*d*) $\frac{y}{\cos t}$.

18. Cercle $\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t. \end{cases}$

19. Cardioïde $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$

20. Folium de Descartes $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$

21. Spirale hyperbolique $\begin{cases} x = \dfrac{a}{t}\cos t, \\ y = \dfrac{a}{t}\sin t. \end{cases}$

67. Angle formé par le rayon vecteur mené par un point d'une courbe et la tangente à la courbe en ce point. — Soit $\rho = f(\theta)$ l'équation d'une courbe en coordonnées polaires.

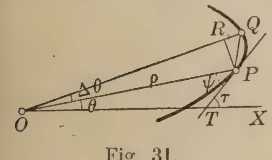


Fig. 31.

Soit P un point fixe quelconque (ρ, θ) de la courbe (*fig.* 31). Si θ, que nous supposons être la variable indépendante, prend un accroissement $\Delta\theta$, ρ prendra un accroissement correspondant $\Delta\rho$. Désignons par Q le point $(\rho + \Delta\rho, \theta + \Delta\theta)$. Menons PR perpendiculaire à OQ.

Alors $OQ = \rho + \Delta\rho$, $PR = \rho\sin\Delta\theta$ et $OR = \rho\cos\Delta\theta$,

$$\operatorname{tg} PQR = \frac{PR}{RQ} = \frac{PR}{OQ - OR} = \frac{\rho\sin\Delta\theta}{\rho + \Delta\rho - \rho\cos\Delta\theta}.$$

Désignons par ψ l'angle formé par le rayon vecteur OP et la

tangente PT. Si, maintenant, nous faisons tendre $\Delta\theta$ vers zéro :

(a) *le point* Q *tendra à se confondre avec le point* P ;

(b) *la sécante* PQ *tendra vers la tangente* PT *comme position limite ;*

(c) *l'angle* PQR *tendra vers* ψ *comme limite.*

Par suite,

Fig. 32.

$$\operatorname{tg}\psi = \lim_{\Delta\theta=0} \frac{\rho\sin\Delta\theta}{\rho+\Delta\rho-\rho\cos\Delta\theta}$$

$$= \lim_{\Delta\theta=0} \frac{\rho\sin\Delta\theta}{2\rho\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}+\Delta\rho}.$$

[Puisque d'après 39, p. 2, $\rho-\rho\cos\Delta\theta=\rho(1-\cos\Delta\theta)=2\rho\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}$.]

$$\operatorname{tg}\psi = \lim_{\Delta\theta=0} \frac{\rho\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\rho\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}+\frac{\Delta\rho}{\Delta\theta}}.$$

Puisque $\lim_{\Delta\theta=0}\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta\theta}\right)=\frac{d\rho}{d\theta}$ et $\lim_{\Delta\theta=0}\left(\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right)=0$ et aussi,

$$\lim_{\Delta\theta=0}\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right)=1$$

et

$$\lim_{\Delta\theta=0}\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}=1,$$ d'après § 22, p. 23,

nous avons

(A) $$\operatorname{tg}\psi=\frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}}.$$

D'après le triangle OPT, nous avons

(B) $$\tau=\theta+\psi.$$

Ayant trouvé τ, nous pouvons ensuite trouver $\operatorname{tg}\tau$, c'est-à-dire la

pente de la tangente à la courbe en P ; ou, puisque, d'après (B),

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg}(\theta + \psi) = \frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \psi},$$

nous pouvons calculer $\operatorname{tg} \psi$ d'après (A) et substituer dans la formule

$$\textbf{(C)} \qquad \textbf{pente de la tangente} = \operatorname{tg} \tau = \frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \psi}.$$

Exemple I. — Trouver ψ et τ dans la cardioïde $\rho = a(1 - \cos \theta)$. Trouver également la pente en $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Solution. $\frac{d\rho}{d\theta} = a \sin \theta$. La substitution dans (A) donne

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}} = \frac{a(1 - \cos \theta)}{a \sin \theta} = \frac{2a \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2a \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$ D'après 39, p. 2 et 37, p. 2.

Puisque $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$, $\psi = \frac{\theta}{2}$. *Réponse.*

En substituant dans (B), nous obtenons

$$\tau = \theta + \frac{\theta}{2} = \frac{3\theta}{2}.$$ *Réponse.*

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$ *Réponse.*

Pour trouver l'angle d'intersection φ de deux courbes C et C' dont les équations sont données en coordonnées polaires, nous pouvons procéder comme il suit (*fig.* 33) :

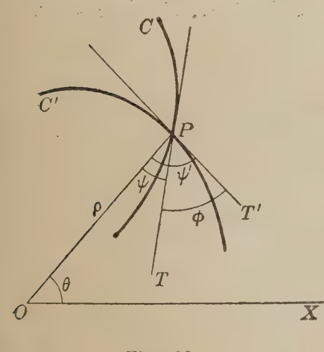


Fig. 33

angle TPT' = angle OPT' — angle OPT,

ou $\varphi = \psi' - \psi$.

Par suite,

$$\textbf{(D)} \qquad \operatorname{tg} \phi = \frac{\operatorname{tg} \psi' - \operatorname{tg} \psi}{1 + \operatorname{tg} \psi' \operatorname{tg} \psi},$$

où $\operatorname{tg} \psi'$ et $\operatorname{tg} \psi$ sont calculées d'après (A) pour chacune des deux courbes et évaluées en fonction du point d'intersection.

Exemple II. — Trouver l'angle d'intersection des courbes $\rho = a \sin 2\theta$, $\rho = a \cos 2\theta$.

Solution. En résolvant les deux équations simultanément, nous obtenons au point d'intersection

$$\operatorname{tg} 2\theta = 1, \quad 2\theta = 45^\circ, \quad \theta = 22^\circ\tfrac{1}{2}.$$

De l'équation de la première courbe, nous obtenons en faisant application de (A) $\qquad \operatorname{tg}\psi' = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\theta = \frac{1}{2}, \quad$ car $\quad \theta = 22^\circ\frac{1}{2}$.

De l'équation de la seconde courbe, nous obtenons de la même façon

$$\operatorname{tg}\psi = -\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg} 2\theta = -\tfrac{1}{2}, \quad \text{car} \quad \theta = 22^\circ\tfrac{1}{2}.$$

Substituant dans (D)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\tfrac{4}{3}.$$ *Réponse.*

68. Longueurs de la sous-tangente polaire et de la sous-normale polaire. — Traçons une ligne NT passant par l'origine et perpendiculaire au rayon vecteur du point P de la courbe (*fig.* 34). Si PT est la tangente et PN la normale à la courbe au point P,

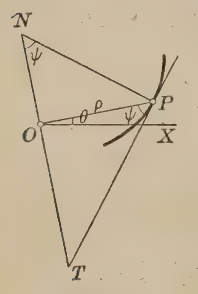


Fig. 34.

OT = *longueur de la sous-tangente polaire,*
et ON = *longueur de la sous-normale polaire*

de la courbe au point P.

Dans le triangle OPT, $\operatorname{tg}\psi = \frac{OT}{\rho}$. Par conséquent,

(7) $\quad OT = \rho \operatorname{tg}\psi = \rho^2 \dfrac{d\theta}{d\rho}$ = longueur de la sous-tangente polaire (*).

Dans le triangle OPN, $\operatorname{tg}\psi = \frac{\rho}{ON}$. Par conséquent,

(8) $\quad ON = \dfrac{\rho}{\operatorname{tg}\psi} = \dfrac{d\rho}{d\theta}$ = longueur de la sous-normale polaire.

La *longueur de la tangente polaire* (PT) et la *longueur de la normale polaire* (PN) peuvent être trouvées d'après la figure, chacune d'elles étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

Exemple III. — Trouver les longueurs de la sous-tangente et de la sous-normale à la lemniscate $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

(*) Quand θ croît avec ρ, $\frac{d\theta}{d\rho}$ est positif et ψ est un angle aigu comme dans la figure 34. La sous-tangente OT est alors positive et mesurée à la droite d'un observateur placé en O et regardant dans la direction OP. Quand $\frac{d\theta}{d\rho}$ est négatif, la sous-tangente est négative et mesurée à la gauche de l'observateur.

Solution. Différentions l'équation de la courbe comme une fonction implicite par rapport à θ,

$$2\rho\frac{d\rho}{d\theta} = -2a^2 \sin 2\theta,$$

ou

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{\rho}.$$

En substituant dans (7) et (8) nous obtenons

$$\text{longueur de la sous-tangente polaire} = -\frac{\rho^3}{a^2 \sin 2\theta},$$

$$\text{longueur de la sous-normale polaire} = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{\rho}.$$

Si nous désirons exprimer les résultats en fonction de θ, il suffit de trouver ρ en fonction de θ d'après l'équation donnée et de substituer. Ainsi, de l'équation de la lemniscate donnée ci-dessus, nous tirons

$$\rho = \pm a\sqrt{\cos 2\theta}\ ;$$

par conséquent, la longueur de la sous-tangente polaire $= \pm a \operatorname{cotg} 2\theta \sqrt{\cos 2\theta}$.

EXEMPLES

1. Dans le cercle $\rho = r \sin \theta$, trouver ψ et τ en fonction de θ.

Réponse. $\psi = \theta$, $\tau = 2\theta$.

2. Dans la parabole $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$, montrer que $\tau + \psi = \pi$.

3. Dans la courbe $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$, montrer que $2\psi = \pi + 4\theta$.

4. Montrer que ψ est constant dans la spirale logarithmique $\rho = e^{a\theta}$. Comme la tangente fait un angle constant avec le rayon vecteur, cette courbe est appelée spirale équiangle.

5. Étant donnée la courbe $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$, démontrer que $\tau = 4\psi$.

6. Montrer que $\operatorname{tg} \psi = \theta$ dans la spirale d'Archimède $\rho = a\theta$. Trouver les valeurs de ψ quand $\theta = 2\pi$ et 4π. *Rép.* $\psi = 80° 57'$ et $85° 27'$.

7. Trouver l'angle formé par la ligne droite $\rho \cos \theta = 2a$ et le cercle $\rho = 5a \sin \theta$.

Rép. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3}{4}$.

8. Montrer que les paraboles $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ et $\rho = b \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2}$ se coupent à angles droits.

9. Trouver l'angle d'intersection de $\rho = a \sin \theta$ et $\rho = a \sin 2\theta$.

Réponse : A l'origine 0° ; aux deux autres points $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 3\sqrt{3}$.

10. Trouver les pentes des courbes ci-après aux points désignés :

(*a*) $\rho = a(1 - \cos \theta)$.	$\theta = \frac{\pi}{2}$.	*Rép.* -1.
(*b*) $\rho = a \sec^2 \theta$.	$\rho = 2a$.	3.
(*c*) $\rho = a \sin 4\theta$.	origine.	$0, 1, \infty, -1$.
(*d*) $\rho^2 = a^2 \sin 4\theta$.	origine.	$0, 1, \infty, -1$,

(e) $\rho = a \sin 3\theta$. origine. $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.
(f) $\rho = a \cos 3\theta$. origine.
(g) $\rho = a \cos 2\theta$. origine.
(h) $\rho = a \sin 2\theta$. $\theta = \frac{\pi}{4}$.
(i) $\rho = a \sin 3\theta$. $\theta = \frac{\pi}{6}$.
(j) $\rho = a\theta$. $\theta = \frac{\pi}{2}$.
(k) $\rho\theta = a$. $\theta = \frac{\pi}{2}$.
(l) $\rho = e^{\theta}$. $\theta = 0$.

11. Démontrer que la spirale d'Archimède $\rho = a\theta$ et la spirale réciproque $\rho = \frac{a}{\theta}$ se coupent à angles droits.

12. Trouver l'angle formé par la parabole $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ et la ligne droite $\rho \sin \theta = 2a$.

Rép. 45°.

13. Montrer que les deux cardioïdes $\rho = a(1 + \cos\theta)$ et $\rho = a(1 - \cos\theta)$ se coupent à angles droits.

14. Trouver les longueurs de la sous-tangente, de la sous-normale, de la tangente et de la normale dans la spirale d'Archimède $\rho = a\theta$.

Rép. Sous-tg $= \frac{\rho^2}{a}$, tg $= \frac{\rho}{a}\sqrt{a^2 + \rho^2}$,
sous-norm. $= a$, norm. $= \sqrt{a^2 + \rho^2}$.

Le lecteur remarquera que la sous-normale est constante.

15. Trouver les longueurs de la sous-tangente, de la sous-normale, de la tangente et de la normale dans la spirale logarithmique $\rho = a^{\theta}$.

Rép. Sous-tg $= \frac{\rho}{\log a}$, tg $= \rho\sqrt{1 + \frac{1}{\log^2 a}}$,
sous-norm. $= \rho \log a$, norm. $= \rho\sqrt{1 + \log^2 a}$.

Quand $a = e$, nous remarquons que sous-tg = sous-norm. et que tg = norm.

16. Trouver les angles formés par les courbes $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $\rho = b(1 - \cos\theta)$.

Rép. 0 et $\frac{\pi}{2}$.

17. Montrer que la spirale $\rho = \frac{a}{\theta}$ a une sous-tangente constante.

18. Montrer que les hyperboles équilatères $\rho^2 \sin 2\theta = a^2$, $\rho^2 \cos 2\theta = b^2$ se coupent à angles droits.

69. Résolution des équations ayant des racines multiples. — Toute racine qui se présente plus d'une fois dans une équation est appelée une *racine multiple*. Ainsi, 3, 3, 3, — 2 sont les racines de

(A) $$x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0;$$

par suite, 3 est une racine multiple se présentant trois fois.

Evidemment. on peut également écrire (A) sous la forme

$$(x-3)^3(x+2)=0.$$

Soit $f(x)$ désignant une fonction rationnelle entière de x ayant une racine multiple a et supposons que cette racine se présente m fois. Nous pouvons alors écrire

$$\text{(B)} \qquad f(x)=(x-a)^m\varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est le produit des facteurs correspondant à toutes les racines de $f(x)$ différentes de a. Différentions (B),

$$f'(x)=(x-a)^m\varphi'(x)+\varphi(x)m(x-a)^{m-1},$$

ou

$$\text{(C)} \qquad f'(x)=(x-a)^{m-1}[(x-a)\varphi'(x)+\varphi(x)m].$$

Par conséquent, $f'(x)$ contient le facteur $x-a$ répété $m-1$ fois et pas davantage, c'est-à-dire que le plus grand commun diviseur (P. G. C. D) de $f(x)$ et de $f'(x)$ a $m-1$ racines égales à a.

Dans le cas où $f(x)$ a une seconde racine multiple b se présentant r fois, il est évident que le P. G. C. D. contiendra également le facteur $(x-b)^{r-1}$ et ainsi de suite pour un nombre quelconque de racines multiples différentes, chacune se présentant une fois de plus dans $f(x)$ que dans le P. G. C. D.

Nous pouvons alors énoncer comme il suit une **règle pour trouver les racines multiples** d'une équation $f(x)=0$.

1re opération. — Trouver $f'(x)$.

2e opération. — Trouver le P. G. C. D. *de* $f(x)$ *et de* $f'(x)$.

3e opération. — Trouver les racines du P. G. C. D. *Chaque racine différente du* P. G. C. D. *se présentera une fois de plus dans* $f(x)$ *que dans le* P. G. C. D.

S'il arrive que le P. G. C. D. ne contienne pas x, c'est qu'alors $f(x)$ n'a pas de racines multiples et le procédé ci-dessus n'est d'aucun secours dans la résolution de l'équation, mais il peut être intéressant de savoir que l'équation n'a pas de racines *égales*, c'est-à-dire *multiples*.

Exemple I. — Résoudre l'équation $x^3-8x^2+13x-6=0$.

Solution. Posons $f(x)=x^3-8x^2+13x-6$.

1re opération. $f'(x)=3x^2-16x+13$.

2e opération. P. G. C. D. $=x-1$.

3e opération. $x-1=0$. $x=1$.

Puisque 1 se présente une fois comme racine dans le P. G. C. D., il se présentera deux fois dans l'équation donnée, c'est-à-dire que $(x-1)^2$ apparaitra comme facteur. La division de $x^3 - 8x^2 + 13x - 6$ par $(x-1)^2$ donne pour quotient le facteur unique $(x-6)$ dont la racine est 6. Les racines de notre équation sont donc 1, 1, 6. En traçant le graphique de la fonction, nous voyons que pour la racine double $x = 1$, le graphique touche l'axe OX, mais ne le traverse pas(*).

EXEMPLES

Résoudre les dix premières équations par la méthode indiquée dans ce paragraphe :

1. $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$. *Rép.* 2, 2, 3.
2. $x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = 0$. $-1, -1, -1, 3$.
3. $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$. $3, 3, 3, -2$.
4. $x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 81x - 108 = 0$. $3, 3, 3, -4$.
5. $x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x + 16 = 0$. $1, 1, -4, -4$.
6. $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 3x - 36 = 0$. $3, 3, -1, 4$.
7. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 8 = 0$. $2, 2, 1 \pm \sqrt{3}$.
8. $x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0$. $-1, -1, -1, 2, 2$.
9. $x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72 = 0$. $2, 2, 2, -3, -3$.
10. $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 13x^2 + 24x + 10 = 0$. $-1, -1, -1, 3 \pm \sqrt{-1}$.

Montrer que les quatre équations ci-après n'ont pas de racines multiples (égales) :

11. $x^3 + 9x^2 + 2x - 48 = 0$.

12. $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$.

13. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 14x + 12 = 0$.

14. $x^n - a^n = 0$.

15. Montrer que la condition pour que l'équation

$$x^3 + 3qx + r = 0$$

ait une racine double est $4q^3 + r^2 = 0$.

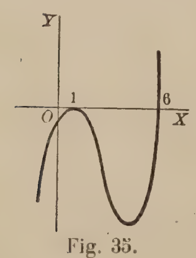


Fig. 35.

16. Montrer que la condition pour que l'équation

$$x^3 + 3px^2 + r = 0$$

ait une racine double est $r(4p^3 + r) = 0$.

70. Applications de la dérivée en mécanique. Vitesse. Mouvement rectiligne.

— Considérons le

(*) Puisque la première dérivée s'annule pour chaque racine multiple, il en résulte que l'axe des x est tangent au graphique en tous les points qui correspondent aux racines multiples. Quand une racine multiple se présente un nombre pair de fois, le graphique ne coupe pas l'axe des x en ce point (*fig.* 35) ; si elle se présente un nombre impair de fois, le graphique coupe l'axe des x.

mouvement d'un point P sur la ligne droite AB (*fig.* 36). Soit s la distance mesurée d'un point fixe tel que A à une position quelconque de P, et soit t le temps écoulé correspondant. A chaque valeur de t correspond une position de P et, par suite, une distance (ou espace) s. Par conséquent, s est une fonction de t et nous pouvons écrire

Fig. 36.

$$s = f(t).$$

Maintenant, faisons prendre à t un accroissement Δt ; s prend alors un accroissement Δs (*), et

(A) $$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \textit{la vitesse moyenne}$$

de P pendant l'intervalle de temps Δt. Si P se déplace d'un mouvement uniforme, le rapport ci-dessus aura la même valeur pour chaque intervalle de temps et représentera la *vitesse* à un instant quelconque.

Dans le cas général d'un mouvement quelconque, uniforme ou non, nous définissons la *vitesse* (coefficient différentiel de s par rapport au temps) à un instant quelconque comme étant la limite du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quand t tend vers zéro, c'est-à-dire

$$v = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

ou

(9) $$v = \frac{ds}{dt}.$$

La vitesse est la dérivée de la distance (= espace) par rapport au temps.

Pour montrer que cette définition s'accorde avec la conception que nous avons déjà de la vitesse, cherchons la vitesse d'un corps qui tombe au bout de deux secondes de chute.

On a trouvé par l'expérience qu'un corps partant du repos et tombant librement dans le vide au voisinage de la surface de la terre suit approximativement la loi suivante :

(B) $$s = 4{,}91\,t^2$$

(*) Δs étant l'espace (ou distance) parcouru pendant le temps Δt.

où $s =$ l'espace de chute en mètres, $t =$ le temps en secondes. Appliquons la *Règle générale*, p. 33, à (B).

1re opération.

$$s + \Delta s = 4{,}91(t + \Delta t)^2 = 4{,}91t^2 + 9{,}82t \cdot \Delta t + 4{,}91(\Delta t)^2.$$

2e opération. $\Delta s = 9{,}82t \cdot \Delta t + 4{,}91(\Delta t)^2.$

3e opération. $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 9{,}82t + 4{,}91\Delta t =$ *vitesse moyenne pendant l'intervalle de temps* Δt.

Posant $t = 2$, il vient

(C) $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 19{,}64 + 4{,}91\Delta t =$ *vitesse moyenne pendant l'intervalle de temps* Δt *après deux secondes de chute.*

Notre notion de la vitesse nous avertit tout de suite que (C) ne nous donne pas la vitesse réelle *au bout de deux secondes* ; car même si nous prenons Δt très petit, par exemple $\dfrac{1}{100}$ ou $\dfrac{1}{1\,000}$ de seconde, (C) ne donnera encore que la *vitesse moyenne* pendant le petit intervalle de temps correspondant. Ce que nous devons entendre par « vitesse au bout de deux secondes » est *la limite de la vitesse moyenne quand* Δt *tend vers zéro* ; c'est-à-dire que la vitesse au bout de deux secondes est, d'après (C), 19,64 mètres par seconde, ce que nous exprimons par la notation

$$v = \underset{\Delta t = 0}{\text{limite}}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = 19{,}64 \text{ mètres par seconde.}$$

L'exemple ci-dessus éclaire bien la notion de valeur limite. Le lecteur devra bien se pénétrer de cette idée qu'une *valeur limite* est une valeur *définie, fixe*, et non quelque chose qui est seulement approché. Observons qu'il n'est fait aucune hypothèse sur la petitesse de $4{,}91\,\Delta t$ et que c'est seulement la *valeur limite* de

$$19{,}64 + 4{,}91\Delta t,$$

quand Δt tend vers zéro, qu'il nous importe de connaître. Cette valeur est *exactement* 19,64.

71. Vitesses composantes. Mouvement curviligne. — Les coordonnées x et y d'un point P se déplaçant dans le plan XY sont

aussi des fonctions du temps et le mouvement peut être défini au moyen de deux équations,

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)\ (*),$$

qui sont les équations paramétriques de la trajectoire (voir § 66, p. 88).

La composante horizontale v_x de v (**) est la vitesse le long de OX de la projection M de P ; c'est, par conséquent, le coefficient différentiel de x par rapport au temps. Par suite, d'après (9), p. 101, si s est remplacé par x, nous obtenons

$$(10) \qquad v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Nous obtenons de la même façon la composante verticale ou coefficient différentiel de y par rapport au temps,

$$(11) \qquad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

En représentant la vitesse et ses composantes par des vecteurs, nous avons immédiatement, d'après la figure 37,

Fig. 37.

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$

ou

$$(12) \qquad v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

ce qui donne la mesure de la vitesse à un instant quelconque.

Si τ est l'angle que fait la direction de la vitesse avec l'axe des x, nous avons d'après la figure, en utilisant (9), (10), (11),

$$(13) \quad \sin\tau = \frac{v_y}{v} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}}; \quad \cos\tau = \frac{v_x}{v} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}}; \quad \operatorname{tg}\tau = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

72. Accélération. Mouvement rectiligne. — En général, v est une fonction de t et nous pouvons écrire

$$v = \psi(t).$$

(*) L'équation de la trajectoire en coordonnées rectangulaires peut être trouvée en éliminant t entre ces équations.
(**) La direction de v est celle de la tangente à la trajectoire.

Donnons à t un accroissement Δt; v prend un accroissement Δv, et $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ = *l'accélération moyenne* de P pendant l'intervalle de temps Δt.

Nous définissons *l'accélération* α à un instant quelconque comme étant la limite du rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ quand Δt tend vers zéro, c'est-à-dire

$$\alpha = \underset{\Delta t = 0}{\text{limite}} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right),$$

ou

(14) $$\alpha = \frac{dv}{dt}.$$

L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

73. Accélérations composantes. Mouvement curviligne. — Dans les traités de mécanique, on montre que dans le mouvement curviligne l'accélération n'est pas, comme la vitesse, dirigée suivant la tangente, mais vers le côté concave de la trajectoire du mouvement. On peut exprimer ce résultat en fonction d'une composante tangentielle a_t et d'une composante normale a_n, où

(14 a) $$a_t = \frac{dv}{dt}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}.$$

(R est le rayon de courbure. Voir § 103.)

L'accélération peut également être exprimée en fonction de composantes parallèles aux axes de la trajectoire du mouvement. En suivant le même plan qu'au § 71 pour trouver les vitesses composantes, nous définirons les *accélérations composantes* parallèles à OX et à OY,

(15) $$\alpha_x = \frac{dv_x}{dt}; \qquad \alpha_y = \frac{dv_y}{dt}.$$

On aura également

(16) $$\alpha = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2},$$

qui donne la mesure de l'accélération à un instant quelconque.

EXEMPLES

1. On a trouvé par l'expérience qu'un corps partant du repos et tombant

librement dans le vide au voisinage de la surface de la terre suit approximativement la loi $s = 4{,}91\,t^2$, où s = l'espace (hauteur) en mètres, t = le temps en secondes. Trouver la vitesse et l'accélération :

(*a*) à un instant quelconque, (*b*) à la fin de la première seconde ; (*c*) à la fin de la cinquième seconde.

Solution. (A) $s = 4{,}91\,t^2$.

(*a*) Différentions, (B) $\dfrac{ds}{dt} = 9{,}82\,t$, ou, d'après (9),

$v = 9{,}82\,t$ mètres par seconde.

Différentions de nouveau :

(C) $\dfrac{dv}{dt} = 9{,}82$ ou, d'après (14),

$\alpha = 9{,}82$ mètres par (seconde)^2,

ce qui nous montre que l'accélération d'un corps qui tombe est constante ; en d'autres termes, la vitesse croît de 9,82 mètres par seconde de chute.

(*b*) Pour trouver v et α à la fin de la première seconde, substituons $t = 1$ dans (B) et (C) ;

$v = 9{,}82$ mètres par seconde ;
$\alpha = 9{,}82$ mètres par (seconde)^2.

(*c*) Pour trouver v et α à la fin de la cinquième seconde, substituons $t = 5$ dans (B) et (C) ;

$v = 49{,}10$ mètres par seconde ;
$\alpha = 9{,}82$ mètres par (seconde)^2.

2. En négligeant la résistance de l'air, les équations du mouvement d'un projectile sont

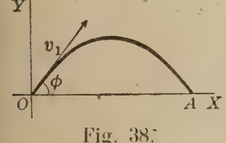


Fig. 38.

$$x = v_1 \cos\varphi \cdot t, \qquad y = v_1 \sin\varphi \cdot t - 4{,}91\,t^2\,;$$

où v_1 est la vitesse initiale ; φ, l'angle de projection avec l'horizon ; t, le temps en secondes pendant lequel le projectile est en l'air ; x et y étant mesurés en mètres.

Trouver la vitesse, l'accélération, les vitesses composantes et les accélérations composantes : (*a*) à un instant quelconque ; (*b*) à la fin de la première seconde, étant donné que $v_1 = 100$ mètres par seconde, $\varphi = 30°$; (*c*) trouver la direction du mouvement à la fin de la première seconde.

Solution. D'après (10) et (11), nous avons

(*a*) $v_x = v_1 \cos\varphi\,;$
$v_y = v_1 \sin\varphi - 9{,}82\,t.$

On a également, d'après (12),

$$v = \sqrt{v_1^2 - 19{,}64\,tv_1 \sin\varphi + 96{,}43\,t^2}.$$

D'après (15) et (16),

$$\alpha_x = 0\,; \qquad \alpha_y = -9{,}82\,; \qquad \alpha = -9{,}82.$$

(*b*) Substituons $t=1$, $v_1=100$, $\varphi=30^\circ$, dans ces résultats, nous obtenons

$v_x = 86{,}6$ mètres par seconde, $\alpha_x = 0$;
$v_y = 40{,}18$ mètres par seconde, $\alpha_y = -9{,}82$ mètres par (seconde)^2 ;
$v = 95{,}9$ mètres par seconde, $\alpha = -9{,}82$ mètres par (seconde)^2.

(*c*) $\tau = \text{arc tg}\,\dfrac{v_y}{v_x} = \text{arc tg}\,\dfrac{40{,}18}{86{,}6}$ = angle de direction du mouvement avec l'horizontale.

3. Étant données les équations suivantes du mouvement rectiligne, trouver la distance parcourue, la vitesse et l'accélération à l'instant indiqué.

(*a*) $s = t^3 + 2t^2$; $t = 2$. *Rép.* $s = 16$, $v = 20$, $\alpha = 16$.
(*b*) $s = t^2 + 2t$; $t = 3$. $s = 15$, $v = 8$, $\alpha = 2$.
(*c*) $s = 3 - 4t$; $t = 4$. $s = -13$, $v = -4$, $\alpha = 0$.
(*d*) $x = 2t - t^2$; $t = 1$. $x = 1$, $v = 0$, $\alpha = -2$.
(*e*) $y = 2t - t^3$; $t = 0$. $y = 0$, $v = 2$, $\alpha = 0$.
(*f*) $h = 20t + 16t^2$; $t = 10$. $h = 1800$, $v = 340$, $\alpha = 32$.
(*g*) $s = 2\sin t$; $t = \dfrac{\pi}{4}$. $s = \sqrt{2}$, $v = \sqrt{2}$, $\alpha = -\sqrt{2}$.
(*h*) $y = a\cos\dfrac{\pi t}{3}$; $t = 1$. $y = \dfrac{a}{2}$, $v = -\dfrac{\pi a\sqrt{3}}{6}$, $\alpha = -\dfrac{\pi^2 a}{18}$.
(*i*) $s = 2e^{3t}$; $t = 0$. $s = 2$, $v = 6$, $\alpha = 18$.
(*j*) $s = 2t^2 - 3t$; $t = 2$.
(*k*) $x = 4 + t^3$; $t = 3$.
(*l*) $y = 5\cos 2t$; $t = \dfrac{\pi}{6}$.
(*m*) $s = b\sin\dfrac{\pi t}{4}$; $t = 2$.
(*n*) $x = ae^{-2t}$; $t = 1$.
(*o*) $s = \dfrac{a}{t} + bt^2$; $t = t_0$.
(*p*) $s = 10\log\dfrac{4}{4+t}$; $t = 1$.

4. Si on donne à un projectile une vitesse initiale de 200 mètres par seconde dans une direction faisant un angle de 45° avec l'horizontale, trouver :

(*a*) la vitesse et la direction du mouvement à la fin de la troisième et de la sixième seconde ;

(*b*) les vitesses composantes aux mêmes instants.
Les conditions sont les mêmes que dans l'ex. 2.

Réponses :

(*a*) quand $t = 3$, $v = 180{,}3$ mètres par seconde, $\tau = \text{arc tg}\,\dfrac{111{,}94}{141{,}4}$,

quand $t = 6$, $v = 163{,}6$ mètres par seconde, $\tau = \text{arc tg}\,\dfrac{82{,}48}{141{,}4}$,

(*b*) quand $t = 3$, $v_x = 141{,}4$ mètres par seconde, $v_y = 111{,}94$ mètres par seconde.
quand $t = 6$, $v_x = 141{,}4$ mètres par seconde, $v_y = 82{,}48$ mètres par seconde.

5. La hauteur ($=s$) en mètres atteinte en t secondes par un corps projeté verticalement avec une vitesse de v_1 mètres par seconde est donnée par la formule

$$s = v_1 t - 4{,}91\, t^2.$$

Trouver : (*a*) la vitesse et l'accélération à un instant quelconque ; et si $v_1 = 100$ mètres par seconde, trouver la vitesse et l'accélération : (*b*) au bout de 2 secondes ; (*c*) au bout de 15 secondes. La résistance de l'air est négligée.

Rép. (*a*) $v = v_1 - 9{,}82t$, $\alpha = -9{,}82$;
(*b*) $v = 80{,}36$ mètres par seconde en montant,
$\alpha = 9{,}82$ mètres par (seconde)^2 en descendant ;
(*c*) $v = 47{,}30$ mètres par seconde en descendant,
$\alpha = 9{,}82$ mètres par (seconde)^2 en descendant.

6. Un boulet de canon est lancé verticalement avec une vitesse à la sortie de l'ouverture de 196,4 mètres par seconde. Trouver : (*a*) sa vitesse au bout de 10 secondes ; (*b*) pendant combien de temps il continuera à s'élever. Les conditions sont les mêmes que dans l'exemple 5.

Rép. (*a*) 98,2 mètres par seconde en montant ; (*b*) 20 secondes.

7. Un train ayant quitté une station s'est trouvé après t heures à une distance (espace) de $s = t^3 + 2t^2 + 3t$ kilomètres du point de départ. Trouver son accélération : (*a*) à la fin de t heures ; (*b*) à la fin de 2 heures.

Rép. (*a*) $\alpha = 6t + 4$; (*b*) $\alpha = 16$ kilomètres par (heure)^2.

8. En t heures, un train a atteint un point situé à une distance de

$$\tfrac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$$

kilomètres du point de départ. (*a*) Trouver sa vitesse et son accélération. (*b*) Quand le train s'arrêtera-t-il pour changer la direction de son mouvement ? (*c*) Décrire le mouvement pendant les dix premières heures.

Rép. (*a*) $v = t^3 - 12t^2 + 32t$, $\alpha = 3t^2 - 24t + 32$;
(*b*) au bout de la quatrième et de la huitième heure ;
(*c*) en avant pendant les 4 premières heures ; en arrière pendant les 4 suivantes ; en avant, de nouveau, après 8 heures.

9. L'espace en mètres parcouru en t secondes par un point est exprimé par la formule

$$s = 48t - 16t^2.$$

Trouver la vitesse et l'accélération au bout d'une seconde et demie.

Rép. $v = 0$, $\alpha = -32$ mètres par (seconde)^2.

10. Trouver l'accélération, étant donné :

(*a*) $v = t^2 + 2t$; $t = 3$. *Rép.* $\alpha = 8$.

(*b*) $v = 3t - t^3$; $t = 2$. $\alpha = -9$.

(*c*) $v = 4 \sin \dfrac{t}{2}$; $t = \dfrac{\pi}{3}$. $\alpha = \sqrt{3}$.

(*d*) $v = a \cos 3t$; $t = \dfrac{\pi}{6}$. $\alpha = -3a$.

(*e*) $v = 5e^{2t}$; $t = 1$. $\alpha = 10e^2$.

11. Au bout de t secondes, un corps a une vitesse de $3t^2+2t$ mètres par seconde. Trouver son accélération : (*a*) en général ; (*b*) au bout de 4 secondes.

Rép. (*a*) $\alpha = 6t+2$ mètres par (seconde)^2 ; (*b*) $\alpha = 26$ mètres par (seconde)^2.

12. La composante verticale de la vitesse d'un point au bout de t secondes est

$$v_y = 3t^2 - 2t + 6 \text{ mètres par seconde.}$$

Trouver la composante verticale de l'accélération (*a*) à un instant quelconque ; (*b*) au bout de 2 secondes.

Rép. (*a*) $\alpha_y = 6t - 2$; (*b*) 10 mètres par (seconde)^2.

13. Lorsqu'un point se meut sur une trajectoire fixe de telle sorte que $s=\sqrt{t}$, montrer que l'accélération est négative et proportionnelle au cube de la vitesse.

14. Si l'espace parcouru est donné par

$$s = ae^t + be^{-t},$$

montrer que l'accélération est toujours égale en grandeur à l'espace parcouru.

15. Si un point rapporté à des coordonnées rectangulaires se meut de façon que

$$x = a\cos t + b \quad \text{et} \quad y = a\sin t + c,$$

montrer que sa vitesse est constante.

16. Si la trajectoire d'un point mobile est la courbe

$$\begin{cases} x = at, \\ y = b\sin at, \end{cases}$$

montrer : (*a*) que la composante v_x de la vitesse est constante ; (*b*) que l'accélération du point à un instant quelconque est proportionnelle à sa distance à l'axe des x.

17. Étant données les équations suivantes du mouvement curviligne, trouver à l'instant donné v_x, v_y, v ; α_x, α_y, α ; la position du point (coordonnées) ; la direction du mouvement. Trouver également l'équation de la trajectoire en coordonnées rectangulaires.

(*a*) $x = t^2$, $y = t$; $t = 2$.
(*b*) $x = t$, $y = t^3$; $t = 1$.
(*c*) $x = t^2$, $y = t^3$; $t = 3$.
(*d*) $x = 2t$, $y = t^2 + 3$; $t = 0$.
(*e*) $x = 1 - t^2$, $y = 2t$; $t = 2$.
(*f*) $x = a\sin t$, $y = a\cos t$; $t = \frac{3\pi}{4}$.
(*g*) $x = 2\sin t$, $y = 3\cos t$; $t = \pi$.
(*h*) $x = \sin t$, $y = \cos 2t$; $t = \frac{\pi}{4}$.
(*i*) $x = 2t$, $y = 3e^t$; $t = 0$.
(*j*) $x = 3t$, $y = \log t$; $t = 1$.
(*k*) $x = t$, $y = 12t^{-1}$; $t = 3$.

CHAPITRE VII

DIFFÉRENTIATION SUCCESSIVE

74. Définition des dérivées successives. — Nous avons vu que la dérivée d'une fonction de x est en général une fonction de x. Cette nouvelle fonction peut également être différentiée ; dans ce cas la dérivée de la *dérivée première* est appelée *dérivée seconde* de la fonction primitive. De même, la dérivée de la dérivée seconde est appelée *dérivée troisième* et ainsi de suite jusqu'à la *dérivée n^e*. Ainsi, si

$$y = 3x^4,$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 36x^2,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 72x, \text{ etc.}$$

75. Notation. — Les symboles des dérivées successives sont habituellement abrégés ainsi qu'il suit :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3},$$

. . . .

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Si $y = f(x)$, les dérivées successives sont également désignées par

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{\text{iv}}(x),\ \cdots,\ f^{(n)}(x);$$

$$y',\ y'',\ y''',\ \cdots,\ y^{(n)};$$

ou $$\frac{d}{dx}f(x),\ \frac{d^2}{dx^2}f(x),\ \frac{d^3}{dx^3}f(x),\ \frac{d^4}{dx^4}f(x),\ \cdots,\ \frac{d^n}{dx^n}f(x).$$

76. Dérivée n^e. — Pour certaines fonctions une expression générale en fonction de n peut être trouvée pour la *dérivée* n^e. La méthode habituelle consiste à trouver un certain nombre de dérivées successives, autant qu'il est nécessaire pour découvrir leur loi de formation, et d'écrire ensuite, par induction, la dérivée n^e.

Exemple I. — Étant donné $y = e^{ax}$, trouver $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Solution.

$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 e^{ax},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^n e^{ax}. \quad \textit{Rép.}$$

Exemple II. — Étant donné $y = \log x$, trouver $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Solution.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1 \cdot 2}{x^3},$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}. \quad \textit{Rép.}$$

Exemple III. — Étant donné $y = \sin x$, trouver $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Solution.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \quad \textit{Rép.}$$

77. Formule de Leibnitz pour la dérivée n^e d'un produit. — Cette formule exprime la dérivée n^e du produit de deux variables en fonction des variables elles-mêmes et de leurs dérivées successives.

Si u et v sont des fonctions de x, nous avons, d'après V,

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}.$$

Différentions de nouveau par rapport à x :

$$\frac{d^2}{dx^2}(uv) = \frac{d^2u}{dx^2}v + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2}v + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2}$$

De même,

$$\frac{d^3}{dx^3}(uv) = \frac{d^3u}{dx^3}v + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + 2\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + 2\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + u\frac{d^3v}{dx^3}$$

$$= \frac{d^3u}{dx^3}v + 3\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + 3\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + u\frac{d^3v}{dx^3}.$$

Aussi loin que cette opération puisse être continuée, on voit que les coefficients numériques suivent la même loi que ceux du théorème du binome et que les indices des dérivées correspondent aux exposants du théorème du binome(*). Dans ces conditions, en raisonnant par induction de la dérivée m^e à la dérivée $(m+1)^e$ du produit, nous pouvons démontrer la *formule de Leibnitz*.

$$(17)\quad \frac{d^n}{dx^n}(uv) = \frac{d^nu}{dx^n}v + n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \frac{n(n-1)}{2\,!}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\frac{d^2v}{dx^2} + \cdots + n\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + u\frac{d^nv}{dx^n}.$$

Exemple I. — Étant donné $y = e^x \log x$, trouver $\frac{d^3y}{dx^3}$ par la formule de Leibnitz.

Solution. Soit $u = e^x$ et $v = \log x$;

alors

$$\frac{du}{dx} = e^x, \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = e^x, \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = e^x, \qquad \frac{d^3v}{dx^3} = \frac{2}{x^3}.$$

En substituant dans (17), nous obtenons

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^x \log x + \frac{3e^x}{x} - \frac{3e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} = e^x\left(\log x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right).$$

(*) Pour rendre la correspondance complète, u et v sont considérés comme $\frac{d^0u}{dx^0}$ et $\frac{d^0v}{dv^0}$.

EXEMPLE II. — Étant donné $y = x^2e^{ax}$, trouver $\frac{d^ny}{dx^n}$ par la formule de Leibnitz.

Solution. Soit $u = x^2$ et $v = e^{ax}$;

alors
$$\frac{du}{dx} = 2x, \qquad \frac{dv}{dx} = ae^{ax},$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2, \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = a^2e^{ax},$$
$$\frac{d^3u}{dx^3} = 0, \qquad \frac{d^3v}{dx^3} = a^3e^{ax},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^nu}{dx^n} = 0, \qquad \frac{d^nv}{dx^n} = a^ne^{ax}.$$

En substituant dans (17), nous obtenons
$$\frac{d^ny}{dx^n} = x^2a^ne^{ax} + 2na^{n-1}xe^{ax} + n(n-1)a^{n-2}e^{ax} = a^{n-2}e^{ax}\left[x^2a^2 + 2nax + n(n-1)\right].$$

78. Différentiation successive des fonctions implicites. — Pour illustrer la méthode, nous essaierons de tirer $\frac{d^2y}{dx^2}$ de l'équation de l'hyperbole
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Différentions par rapport à x, comme au § 63, p. 77,
$$2b^2x - 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0,$$
ou
$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

Différentions de nouveau, en nous rappelant que y est une fonction de x,
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2yb^2 - b^2xa^2\frac{dy}{dx}}{a^4y^2}.$$

En remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur tirée de (A),
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2b^2y - a^2b^2x\left(\frac{b^2x}{a^2y}\right)}{a^4y^2} = -\frac{b^2(b^2x^2 - a^2y^2)}{a^4y^3}.$$

Mais, d'après l'équation donnée,

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

EXEMPLES

Différentier les fonctions suivantes :

1. $y = 4x^3 - 6x^2 + 4x + 7.$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 12(2x - 1).$
2. $f(x) = \frac{x^3}{1 - x}.$ $\qquad f^{\text{IV}}(x) = \frac{4\,!}{(1 - x)^5}.$
3. $f(y) = y^6.$ $\qquad f^{\text{VI}}(y) = 6\,!$
4. $y = x^3 \log x.$ $\qquad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{6}{x}.$
5. $y = \frac{c}{x^n}.$ $\qquad y'' = \frac{n(n+1)c}{x^{n+2}}.$
6. $y = (x - 3)e^{2x} + 4xe^x + x.$ $\qquad y'' = 4e^x[(x - 2)e^x + x + 2].$
7. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$ $\qquad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}.$
8. $f(x) = ax^2 + bx + c.$ $\qquad f'''(x) = 0.$
9. $f(x) = \log(x + 1).$ $\qquad f^{\text{IV}}(x) = -\frac{6}{(x + 1)^4}.$
10. $f(x) = \log(e^x + e^{-x}).$ $\qquad f'''(x) = -\frac{8(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3}.$
11. $r = \sin a\theta.$ $\qquad \frac{d^4r}{d\theta^4} = a^4 \sin a\theta = a^4 r.$
12. $r = \operatorname{tg} \varphi.$ $\qquad \frac{d^3r}{d\varphi^3} = 6 \sec^4 \varphi - 4 \sec^2 \varphi.$
13. $r = \log \sin \varphi.$ $\qquad r''' = 2 \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{cosec}^2 \varphi.$
14. $f(t) = e^{-t} \cos t.$ $\qquad f^{\text{IV}}(t) = -4e^{-t} \cos t = -4f(t).$
15. $f(\theta) = \sqrt{\sec 2\theta}.$ $\qquad f''(\theta) = 3[f(\theta)]^5 - f(\theta).$
16. $p = (q^2 + a^2) \operatorname{arc\,tg} \frac{q}{a}.$ $\qquad \frac{d^3p}{dq^3} = \frac{4a^3}{(a^2 + q^2)^2}.$
17. $y = a^x.$ $\qquad \frac{d^ny}{dx^n} = (\log a)^n a^x.$
18. $y = \log(1 + x).$ $\qquad \frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1}\frac{(n - 1)!}{(1 + x)^n}.$
19. $y = \cos ax.$ $\qquad \frac{d^ny}{dx^n} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$
20. $y = x^{n-1} \log x.$ $\qquad \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{(n - 1)\,!}{x}.$

[n étant un nombre entier positif.]

21. $y = \frac{1-x}{1+x}$. $\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = 2(-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

NOTE. — Réduire la fraction à la forme $-1 + \frac{2}{1+x}$ avant de différentier.

22. Si $y = e^x \sin x$, démontrer que $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$.

23. Si $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$, démontrer que $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$.

Faire usage de la formule de Leibnitz dans les quatre exemples suivants :

24. $y = x^2 a^x$. $\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = a^x(\log a)^{n-2}[(x\log a + n)^2 - n]$.

25. $y = e^x x$. $\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = e^x(x+n)$.

26. $f(x) = e^x \sin x$. $\qquad f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$.

27. $f(\theta) = \cos a\theta \cos b\theta$. $\qquad f^{(n)}(\theta) = \frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)\theta + \frac{n\pi}{2}\right]$

$$+ \frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)\theta + \frac{n\pi}{2}\right].$$

28. Montrer que les formules de l'accélération (14), (15), p. 104, peuvent s'écrire

$$\alpha = \frac{d^2s}{dt^2}, \qquad \alpha_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \alpha_y = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

29. $y^2 = 4ax$. $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4a^2}{y^3}$.

30. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}$.

31. $x^2 + y^2 = r^2$. $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r^2}{y^3}$.

32. $y^2 + y = x^2$. $\qquad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{24x}{(1+2y)^5}$.

33. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$. $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2 - ab}{(hx+by)^3}$.

34. $y^2 - 2xy = a^2$. $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2}{(y-x)^3}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3a^2x}{(y-x)^5}$.

35. $\sec\varphi\cos\theta = c$. $\qquad \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} = \frac{\operatorname{tg}^2\theta - \operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^3\theta}$.

36. $\theta = \operatorname{tg}(\varphi + \theta)$. $\qquad \frac{d^3\theta}{d\varphi^3} = -\frac{2(5 + 8\theta^2 + 3\theta^4)}{\theta^8}$.

37. Trouver la dérivée seconde des fonctions suivantes :

(*a*) $\log(u+v) = u - v$.
(*b*) $e^u + u = e^v + v$.
(*c*) $s = 1 + te^s$.
(*d*) $e^s + st - e = 0$.
(*e*) $y^3 + x^3 - 3axy = 0$.
(*f*) $y^2 - 2mxy + x^2 - a = 0$.
(*g*) $y = \sin(x+y)$.
(*h*) $e^{x+y} = xy$.

CHAPITRE VIII

MAXIMA ET MINIMA. POINTS D'INFLEXION. TRACÉ DES COURBES

79. Introduction. — Dans un grand nombre de problèmes pratiques, nous avons à nous occuper de fonctions comportant une valeur plus grande que toutes les autres (maximum) ou une valeur plus petite que toutes les autres (minimum) (*) et il est très important de connaître quelle est la valeur particulière de la variable qui fait prendre une telle valeur à la fonction. Par exemple, supposons qu'on demande de trouver les dimensions du rectangle d'aire maximum qui puisse être inscrit dans un cercle de 5^{cm} de rayon. Considérons le cercle de la figure 39 :

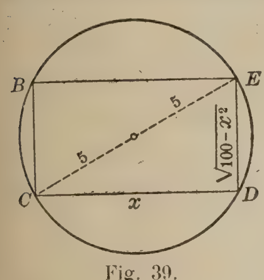


Fig. 39.

Inscrivons-lui un rectangle quelconque, tel que *BD*.

Soit $CD = x$; alors, $DE = \sqrt{100 - x^2}$, et l'aire du rectangle est évidemment

$$(1) \qquad A = x\sqrt{100 - x^2}.$$

L'existence d'un rectangle d'aire maximum peut se voir ainsi qu'il suit :

Faisons croître la base $CD = x$ jusqu'à 10^{cm} (le diamètre) ; alors, la hauteur $DE = \sqrt{100 - x^2}$ décroîtra jusqu'à zéro et l'aire deviendra nulle. Faisons maintenant décroître la base jusqu'à zéro ; alors la hauteur croîtra jusqu'à 10 centimètres et l'aire deviendra nulle, de nouveau. Par conséquent, il est évident intuitivement qu'il existe un rectangle inscrit qui est plus grand que tous les autres. En étudiant soigneusement la figure, nous pourrions conjecturer que quand le rectangle devient un carré son aire est la plus grande possible, mais ce serait là une simple supposition.

(*) Il peut y avoir plusieurs maxima et plusieurs minima, ainsi qu'on le montrera p. 122.

Une meilleure méthode consisterait évidemment à construire le graphique de la fonction (1) et à noter comment il se comporte. Pour nous aider dans le tracé du graphique de (1), nous observons que :

(a) d'après la nature du problème, il est évident que x et A doivent être tous les deux positifs ;

(b) les valeurs de x sont comprises entre 0 et 10 inclusivement.

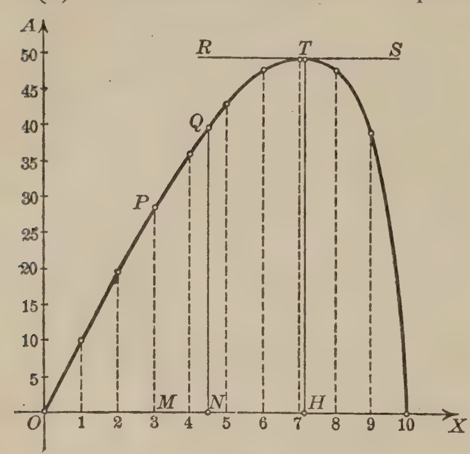


Fig. 40.

x	A
0	0,0
1	9,9
2	19,6
3	28,6
4	36,6
5	43,0
6	48,0
7	49,7
8	48,0
9	39,6
10	0,0

Construisons maintenant un tableau des valeurs de x et de A et traçons le graphique (*fig.* 40).

Que nous apprend le graphique ?

(a) S'il est soigneusement fait, nous pouvons trouver très exactement l'aire du rectangle correspondant à une valeur quelconque de x en mesurant la longueur de l'ordonnée correspondante. Ainsi :

quand $x = \text{OM} = 3^{\text{cm}}$,

$\text{A} = \text{MP} = 28{,}6^{\text{cm}^2}$,

et quand $x = \text{ON} = 4^{\text{cm}}\frac{1}{2}$,

$\text{A} = \text{NQ} =$ environ $39{,}8^{\text{cm}^2}$ (résultat trouvé en mesurant).

(b) Il y a une seule tangente horizontale (RS). L'ordonnée TH de son point de contact T est plus grande que toute autre ordonnée. D'où cette découverte : *Un des rectangles inscrits a évidemment une sur-*

face plus grande que celle de n'importe lequel des autres. En d'autres termes, nous pouvons conclure de là que la fonction définie par (1) a une *valeur maximum.* Nous ne pouvons pas trouver exactement cette valeur (HT) en mesurant, mais il est très facile de la trouver en utilisant les méthodes de l'Analyse. Nous avons observé qu'en T la tangente est horizontale ; par suite la pente est nulle en ce point (exemple 1, p. 82). Pour trouver l'abscisse de T nous chercherons donc la dérivée première de (1), nous l'égalerons à zéro et nous résoudrons par rapport à x. Ainsi,

$$(1) \qquad A = x\sqrt{100 - x^2},$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

$$\frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0.$$

En résolvant, on obtient $x = 5\sqrt{2}$.

En substituant cette valeur de x dans l'expression de DE, nous obtenons

$$DE = \sqrt{100 - x^2} = 5\sqrt{2}.$$

Par suite, le rectangle d'aire maximum inscrit dans le cercle donné est un carré dont la surface est de

$$A = CD \times DE = 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 50^{cm^2}.$$

La longueur de HT est par conséquent 50.

Prenons un autre exemple. Une boîte en bois doit être construite de façon à contenir 108 centimètres cubes. Elle doit avoir la partie supérieure ouverte et une base carrée. Quelles doivent être ses dimensions pour que l'on ait à employer le minimum de matériaux, c'est-à-dire pour que la dépense soit la plus petite possible ?

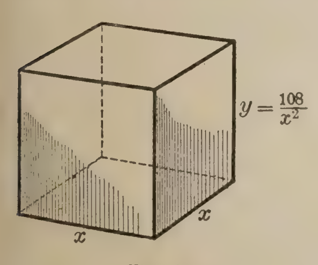


Fig. 41.

Soit x = longueur en centimètres du côté de la base carrée

et y = hauteur de la boîte.

Puisque le volume de la boîte est donné, y peut être trouvé en fonction de x.

Ainsi, volume $= x^2y = 108$;

d'où $$y = \frac{108}{x^2}.$$

Nous pouvons maintenant exprimer comme il suit le nombre, M, de centimètres carrés de bois nécessaires en fonction de x :

$$\text{aire de la base} = x^2 \text{ centimètres carrés,}$$

et $$\text{aire des quatre côtés} = 4xy = \frac{432}{x} \text{ centimètres carrés.}$$

Par suite,

(2) $$M = x^2 + \frac{432}{x}$$

est une formule donnant le nombre de centimètres carrés de bois

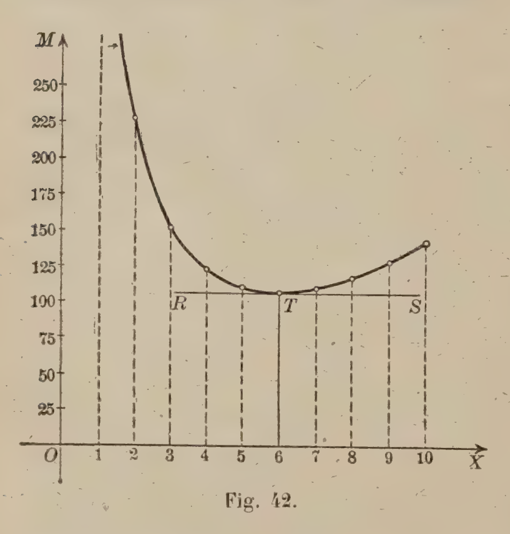


Fig. 42.

X	M
1	433
2	220
3	153
4	124
5	111
6	108
7	111
8	118
9	129
10	143

nécessaires pour une boîte ayant une capacité de 108 centimètres cubes.

Traçons le graphique de (2) (*fig.* 42).

Que nous apprend ce graphique ?

(a) S'il est dessiné avec soin, nous pouvons mesurer l'ordonnée correspondant à une longueur quelconque, x, du côté de la base carrée et déterminer ainsi le nombre de centimètres carrés de bois nécessaires.

(*b*) Il y a une seule tangente horizontale (RS). L'ordonnée de son point de contact est plus petite que toute autre ordonnée. D'où cette découverte : *Une des boîtes nécessite évidemment moins de bois que n'importe laquelle des autres.* En d'autres termes, nous pouvons conclure que la fonction définie par (2) a une *valeur minimum.* Trouvons exactement ce point sur le graphique, en utilisant les méthodes de l'Analyse. En différentiant (2) pour obtenir la pente en un point quelconque, nous avons

$$\frac{dM}{dx} = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

Au point le plus bas T, la pente est nulle. Par suite,

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0 ;$$

c'est-à-dire que quand $x = 6$ la quantité de bois nécessaire est la plus petite possible.

En substituant dans (2), nous voyons que dans ce cas

$$M = 108^{cm^2}.$$

Le fait qu'une valeur minimum de M existe est également montré par le raisonnement suivant. Supposons que la base aille en croissant d'un très petit carré à un très grand. Dans le premier cas, la hauteur doit être très grande et par conséquent la quantité de bois nécessaire est très grande. Dans le deuxième cas, la hauteur est petite et la base nécessite une grande quantité de bois. Par suite, M varie en partant d'une grande valeur, décroît, puis croît de nouveau jusqu'à une autre grande valeur. Il s'ensuit que le graphique doit avoir un point « plus bas que tous les autres » correspondant aux dimensions qui nécessitent la plus petite quantité de bois et, par conséquent, la plus faible dépense.

Nous allons maintenant procéder à l'étude détaillée des maxima et des minima.

80. Fonctions croissantes et décroissantes (*). — Une fonction est dite *croissante* quand elle croît lorsque la variable croît et décroît lorsque la variable décroît. Une fonction est dite *décroissante*

(*) Les démonstrations données ici sont fondées principalement sur l'intuition géométrique. Le sujet des maxima et des minima sera traité analytiquement au § 108, p. 191.

quand elle décroît lorsque la variable croît et qu'elle croît lorsque la variable décroît.

Le graphique d'une fonction indique clairement si elle est croissante ou décroissante. Par exemple, considérons la fonction a^x dont le graphique (*fig.* 43) est le lieu de l'équation

$$y = a^x. \qquad a > 1.$$

Quand nous nous déplaçons sur la courbe de gauche à droite, la courbe *monte*; c'est-à-dire que quand x croît, la fonction y croît

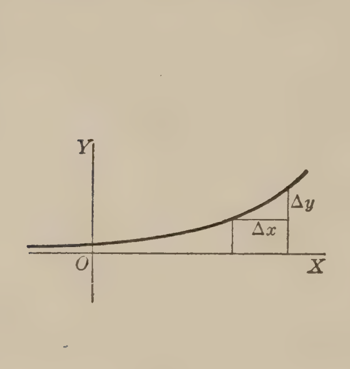


Fig. 43.

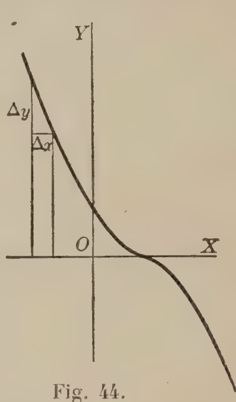


Fig. 44.

constamment. Par conséquent, a^x est une fonction croissante pour toutes les valeurs de x.

D'autre part, considérons la fonction $(a - x)^3$ dont le graphique (*fig.* 44) est le lieu de l'équation

$$y = (a - x)^3.$$

Lorsque nous nous déplaçons sur la courbe de gauche à droite, la courbe *descend*; c'est-à-dire que quand x croît, la fonction y décroît constamment. Par suite $(a - x)^3$ est une fonction décroissante pour toutes les valeurs de x.

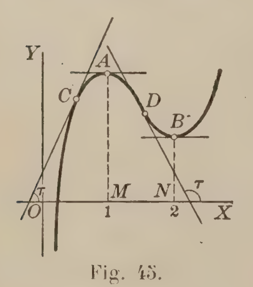


Fig. 45.

Une fonction peut être tantôt croissante et tantôt décroissante, ainsi que le montre le graphique (*fig.* 45) de

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3.$$

Quand nous nous déplaçons sur la courbe de gauche à droite, la courbe monte jusqu'à ce que nous atteignions le

point A, ensuite elle descend de A à B, et à droite de B elle monte constamment. Par suite :

(*a*) *de* $x = -\infty$ *à* $x = 1$, *la fonction est croissante* ;
(*b*) *de* $x = 1$ *à* $x = 2$, *la fonction est décroissante* ;
(*c*) *de* $x = 2$ *à* $x = +\infty$, *la fonction est croissante.*

Le lecteur devra étudier soigneusement la courbe de façon à noter comment se comporte la fonction quand $x = 1$ et $x = 2$. Evidemment, A et B sont des points critiques. En A la fonction cesse de croître et commence à décroître ; en B c'est le contraire qui se produit. En A et B la tangente (ou la courbe) est évidemment parallèle à l'axe des x et, par suite, la pente est nulle.

81. Règles pour déterminer quand une fonction est croissante et quand elle est décroissante. — Il est évident d'après la figure 45 qu'en un point tel que C, où une fonction

$$y = f(x)$$

est croissante, la tangente fait, en général, un angle aigu avec l'axe des x ; par suite

$$\textit{pente} = \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \textit{un nombre positif.}$$

De même, en un point tel que D, où une fonction *est décroissante*, la tangente fait, en général, un angle obtus avec l'axe des x ; par conséquent

$$\textit{pente} = \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \textit{un nombre négatif} \ (*).$$

En conséquence, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction croissante devienne décroissante ou inversement, est que la *dérivée première change de signe*. Mais ce fait ne peut arriver pour une dérivée continue qu'en passant par la valeur zéro. Ainsi dans la figure 45, p. 120, lorsque nous nous déplaçons le long de la courbe, la dérivée (la pente) change de signe en A et en B où elle a la valeur

(*) Réciproquement, pour une valeur donnée de x,

si $f'(x) = +1$, $f(x)$ est croissante ;
si $f'(x) = -1$, $f(x)$ est décroissante.

Quand $f'(x) = 0$, nous ne pouvons dire sans autre recherche si $f(x)$ est croissante ou décroissante.

zéro. Donc, en général, nous avons aux *points critiques*

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0. \tag{18}$$

La dérivée est continue dans presque toutes les applications importantes, mais il est intéressant de noter le cas où la dérivée (la pente) change de signe en passant par l'∞ (*). Ce fait se produit évidemment aux points B, E, G, dans la figure suivante (*fig.* 46) où les tangentes (et la courbe) sont perpendiculaires à l'axe des x. En ces points critiques exceptionnels,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \infty,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{f'(x)} = 0.$$

82. Valeurs maximum et minimum d'une fonction. — Une valeur *maximum* d'une fonction est une valeur qui est *plus grande* que toutes celles qui la précèdent ou la suivent immédiatement.

Une valeur *minimum* d'une fonction est une valeur qui est *plus petite* que toutes celles qui la précèdent ou la suivent immédiatement.

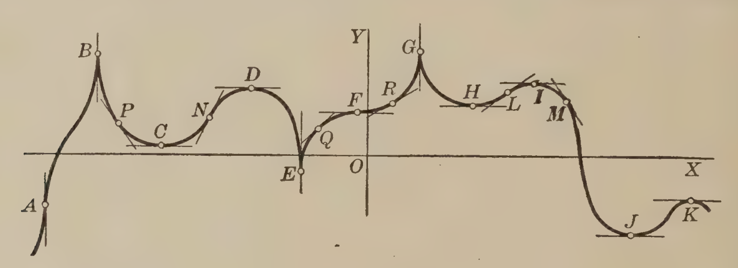


Fig. 46.

Par exemple dans la figure 45, p. 120, il est clair que la fonction passe par une valeur maximum MA($y = 2$) quand $x = 1$ et par une valeur minimum NB ($y = 1$) quand $x = 2$.

Le lecteur observera qu'un maximum n'est pas nécessairement la plus grande valeur possible d'une fonction, ni un minimum la plus petite valeur possible, car dans la figure 45, on voit que la fonction (y)

(*) On veut dire par là que son inverse passe par la valeur zéro.

a des valeurs à droite de B qui sont plus grandes que le maximum MA, et des valeurs à gauche de A qui sont plus petites que le minimum NB.

Une fonction peut avoir plusieurs valeurs maxima et plusieurs valeurs minima. Supposons que la figure ci-dessus (*fig.* 46) représente le graphique d'une fonction $f(x)$.

En B, D, G, I, K, la fonction passe par un maximum, et en C, E, H, J, elle passe par un minimum. La figure montre qu'une valeur minimum déterminée peut être plus grande qu'une valeur maximum déterminée ; les valeurs minima en C et H sont plus grandes que la valeur maximum en K.

Aux points critiques ordinaires C, D, H, I, J, K, la tangente (ou la courbe) est parallèle à OX ; par conséquent

$$pente = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0.$$

Aux points critiques exceptionnels, B, E, G, la tangente (ou la courbe) est perpendiculaire à OX, ce qui donne

$$pente = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \infty.$$

Une de ces deux conditions est donc nécessaire pour que la fonction ait une valeur maximum ou une valeur minimum. Mais une pareille condition n'est pas suffisante, car en F la pente est nulle et en A, elle est infinie, et cependant la fonction n'a ni valeur maximum ni valeur minimum en chacun de ces points. Il est nécessaire que nous sachions, en outre, comment la fonction se comporte dans le voisinage de chaque point. Ainsi, aux points de *valeur maximum*, B, D, G, I, K, la fonction *de croissante qu'elle était devient décroissante*, et aux points de *valeur minimum*, C, E, H, J, la fonction *de décroissante qu'elle était devient croissante*. Il suit de là, d'après le § 81, qu'aux *points de valeur maximum*

$$pente = \frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ doit passer de } + \text{ à } -$$

et aux *points de valeur minimum*

$$pente = \frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ doit passer de } - \text{ à } +,$$

quand nous nous déplaçons sur la courbe de gauche à droite.

Aux points tels que A et F où la pente est nulle ou infinie, mais qui ne sont *ni des points de valeur maximum ni des points de valeur minimum*,

$$pente = \frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ ne change pas de signe.}$$

Nous pouvons dès lors énoncer d'une façon générale, comme il suit, les conditions suivant lesquelles une fonction $f(x)$ passe par un maximum ou par un minimum pour certaines valeurs de la variable :

(19) $f(x)$ passe par un maximum si $f'(x) = 0$ et si $f'(x)$ passe de + à —.

(20) $f(x)$ passe par un minimum si $f'(x) = 0$ et si $f'(x)$ passe de — à +.

Les valeurs de la variable aux points critiques d'une fonction sont appelées *valeurs critiques* ; ainsi, $x = 1$ et $x = 2$ sont les valeurs critiques de la variable pour la fonction dont le graphique est donné dans la figure 45, p. 120. Les valeurs critiques aux points critiques où la tangente est parallèle à OX sont évidemment trouvées en égalant la dérivée première à zéro et en la résolvant pour les valeurs réelles de x, comme au § 64, p. 81 (*).

Pour déterminer le signe de la dérivée première en des points voisins d'un point critique déterminé, on substitue d'abord dans cette dérivée une valeur de la variable *un peu plus petite* que la valeur critique correspondante, et ensuite *une valeur un peu plus grande* (**). Si la première substitution donne + (comme en L, *fig.* 46, p. 122) et la seconde — (comme en M), la fonction (y) a une valeur maximum dans cet intervalle (comme en I).

Si la première substitution donne — (comme en P), et la seconde + (comme en N), la fonction (y) a une valeur minimum dans cet intervalle (comme en C).

Si le signe est le même dans les deux cas (comme en Q et en R), alors la fonction (y) n'a ni valeur maximum ni valeur minimum dans cet intervalle (comme en F) (***).

(*) De même, si nous voulons examiner une fonction aux points critiques exceptionnels où la tangente est perpendiculaire à OX, nous égalons à zéro la réciproque (ou l'inverse) de la dérivée première et nous la résolvons pour trouver les valeurs critiques.

(**) Dans ce cas, l'expression « un peu plus petit » ou « un tout petit peu plus petit » s'applique à toute valeur comprise entre la racine que l'on considère et celle qui lui est immédiatement inférieure (valeur critique) et l'expression « un peu plus grand » ou « un tout petit peu plus grand » s'applique à toute valeur comprise entre la racine que l'on considère et celle qui lui est immédiatement supérieure.

(***) Une discussion semblable s'applique évidemment à chacun des points critiques exceptionnels B, E, A.

Nous allons maintenant résumer les résultats qui précèdent dans la *Règle* ci-après :

83. Première méthode pour examiner les valeurs maxima et minima d'une fonction. Règle.

1re opération. Trouver la dérivée première de la fonction.

2e opération. Égaler la dérivée première à zéro (*) *et résoudre l'équation résultante pour ses racines réelles afin de trouver les valeurs critiques de la variable.*

3e opération. Écrire la dérivée sous forme de produits de facteurs ; si elle est algébrique, l'écrire sous forme linéaire.

4e opération. Considérant une valeur critique déterminée, examiner les signes pris par la dérivée première, d'abord pour une valeur un peu inférieure, et ensuite pour une valeur un peu supérieure à la valeur critique. Si le signe de la dérivée est d'abord + et ensuite —, la fonction passe par un maximum pour cette valeur critique particulière de la variable. Si l'inverse a lieu, la fonction passe par un minimum. Si le signe de la dérivée ne change pas, la fonction ne passe ni par un maximum ni par un minimum pour la valeur critique considérée.

Dans le problème étudié p. 116, nous avons montré au moyen du graphique de la fonction

$$A = x\sqrt{100 - x^2}$$

que le rectangle d'aire maximum inscrit dans un cercle de 5^{cm} de rayon a 50 centimètres carrés. Ce résultat peut maintenant être démontré analytiquement comme il suit, en appliquant la règle ci-dessus :

Solution. $$f(x) = x\sqrt{100 - x^2}.$$

1re opération. $$f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

2e opération. $$\frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0,$$

$$x = 5\sqrt{2},$$

qui est la valeur critique. Seul, le signe positif du radical est pris, puisque, d'après la nature du problème, le signe négatif n'a aucune signification.

(*) Quand la dérivée première devient infinie pour une certaine valeur de la variable indépendante, la fonction doit être examinée pour cette valeur critique de la variable, car elle peut donner des valeurs maxima ou minima, comme en B, E, ou A (*fig.* 46). Voir la note, p. 122.

3e opération. $$f'(x) = \frac{2(5\sqrt{2} - x)(5\sqrt{2} + x)}{\sqrt{(10 - x)(10 + x)}}.$$

4e opération. Quand $x < 5\sqrt{2}$, $$f'(x) = \frac{2(+)(+)}{\sqrt{(+)(+)}} = + \cdot$$

Quand $x > 5\sqrt{2}$, $$f'(x) = \frac{2(-)(+)}{\sqrt{(+)(+)}} = - \cdot$$

Puisque le signe de la dérivée première passe de $+$ à $-$ au voisinage de $x = 5\sqrt{2}$, la fonction passe par un maximum qui est

$$f(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 50. \quad \textit{Réponse.}$$

84. Seconde méthode pour examiner les valeurs maxima et minima d'une fonction. — D'après (**19**), p. 124, il est clair que dans le voisinage d'une valeur maximum de $f(x)$, en parcourant le graphique de gauche à droite

$$f'(x) \textit{ passe de } + \textit{ à } 0, \textit{ puis à } -.$$

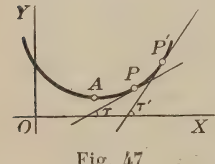


Fig. 47.

Par suite, $f'(x)$ est une fonction décroissante et d'après le § 81, nous savons que sa dérivée, c'est-à-dire la dérivée seconde, $f''(x)$, de la fonction elle-même, est négative ou nulle.

De même, nous savons, d'après (**20**), p. 124, que dans le voisinage d'un valeur minimum de $f(x)$

$$f'(x) \textit{ passe de } - \textit{ à } 0, \textit{ puis à } +.$$

Par suite, $f'(x)$ est une fonction croissante et, d'après le § 81, il s'ensuit que $f''(x)$ est positive ou nulle.

Le lecteur devra observer que $f''(x)$ est positive, non seulement aux points de valeur minimum (comme en A) mais encore en des points tels que P ; car, quand un point passe par P en allant de gauche à droite,

$$\textit{pente} = \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = f'(x) \textit{ est une fonction croissante.}$$

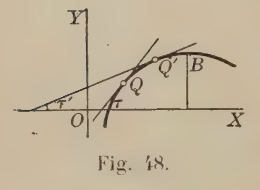


Fig. 48.

En un pareil point, la courbe est dite *concave vers le haut.*

De même, $f''(x)$ est négative, non seulement aux points de valeur maximum (comme en B), mais encore aux points tels que Q ; car quand un point passe par Q,

$$\textit{pente} = \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = f'(x) \textit{ est une fonction décroissante.}$$

En un pareil point, la courbe est dite *concave vers le bas* (*).

Nous pouvons donc énoncer comme il suit les conditions suffisantes relatives aux valeurs maxima et minima prises par $f(x)$ pour certaines valeurs de la variable.

(21) $f(x)$ passe par un maximum si $f'(x) = 0$ et si $f''(x) =$ un nombre négatif.

(22) $f(x)$ passe par un minimum si $f'(x) = 0$ et si $f''(x) =$ un nombre positif.

La **Règle** correspondante pour opérer est la suivante :

1re opération. Trouver la dérivée première de la fonction.

2e opération. Égaler la dérivée première à zéro et résoudre l'équation résultante pour ses racines réelles, afin de trouver les valeurs critiques de la variable.

3e opération. Trouver la dérivée seconde.

4e opération. Substituer chaque valeur critique de la variable dans la dérivée seconde. Si le résultat est négatif, la fonction passe par un maximum pour cette valeur critique ; si le résultat est positif, la fonction passe par un minimum.

Quand $f''(x) = 0$ ou n'existe pas, la méthode ci-dessus est en défaut, bien qu'il puisse exister un maximum ou un minimum ; mais dans ce cas, la première méthode donnée dans le dernier paragraphe s'applique toujours, parce qu'elle est fondamentale. Habituellement, cette seconde méthode s'applique et quand l'opération de recherche de la dérivée seconde n'est pas trop longue ou trop pénible, c'est généralement la méthode la plus rapide.

Appliquons maintenant la règle ci-dessus pour traiter analytiquement la fonction

$$M = x^2 + \frac{432}{x},$$

trouvée dans l'exemple étudié p. 118.

Solution. $f(x) = x^2 + \frac{432}{x}$.

1re opération. $f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}$.

(*) En un point où la courbe est *concave vers le haut*, on dit quelquefois que la courbe a une *courbure positive*, et en un point où elle est *concave vers le bas*, une *courbure négative*.

2e opération. $2x - \frac{432}{x^2} = 0,$

$x = 6$, valeur critique.

3e opération. $f''(x) = 2 + \frac{864}{x^3}.$

4e opération. $f''(6) = +.$

Par suite, $f(6) = 108$, valeur minimum.

Le travail de recherche des valeurs maxima et minima peut être fréquemment simplifié à l'aide des principes suivants, qui résultent immédiatement de notre discussion du sujet.

(*a*) *Les valeurs maxima et minima d'une fonction continue doivent se présenter alternativement.*

(*b*) *Quand c est une constante positive, $c \cdot f(x)$ passe par un maximum ou un minimum pour les valeurs de x qui donnent à $f(x)$ une valeur maximum ou une valeur minimum et seulement pour ces valeurs.*

Par suite, dans la détermination des valeurs critiques de x et dans l'application des règles pour trouver les maxima et les minima d'une fonction, tout facteur constant positif peut être négligé.

Quand c est négatif, $c \cdot f(x)$ est un maximum quand $f(x)$ est un minimum et inversement.

(*c*) *Si c est une constante,*

$$f(x) \qquad \textit{et} \qquad c + f(x)$$

passent par des valeurs maximum et minimum pour les mêmes valeurs de x.

Par suite, un terme constant peut être négligé dans la recherche des valeurs critiques de x et dans l'application des règles données ci-dessus.

En général, nous devons d'abord exprimer, d'après les conditions données par le problème, la fonction dont on demande de rechercher les valeurs maxima et minima, ainsi qu'il a été fait dans les deux exemples étudiés pages 115-119. Cette opération est parfois un problème d'une difficulté considérable.

On ne peut donner de règle applicable à tous les cas pour exprimer la fonction, mais dans un grand nombre de problèmes, nous pouvons être guidés par les directives générales qui suivent.

Directives générales.

(a) Exprimer la fonction dont on demande de rechercher le maximum ou le minimum dans le problème.

(b) Si l'expression résultante contient plus d'une variable, les conditions du problème devront fournir suffisamment de relations entre les variables pour que toutes puissent être exprimées en fonction d'une seule.

(c) Appliquer à la fonction résultante qui ne contient qu'une seule variable une des deux règles relatives à la recherche des valeurs maxima et minima (pp. 125 et 127).

(d) Dans les problèmes pratiques, il est généralement facile de trouver la valeur critique qui donnera un maximum et celle qui donnera un minimum sans qu'il soit toujours nécessaire d'effectuer les quatre opérations indiquées par les règles dont il s'agit.

(e) Tracer le graphique de la fonction (p. 116) *afin de contrôler les résultats obtenus par le calcul.*

PROBLÈMES

1. On désire faire une boîte sans couvercle du plus grand volume possible avec un morceau carré d'étain dont le côté est a, en enlevant des carrés égaux aux coins et en relevant ensuite l'étain verticalement pour former les côtés (*fig.* 49). Quelle doit être la longueur du côté des carrés enlevés ?

Fig. 49.

Solution. Soit $x =$ côté du petit carré $=$ profondeur de la boîte.

Alors $a - 2x =$ côté du carré formant le fond de la boîte ;

et le volume est $V = (a - 2x)^2 x$,

fonction dont on cherche le maximum quand x varie.

En appliquant la règle, nous avons

1re opération. $\frac{dV}{dx} = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = a^2 - 8ax + 12x^2.$

2e opération. La résolution de $a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$ donne les valeurs critiques

$$x = \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a}{6}.$$

Il est évident, d'après la figure 49, que $x = \frac{a}{2}$ doit donner un minimum, car alors tout l'étain serait découpé et il ne resterait pas de matériaux pour faire la

boîte. D'après la règle habituelle, on trouve que $x = \frac{a}{6}$ donne le volume maximum $\frac{2a^3}{27}$. Par suite, le côté du carré qui doit être enlevé est le sixième du côté du carré donné.

Le tracé du graphique de la fonction dans ce problème et dans les suivants est laissé aux soins du lecteur.

2. En supposant que la résistance d'une poutre à section rectangulaire transversale varie en raison directe de la largeur et du carré de la hauteur, on demande quelles sont les dimensions de la poutre de résistance maximum qu'on peut tirer d'un morceau de bois rond dont le diamètre est d.

Solution. Si $x =$ la largeur et $y =$ la hauteur, la poutre aura sa résistance maximum quand la fonction xy^2 atteindra son maximum.

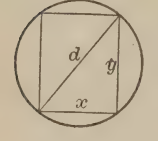


Fig. 50.

D'après la figure 50, $y^2 = d^2 - x^2$; par suite, nous devons examiner la fonction

$$f(x) = x(d^2 - x^2).$$

1re opération. $f'(x) = -2x^2 + d^2 - x^2 = d^2 - 3x^2.$

2e opération. $d^2 - 3x^2 = 0.$

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}} = \text{valeur critique qui donne un maximum.}$$

Par conséquent, si la poutre est coupée de façon que :

la hauteur $= \sqrt{\frac{2}{3}}$ du diamètre du morceau de bois,

et la largeur $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ du diamètre du morceau de bois,

la poutre atteindra sa résistance maximum.

3. Quelle est la largeur du rectangle d'aire maximum qui peut être inscrit dans un segment donné OAA′ de parabole ?

NOTE. — Si $OC = h$, $BC = h - x$ et $PP' = 2y$; par conséquent, l'aire du rectangle PDD′P′ est $2(h - x)y$.

Mais puisque P se trouve sur la parabole $y^2 = 2px$, la fonction que nous devons examiner est

$$2(h - x)\sqrt{2px}. \qquad \textit{Rép. } \text{Largeur} = \frac{2}{3}h.$$

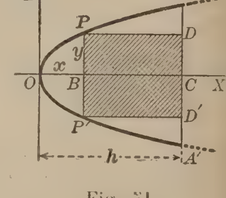


Fig. 51.

4. Trouver la hauteur du cône de volume maximum qui peut être inscrit dans une sphère de rayon r.

NOTE. — Volume du cône $= \frac{1}{3}\pi x^2 y$.

Mais, $x^2 = BC \times CD = y(2r - y).$

Par conséquent, la fonction à étudier est

$$f(y) = \frac{\pi}{3} y^2(2r - y).$$

Fig. 52.

Rép. Hauteur du cône $= \frac{4}{3} r$.

5. Trouver la hauteur du cylindre de volume maximum qui peut être inscrit dans un cône droit donné.

NOTE. — Soit $AC = r$ et $BC = h$.

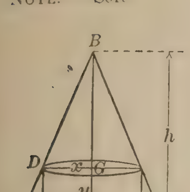


Fig. 53.

Volume du cylindre $= \pi x^2 y$.

Mais, d'après les triangles semblables ABC et DBG,

$$\frac{r}{x} = \frac{h}{h-y}, \qquad x = \frac{r(h-y)}{h}.$$

Par suite, la fonction à étudier est

$$f(y) = \frac{r^2}{h^2} y(h-y)^2.$$

Rép. Hauteur $= \frac{1}{3} h$.

6. Diviser a en deux parties telles que leur produit soit maximum.

Rép. Chaque partie $= \frac{a}{2}$.

7. Diviser 10 en deux parties telles que la somme du double de l'une et du carré de l'autre soit minimum. *Rép.* 9 et 1.

8. Trouver le nombre dont l'excès sur son carré soit le plus grand possible. *Rép.* $\frac{1}{2}$.

9. Quel est le nombre qui ajouté à son inverse donne la somme la plus petite possible ? *Rép.* 1.

10. En supposant que la résistance d'une poutre à section rectangulaire transversale varie en raison directe de la largeur et du cube de la hauteur, quelle est la largeur de la poutre de résistance maximum qu'on peut tirer d'un morceau de bois de 16^{cm} de diamètre ? *Rép.* Largeur $= 8^{cm}$.

11. On doit construire un réservoir à eau à base carrée et ouvert au sommet dont la contenance soit de 64^{m^3}. Si le coût des côtés est de 1 franc par mètre carré, et celui du fond de 2 francs par mètre carré, on demande quelles sont les dimensions pour lesquelles la dépense sera minimum et quelle sera cette dépense. *Rép.* : Côté de la base $= 4^m$, hauteur $= 4^m$, dépense $= 96$ francs.

12. Un terrain rectangulaire doit être acheté dans le but de tracer une piste d'un demi-kilomètre ayant ses côtés en ligne droite et ses extrémités semi-circulaires. En outre, on doit acheter un morceau de terrain de 35^m de largeur le long de chaque côté pour les tribunes, terrain d'entraînement, etc. Si le terrain coûte 200 francs l'are, quelle sera la dépense maximum pour l'achat du terrain nécessaire ?

13. Un bateau-torpille est ancré à 9^{km} du point le plus rapproché d'un rivage et l'on désire envoyer un messager dans le plus court délai possible à un camp militaire situé à 15^{km} de ce point le long de la côte. Sachant que ce messager peut marcher à raison de 5^{km} par heure, et ramer seulement à raison de 4, on demande l'endroit où il doit aborder. *Rép.* A 3^{km} du camp.

14. Un gazomètre est formé d'un récipient cylindrique fermé par le haut et ouvert par le bas par où il plonge dans l'eau. Quelles devraient être ses proportions pour un volume donné de façon à employer le moins de matériaux possible (ce qui donnerait en même temps le poids minimum) ?

Rép. Diamètre $=$ double de la hauteur.

15. Quelles devraient être les dimensions et le poids d'un gazomètre de 8.000.000$^{m^3}$ de capacité, construit le plus économiquement possible en tôle de $\frac{1}{10}$ de centimètre d'épaisseur et pesant 7 kg. $\frac{1}{2}$ par mètre carré?

Rép. Hauteur, 137^m; diamètre, 273^m; poids, 440 tonnes.

16. Une feuille de papier doit contenir 18$^{cm^2}$ de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent avoir 2^{cm} chacune et celles des côtés 1^{cm}. Déterminer les dimensions de la feuille pour lesquelles il faudra le moins de papier possible. *Rép.* 5^{cm} sur 10.

17. Un fabricant de boîtes de carton a en stock une certaine quantité de feuilles de carton de 30^{cm} sur 14. Avec ces matériaux, il veut fabriquer des boîtes ouvertes par le haut en enlevant des carrés égaux à chaque coin et en relevant ensuite le carton verticalement pour former les côtés. Trouver le côté du carré qui devra être enlevé pour donner aux boîtes un volume maximum. *Rép.* 3^{cm}.

18. Un couvreur veut faire une gouttière ouverte de capacité maximum dont le fond et les côtés aient chacun 4^{cm} de large et dont les côtés aient la même pente. Quelle doit être la largeur au sommet? *Rép.* 8^{cm}.

Fig. 54.

19. En supposant que l'énergie dépensée pour faire marcher un bateau à vapeur varie comme le cube de sa vitesse, trouver son taux de vitesse le plus économique par heure quand on le fait marcher contre un courant qui fait c kilomètres à l'heure.

Note. — Soit $v =$ la vitesse la plus économique;
alors $av^3 =$ l'énergie dépensée par heure, a étant une constante dépendant des conditions particulières du problème
et $v - c =$ la distance réelle franchie par heure.

Par suite $\frac{av^3}{v-c}$ est l'énergie dépensée par kilomètre de distance franchie et c'est, par conséquent, la fonction dont nous avons à chercher le minimum. *Rép.* $v = \frac{3}{2}c$.

20. Démontrer qu'une tente conique de capacité donnée nécessite le minimum de toile quand la hauteur est égale à $\sqrt{2}$ fois le rayon de la base. Montrer que quand la toile est mise à plat, elle forme un secteur de cercle de 152°9 et qu'une tente en forme de cloche de 10^m de hauteur aurait alors une base de 14^m de diamètre et nécessiterait 272$^{m^2}$ d'étoffe.

21. On doit construire une chaudière cylindrique à vapeur d'une contenance de 1000 décimètres cubes. Les matériaux de la paroi latérale coûtent 2 francs par décimètre carré et ceux des extrémités 3 francs par décimètre carré. Trouver le rayon pour que la dépense soit minimum. *Rép.* $\frac{10}{\sqrt[3]{3\pi}}$ dm.

22. Dans le coin d'un champ limité par deux routes perpendiculaires se trouve une fontaine située à 6 décamètres d'une route et à 8 décamètres de l'autre. Comment une route en ligne droite longeant cette fontaine et coupant le moins possible du champ pourrait-elle être tracée?

Rép. A 12 et 16 décamètres du coin.

Quelle serait la longueur de la route la plus courte qui serait ainsi tracée?

Rép. $\left(6^{\frac{2}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ décamètres.

23. Montrer que le carré est le rectangle de périmètre maximum qui puisse être inscrit dans un cercle donné.

24. Deux perches de hauteur a et b mètres sont debout et à une distance de c mètres. Trouver un point sur la ligne joignant leurs bases tel que la somme des carrés des distances de ce point aux sommets des perches soit minimum.

Rép. A moitié de la distance qui sépare les deux perches.

Quand la somme de ces distances sera-t-elle minimum ?

25. Un réservoir conique ouvert au sommet doit être construit de façon à contenir V mètres cubes. Déterminer la forme pour laquelle la quantité de matériaux employés est minimum.

26. Un triangle isocèle a une base de 12 mètres de longueur et une hauteur de 10 mètres. Trouver le rectangle d'aire maximum qui puisse être inscrit dans ce triangle, un côté du rectangle reposant sur la base du triangle.

27. Diviser le nombre 4 en deux parties telles que la somme du cube d'une partie et de trois fois le carré de l'autre ait une valeur maximum.

28. Diviser le nombre a en deux parties telles que la somme du cube d'une partie et de la quatrième puissance de l'autre soit maximum.

29. Une bouée ayant la forme d'un double cône doit être construite à l'aide de deux plaques de fer circulaires égales de rayon r. Trouver le rayon de la base du cône quand la bouée a son déplacement maximum (volume maximum).

Rép. $r\sqrt{\frac{2}{3}}$.

30. On remplit de vin un verre de forme conique dont la profondeur est a et l'angle générateur α et l'on y jette avec précaution une sphère de volume tel qu'elle produise le débordement maximum. Montrer que le rayon de la sphère est

$$\frac{a \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos 2\alpha}.$$

31. Un mur de 27 mètres de hauteur est à 8 mètres d'une maison. Trouver la longueur de l'échelle la plus courte qui atteindrait la maison si une extrémité repose sur le sol extérieurement au mur par rapport à la maison. *Rép.* $13\sqrt{13}$.

32. Un vaisseau mouille l'ancre à 3^{km} du rivage, et en face d'un point situé 5^{km} plus loin le long de la côte, un autre vaisseau est ancré à 9^{km} du rivage. Un canot du premier vaisseau doit conduire un passager au rivage et aller ensuite vers l'autre vaisseau. Quel est le trajet minimum du canot ? *Rép.* 13^{km}.

33. Une traverse en acier de 25^{m} de long est déplacée sur des roulettes le long d'un chemin de 12,8 mètres de largeur et dans un couloir à angles droits avec le chemin. Si on néglige la largeur de la traverse, quelle largeur doit avoir le couloir ? *Rép.* 5,4 mètres.

34. Un mineur veut creuser un tunnel d'un point A à un point B qui se trouve à 300^{m} au-dessous de A et à 500^{m} à l'Est du même point. Au-dessous du niveau de A se trouve un lit de rochers et au-dessus de A, de la terre végétale. Si le coût du creusement dans la terre est de 5^{f} par mètre linéaire et de 15^{f} dans le roc, trouver quelle sera la dépense minimum pour le creusement du tunnel.

Rép. 6742,65 francs.

35. Un charpentier a 108 mètres carrés de bois avec lequel il doit construire une boîte à base carrée et ouverte au sommet. Trouver les dimensions de la boîte de contenance maximum qu'il peut faire. *Rép.* $6 \times 6 \times 3$.

36. Trouver le triangle rectangle d'aire maximum qui peut être construit sur une ligne de longueur h comme hypoténuse.

Rép. $\frac{h}{\sqrt{2}}$ = longueur de chacun des côtés de l'angle droit.

37. Quel est le triangle isocèle d'aire maximum qui peut être inscrit dans un cercle donné ? *Rép.* Un triangle équilatéral.

38. Trouver la hauteur du rectangle maximum qui peut être inscrit dans un triangle rectangle de base b et de hauteur h. *Rép.* Hauteur $= \frac{h}{2}$.

39. Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximum qu'on peut inscrire dans l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. *Rép.* $a\sqrt{2}$ et $b\sqrt{2}$; aire $= 2ab$.

40. Trouver la hauteur du cylindre droit de volume maximum qu'on peut inscrire dans une sphère de rayon r. *Rép.* Hauteur du cylindre $= \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

41. Trouver la hauteur du cylindre droit de surface latérale maximum qu'on peut inscrire dans une sphère donnée. *Rép.* Hauteur du cylindre $= r\sqrt{2}$.

42. Quelles sont les dimensions du prisme hexagonal droit de surface minimum dont le volume soit de 36 mètres cubes ?

Rép. Hauteur $= 2\sqrt{3}$; côté de l'hexagone $= 2$.

43. Trouver la hauteur du cône droit de volume minimum circonscrit à une sphère donnée. *Rép.* Hauteur $= 4r$, et volume $= 2 \times$ volume de la sphère.

44. Un cône droit de volume maximum est inscrit dans un cône droit donné, le sommet du cône intérieur étant au centre de la base du cône donné. Montrer que la hauteur du cône inscrit est le tiers de la hauteur du cône donné.

45. Étant donné un point de l'axe de la parabole $y^2 = 2px$ à une distance a du sommet, trouver l'abscisse du point de la courbe le plus rapproché du point donné. *Rép.* $x = a - p$.

46. Quelle est la longueur de la ligne la plus courte qui puisse être menée tangente à l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ et rencontrant les axes de coordonnées ?

Rép. $a + b$.

47. Une fenêtre normande se compose d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Étant donné le périmètre, on demande la hauteur et la largeur de la fenêtre quand la quantité de lumière reçue est maximum.

Rép. Rayon du cercle = hauteur du rectangle.

48. Une tapisserie de 7^{dm} de hauteur est accrochée à un mur de telle sorte que sa bordure inférieure soit à 9^{dm} au-dessus de l'œil d'un observateur. A quelle distance du mur devrait-il se tenir pour la voir le mieux possible ? *Rép.* 12^{dm}.

NOTE. — L'angle vertical formé par la tapisserie et l'œil de l'observateur doit être maximum.

49. Quelles sont les proportions les plus économiques qu'on puisse donner à un pot d'étain de capacité donnée, compte tenu de la perte ?

Rép. Hauteur $= \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \times$ diamètre de la base.

NOTE 1. — Il n'y a aucune perte en coupant l'étain pour la paroi latérale du pot; mais pour le couvercle et le fond on utilise un hexagone d'étain circonscrivant les pièces circulaires.

Fig. 55.

NOTE 2. — Si on ne tient pas compte de la perte, la hauteur = le diamètre.

NOTE 3. — Nous savons que la forme d'une alvéole de nid d'abeille est hexagonale, ce qui lui donne une certaine contenance pour le miel avec le maximum d'économie pour la cire.

50. Une auge ouverte de forme cylindrique est construite en courbant une feuille d'étain donnée de largeur $2a$. Trouver le rayon du cylindre dont l'auge forme une partie quand la capacité de cette auge est maximum.

Réponse: rayon $= \frac{2a}{\pi}$, c'est-à-dire que la feuille d'étain doit être courbée en forme de demi-cercle.

51. Un poids W doit être soulevé au moyen d'un levier avec une force F appliquée à une extrémité, le point d'appui se trouvant à l'autre extrémité. Si le poids à soulever est suspendu en un point situé à une distance a du point d'appui et que le poids du levier soit de w kilogrammes par mètre linéaire, quelle doit être la longueur du levier pour que la force nécessaire pour soulever le poids soit minimum ?

Rép. $x = \sqrt{\frac{2aW}{w}}$ mètres.

Fig. 56.

52. Un arc électrique lumineux doit être placé directement au-dessus d'une pelouse circulaire de 100^{m} de diamètre. En supposant que l'intensité de la lumière varie en raison directe du sinus de l'angle d'incidence et en raison inverse du carré de la distance, on demande à quelle hauteur doit être suspendu l'arc électrique pour qu'une allée tracée autour de la circonférence de la pelouse soit éclairée le mieux possible.

Rép. $\frac{50}{\sqrt{2}}$ mètres.

53. Le coin inférieur d'une feuille de papier de largeur a est replié de façon à toucher le bord intérieur de la page (*fig.* 57). (a) Trouver la largeur de la partie repliée quand la longueur du pli est minimum. (b) Trouver la largeur quand la surface repliée est minimum.

Rép. (a) $\frac{3}{4}a$; (b) $\frac{2}{3}a$.

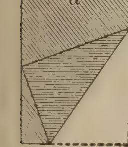


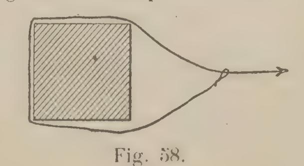
Fig. 57.

54. On doit construire une palissade rectangulaire limitant une certaine surface. Sachant que l'on peut utiliser un mur en pierres déjà construit pour l'un des côtés, on demande de trouver les dimensions pour lesquelles le coût de la construction serait minimum.

Rép. Côté parallèle au mur = deux fois la longueur de chaque extrémité.

55. Une vache est attachée par une corde parfaitement lisse à un gros pilier carré au moyen d'un nœud coulant (*fig.* 58). Si la vache tire sur la corde dans la direction indiquée par la figure, quel sera l'angle formé par la corde avec le pilier?

Rép. 30°.


Fig. 58.

56. Quand on tient compte de la résistance de l'air, l'inclinaison d'un pen-

dule sur la verticale peut être donnée par la formule

$$\theta = \alpha e^{-kt} \cos(nt + \varepsilon).$$

Montrer que les élongations maxima se produisent à des intervalles de temps égaux à $\frac{\pi}{n}$.

57. On veut mesurer une certaine grandeur inconnue x avec précision. Supposons qu'on fasse avec un soin égal n observations de la grandeur, ayant donné les résultats ci-après

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n.$$

Les erreurs de ces observations sont évidemment

$$x - a_1,\ x - a_2,\ x - a_3, \ldots\ldots,\ x - a_n,$$

certaines étant positives et d'autres négatives.

On convient que la valeur de x la plus probable est telle qu'elle rend minimum la somme des carrés des erreurs, c'est-à-dire

$$(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + \cdots + (x - a_n)^2.$$

Montrer que cette relation donne la moyenne arithmétique des observations comme la valeur de x la plus probable.

58. Le moment fléchissant en un point B, d'une poutre de longueur l, uniformément chargée (*fig.* 59), est donné par la formule

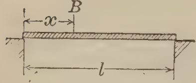


Fig. 59.

$$M = \frac{1}{2} wlx - \frac{1}{2} wx^2,$$

dans laquelle w = la charge par unité de longueur.

Montrer que le moment fléchissant maximum est au centre de la poutre.

59. Si la perte totale par kilomètre dans un conducteur électrique est

$$W = c^2 r + \frac{t^2}{r}$$

où c est le courant en ampères, r la résistance en ohms par kilomètre, et t une constante dépendant du revêtement et de la dépréciation des matériaux, quelle est la relation qui existe entre c, r et t quand la perte est minimum ?

Rép. $cr = t$.

60. Le câble d'un télégraphe sous-marin se compose d'un faisceau de fils de cuivre recouvert d'une matière non conductrice. Si x désigne le rapport du rayon du faisceau à l'épaisseur du revêtement, on sait que la vitesse de transmission des signaux varie comme

$$x^2 \log \frac{1}{x}.$$

Montrer que la vitesse maximum est atteinte quand $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

61. En supposant que la puissance fournie par une pile de Volta soit donnée par la formule

$$P = \frac{E^2 R}{(r + R)^2},$$

dans laquelle E = une force électromotrice constante, r = une résistance interne constante, R = la résistance externe, montrer que P est maximum quand $r = R$.

62. La force exercée par un courant électrique circulaire de rayon a sur un petit aimant dont l'axe coïncide avec celui du cercle varie comme

$$\frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

où x = la distance de l'aimant au plan du cercle.

Démontrer que la force est maximum quand $x = \frac{a}{2}$.

63. Nous avons deux sources de chaleur en A et B (*fig.* 60) ayant respectivement pour intensités a et b. L'intensité totale de chaleur à une distance x de A est donnée par la formule

Fig. 60.

$$I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(d - x)^2}.$$

Montrer que la température en P (*fig.* 60) sera minimum quand

$$\frac{d - x}{x} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}},$$

c'est-à-dire quand les distances BP et AP sont dans le même rapport que les racines cubiques des intensités de chaleur correspondantes. La distance de P à A est

$$x = \frac{a^{\frac{1}{3}} d}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}.$$

64. La portée OX d'un projectile dans un espace vide (*fig.* 61) est donnée par la formule

$$R = \frac{v_1^2 \sin 2\varphi}{g},$$

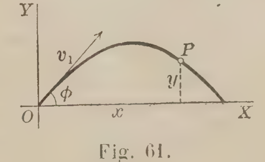


Fig. 61.

où v_1 est la vitesse initiale, g l'accélération due à la pesanteur, φ l'angle de projection avec l'horizontale. Trouver l'angle de projection qui donne la portée maximum pour une vitesse initiale donnée.

Rép. $\varphi = 45°$.

65. La durée totale de projection du projectile dans le problème précédent est donnée par la formule

$$T = \frac{2v_1 \sin \varphi}{g}.$$

Sous quel angle devrait-il être projeté pour que la durée de projection soit maximum ?

Rép. $\varphi = 90°$.

66. Le temps que met une balle pour rouler sur un plan incliné AB (*fig.* 62) est donné par la formule

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g \sin 2\varphi}}.$$

En négligeant les frottements, etc., quelle doit être la valeur de φ pour que la rapidité de la descente soit maximum? *Rép.* $\varphi = 45°$.

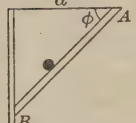


Fig. 62.

67. Examiner la fonction $(x-1)^2(x+1)^3$ en ce qui concerne ses valeurs maxima et minima. Employer la première méthode, p. 125.

Solution.

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^3.$$

1re opération.

$$f'(x) = 2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2$$
$$= (x-1)(x+1)^2(5x-1).$$

Fig. 63.

2e opération. $(x-1)(x+1)^2(5x-1) = 0.$

$x = 1, -1, \frac{1}{5}$, qui sont les valeurs critiques.

3e opération. $f'(x) = 5(x-1)(x+1)^2\left(x-\frac{1}{5}\right)$.

4e opération. Examinons d'abord la fonction pour la valeur critique $x = 1$ (C dans la figure 63).

Quand $x < 1$, $f'(x) = 5(-)(+)^2(+) = -$.

Quand $x > 1$, $f'(x) = 5(+)(+)^2(+) = +$.

Par conséquent, quand $x = 1$, la fonction passe par une valeur minimum $f(1) = 0$ (ordonnée de C).

Examinons maintenant la fonction pour la valeur critique $x = \frac{1}{5}$ (B dans la figure 63).

Quand $x < \frac{1}{5}$, $f'(x) = 5(-)(+)^2(-) = +$.

Quand $x > \frac{1}{5}$, $f'(x) = 5(-)(+)^2(+) = -$.

Par conséquent, quand $x = \frac{1}{5}$, la fonction passe par une valeur maximum $f\left(\frac{1}{5}\right) = 1{,}11$ (ordonnée de B).

Examinons enfin la fonction pour la valeur critique $x = -1$ (A dans la figure 63).

Quand $x < -1$, $f'(x) = 5(-)(-)^2(-) = +$.

Quand $x > -1$, $f'(x) = 5(-)(+)^2(-) = +$.

Par conséquent, quand $x = -1$, la fonction n'a ni valeur maximum ni valeur minimum.

68. Examiner la fonction $a - b(x-c)^{\frac{2}{3}}$ en ce qui concerne ses valeurs maxima et minima (*fig.* 64).

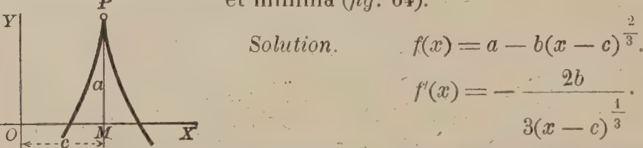


Fig. 64.

Solution. $f(x) = a - b(x-c)^{\frac{2}{3}}$.

$$f'(x) = -\frac{2b}{3(x-c)^{\frac{1}{3}}}.$$

Puisque $x = c$ est une valeur critique pour laquelle $f'(x) = \infty$, mais pour laquelle $f(x)$ n'est pas infinie, examinons la fonction en ce qui concerne ses valeurs maxima et minima quand $x = c$.

Quand $x < c, \quad f'(x) = + \cdot$
Quand $x > c, \quad f'(x) = - \cdot$

Par suite, quand $x = c = \mathrm{OM}$, la fonction passe par un maximum

$$f(c) = a = \mathrm{MP}.$$

Examiner les fonctions suivantes en ce qui concerne leurs valeurs maxima et minima.

69. $(x-3)^2(x-2)$. *Rép.* $x = \frac{7}{3}$, donne un max. $= \frac{4}{27}$;
$x = 3$, donne un min. $= 0$.

70. $(x-1)^3(x-2)^2$. $x = \frac{8}{5}$, donne un max. $= 0{,}03456$;
$x = 2$, donne un min. $= 0$;
$x = 1$, ne donne ni max. ni min.

71. $(x-4)^5(x+2)^4$. $x = -2$, donne un max. ;
$x = \frac{2}{3}$, donne un min. ;
$x = 4$, ne donne ni max. ni min.

72. $(x-2)^5(2x+1)^4$. $x = -\frac{1}{2}$, donne un max. ;
$x = \frac{11}{18}$, donne un min. ;
$x = 2$, ne donne ni max. ni min.

73. $(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2$. $x = \frac{1}{2}$, donne un max. ;
$x = -1$ et 5, donne un min.

74. $(2x-a)^{\frac{1}{3}}(x-a)^{\frac{2}{3}}$. $x = \dfrac{2a}{3}$, donne un max. ;
$x = a$, donne un min. ;
$x = \dfrac{a}{2}$, ne donne ni max. ni min.

75. $x(x-1)^2(x+1)^3$. $x = \frac{1}{2}$, donne un max. ;
$x = 1$ et $-\frac{1}{3}$, donne un min. ;
$x = -1$, ne donne ni max. ni min.

76. $x(a+x)^2(a-x)^3$. $x = -a$ et $\dfrac{a}{3}$, donne un max. ;
$x = -\dfrac{a}{2}$, donne un min. ;
$x = a$, ne donne ni max. ni min.

77. $b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$. $x = a$, donne un min. $= b$.

78. $a - b(x-c)^{\frac{1}{3}}$. Ni max. ni min.

79. $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$. $x = 4$, donne un max. ;
$x = 16$, donne un min.

80. $\dfrac{(a-x)^3}{a-2x}$. $x = \dfrac{a}{4}$, donne un min.

81. $\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$. $x=\frac{1}{2}$, donne un min.

82. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$. $x=\sqrt{2}$, donne un min. $=12\sqrt{2}-17$;
$x=-\sqrt{2}$, donne un max. $=-12\sqrt{2}-17$;
$x=-1,-2$, ne donne ni max. ni min.

83. $\dfrac{(x-a)(b-x)}{x^2}$. $x=\dfrac{2ab}{a+b}$, donne un max. $=\dfrac{(a-b)^2}{4ab}$.

84. $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{a-x}$. $x=\dfrac{a^2}{a-b}$, donne un min. ;
$x=\dfrac{a^2}{a+b}$, donne un max.

85. Examiner x^3-3x^2-9x+5 en ce qui concerne ses valeurs maxima et minima. Employer la seconde méthode, p. 126.

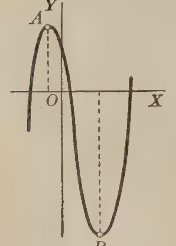


Fig. 65.

Solution. $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$.
1re opération. $f'(x)=3x^2-6x-9$.
2e opération. $3x^2-6x-9=0$;

par suite, les valeurs critiques sont $x=-1$ et 3.

3e opération. $f''(x)=6x-6$.
4e opération. $f''(-1)=-12$,
$f(-1)=10=$ (ordonnée de A) $=$ valeur maximum.
$f''(3)=+12$,
$f(3)=-22$ (ordonnée de B) $=$ valeur minimum.

86. Examiner $\sin^2 x \cos x$ en ce qui concerne ses valeurs maxima et minima (*fig.* 66).

Fig. 66.

Solution. $f(x)=\sin^2 x \cos x$.
1re opération.
$f'(x)=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$.
2e opération.
$2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=0$;

par suite, les valeurs critiques sont

$$x=n\pi \quad \text{et} \quad x=n\pi\pm\text{arc tg}\sqrt{2}=n\pi\pm\alpha.$$

3e opération. $f''(x)=\cos x\,(2\cos^2 x-7\sin^2 x)$.
4e opération. $f''(0)=+$ $f(0)=0=$ valeur minimum en O.
$f''(\pi)=-$ $f(\pi)=0=$ valeur maximum en C.
$f''(\alpha)=-$ $f(\alpha)=$ valeur maximum en A.
$f''(\pi-\alpha)=+$ $f(\pi-\alpha)=$ valeur minimum en B, etc.

Examiner les fonctions suivantes en ce qui concerne leurs valeurs maxima et minima.

87. $3x^3 - 9x^2 - 27x + 30$. *Rép.* $x = -1$, donne un max. $= 45$; $x = 3$, donne un min. $= -51$.

88. $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$. $x = 1$, donne un max. $= -3$; $x = 6$, donne un min. $= -128$.

89. $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. $x = 1$, donne un max. $= \frac{7}{3}$; $x = 3$, donne un min. $= 1$.

90. $2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$. $x = 2$, donne un max. $= 38$; $x = 3$, donne un min. $= 37$.

91. $x^3 - 9x^2 + 15x - 3$. $x = 1$, donne un max. $= 4$; $x = 5$, donne un min. $= -28$.

92. $x^3 - 3x^2 + 6x + 10$. Ni max. ni min.

93. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$. $x = 1$, donne un max. $= 2$; $x = 3$, donne un min. $= -26$; $x = 0$, ne donne ni max. ni min.

94. $3x^5 - 125x^3 + 2160x$. $x = -4$ et 3, donne un max.; $x = -3$ et 4, donne un min.

95. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$.

96. $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$.

97. $x^4 - 2x^2 + 10$.

98. $x^4 - 4$.

99. $x^3 - 8$.

100. $4 - x^6$.

101. $\sin x(1 + \cos x)$. *Rép.* $x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$, donne un max. $= \frac{3}{4}\sqrt{3}$; $x = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$, donne un min. $= -\frac{3}{4}\sqrt{3}$; $x = n\pi$, ne donne ni max. ni min.

102. $\frac{x}{\log x}$. $x = e$, donne un min. $= e$; $x = 1$, ne donne ni max. ni min.

103. $\log \cos x$. $x = 2n\pi$, donne un max.

104. $ae^{kx} + be^{-kx}$. $x = \frac{1}{k} \log \sqrt{\frac{b}{a}}$, donne un min. $= 2\sqrt{ab}$.

105. x^x. $x = \frac{1}{e}$, donne un min.

106. $x^{\frac{1}{x}}$. $x = e$, donne un max.

107. $\cos x + \sin x$. $x = \frac{\pi}{4}$, donne un max. $= \sqrt{2}$; $x = \frac{5\pi}{4}$, donne un min. $= -\sqrt{2}$.

108. $\sin 2x - x$. $x = \frac{\pi}{6}$, donne un max.; $x = -\frac{\pi}{6}$, donne un min.

109. $x + \operatorname{tg} x$. Ni max. ni min.

110. $\sin^3 x \cos x$. $x = n\pi + \frac{\pi}{3}$, donne un max. $= \frac{3}{16}\sqrt{3}$; $x = n\pi - \frac{\pi}{3}$, donne un min. $= -\frac{3}{16}\sqrt{3}$; $x = n\pi$, ne donne ni max. ni min.

111. $x \cos x$.	$x = \cot g\, x$, donne un max.
112. $\sin x + \cos 2x$.	$x = \arcsin \frac{1}{4}$, donne un max.;
	$x = \frac{\pi}{2}$, donne un min.
113. $2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$.	$x = \frac{\pi}{4}$, donne un max.
114. $\frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$.	$x = \frac{\pi}{4}$, donne un max.
115. $\frac{x}{1 + x \operatorname{tg} x}$.	$x = \cos x$, donne un max.;
	$x = -\cos x$, donne un min.

85. Points d'inflexion. Définition. — Les *points d'inflexion* séparent les arcs dont la concavité est tournée vers les y positifs (arcs concaves vers le haut) de ceux dont la concavité est tournée vers les y négatifs (arcs concaves vers le bas) (*). Ainsi, quand une courbe $y = f(x)$ passe (comme en B) (*fig.* 67) de concave vers le haut (comme en A) à concave vers le bas (comme en C) ou inversement, un point tel que B est appelé un point d'inflexion.

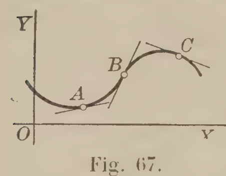


Fig. 67.

Il résulte immédiatement de la discussion du § 84, qu'en A, $f''(x) = +$, et en C, $f''(x) = -$. Pour changer de signe, la dérivée seconde doit passer par zéro (**); par suite, nous avons

(23) **aux points d'inflexion,** $f''(x) = 0$.

La résolution de l'équation résultant de (**23**) donne les abscisses des points d'inflexion. Pour déterminer la direction de la courbure dans le voisinage d'un point d'inflexion, examinons les signes pris par $f''(x)$ pour des valeurs de x, d'abord un peu plus petites et ensuite un peu plus grandes que l'abscisse de ce point.

Si $f''(x)$ change de signe, nous avons un point d'inflexion et les signes obtenus déterminent si la courbe est concave vers le haut ou vers le bas dans le voisinage de chaque point d'inflexion.

(*) Les points d'inflexion peuvent également être définis comme étant des points où

$$(a) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \text{ change de signe.}$$

ou

$$(b) \qquad \frac{d^2x}{dy^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{dy^2} \text{ change de signe.}$$

(**) On suppose que $f'(x)$ et $f''(x)$ sont continues. La solution de l'Ex. 2, p. 144, montre comment il convient de discuter un cas où $f'(x)$ et $f''(x)$ sont toutes les deux infinies. Évidemment les points anguleux (voir p. 302) sont exclus, puisqu'en ces points $f'(x)$ est discontinue.

Le lecteur devra observer qu'en un point où la courbe est concave vers le haut (comme en A), la courbe se trouve au-dessus de la tangente et qu'en un point où la courbe est concave vers le bas (comme en C) la courbe se trouve au-dessous de la tangente. En un point d'inflexion (comme en B), la tangente traverse évidemment la courbe.

Nous donnons ci-après une **règle pour trouver les points d'inflexion** d'une courbe dont l'équation est $f(x)$. Cette règle renferme également des directives pour examiner la direction de la courbure d'une courbe dans le voisinage de chaque point d'inflexion.

1re opération. Trouver $f''(x)$.

2e opération. Poser $f''(x)=0$ et résoudre l'équation résultante quant aux racines réelles.

3e opération. Écrire $f''(x)$ sous forme de facteurs.

4e opération. Examiner les signes pris par $f''(x)$ pour des valeurs de x, d'abord un peu plus petites et ensuite un peu plus grandes que chacune des racines trouvées dans la 2e opération. Si $f''(x)$ change de signe, nous avons un point d'inflexion.

Quand $f''(x)=+$, la courbe est concave vers le haut (*).

Quand $f''(x)=-$, la courbe est concave vers le bas.

EXEMPLES

Examiner les courbes ci-après en ce qui concerne les points d'inflexion et la direction de la courbure.

1. $y=3x^4-4x^3+1$.

Fig. 68.

Solution. $f(x)=3x^4-4x^3+1$.

1re opération. $f''(x)=36x^2-24x$.

2e opération. $36x^2-24x=0$.

$x=\frac{2}{3}$ et $x=0$ sont les valeurs critiques.

3e opération. $f''(x)=36x\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

4e opération. Quand $x<0$, $f''(x)=+$;

et quand $x>0$, $f''(x)=-$.

La courbe est concave vers le haut à gauche et concave vers le bas à droite de $x=0$ (A dans la figure 68).

Quand $x<\frac{2}{3}$, $f''(x)=-$ et quand $x>\frac{2}{3}$, $f''(x)=+$.

(*) On peut facilement se souvenir de ces résultats en disant qu'un vaisseau qui aurait la forme de la courbe à l'endroit où elle est concave par en haut contiendrait (+) de l'eau et qu'il en rejetterait (−) dans le cas où il aurait la forme de la courbe à l'endroit où elle est concave par en bas.

La courbe est concave vers le bas à gauche et concave vers le haut à droite de $x = \frac{2}{3}$ (B dans la figure 68).

La courbe est évidemment concave vers le haut en tout point à gauche de A, concave vers le bas entre A (0,1) et B $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$ et concave vers le haut en tout point à droite de B.

2. $(y-2)^3 = x - 4$.

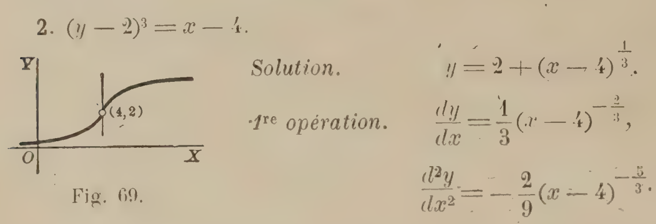


Fig. 69.

Solution. $y = 2 + (x-4)^{\frac{1}{3}}$.

1re opération. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}.$$

2e opération. Quand $x = 4$, les dérivées première et seconde sont infinies.

3e opération. Quand $x < 4$, $\frac{d^2y}{dx^2} = +$; mais quand $x > 4$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -$.

Nous pouvons donc conclure que la tangente au point (4,2) est perpendiculaire à l'axe des x, qu'à gauche de (4,2) la courbe est concave vers le haut et qu'à droite de (4,2) elle est concave vers le bas. Par conséquent (4,2) doit être considéré comme un point d'inflexion.

3. $y = x^2$. *Rép.* Concave vers le haut en tous les points.

4. $y = 5 - 2x - x^2$. Concave vers le bas en tous les points.

5. $y = x^3$. Concave vers le bas à gauche et concave vers le haut à droite de (0, 0).

6. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. Concave vers le bas à gauche et concave vers le haut à droite de (1, — 2).

7. $y = a + (x-b)^3$. Concave vers le bas à gauche et concave vers le haut à droite de (b, a).

8. $a^2y = \frac{x^3}{3} - ax^2 + 2a^3$. Concave vers le bas à gauche et concave vers le haut à droite de $\left(a, \frac{4a}{3}\right)$.

9. $y = x^4$. Concave vers le haut en tous les points.

10. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$. Concave vers le haut à gauche de $x = 2$, concave vers le bas entre $x = 2$ et $x = 4$, concave vers le haut à droite de $x = 4$.

11. $y = \sin x$. Les points d'inflexion sont $x = n\pi$, n étant un nombre entier quelconque.

12. $y = \operatorname{tg} x$. Les points d'inflexion sont $x = n\pi$, n étant un entier quelconque.

13. Montrer qu'aucune section conique ne peut avoir de point d'inflexion.

14. Montrer que les graphiques de e^x et de $\log x$ n'ont aucun point d'inflexion.

86. Tracé des courbes. — La méthode élémentaire pour tracer

(ou construire) une courbe dont l'équation est donnée en coordonnées rectangulaires, méthode avec laquelle le lecteur est déjà familiarisé, consiste à résoudre l'équation donnée par rapport à y (ou x), à donner à x (ou y) des valeurs arbitraires, à calculer les valeurs correspondantes de y (ou de x), à construire les points respectifs ainsi déterminés et à tracer une courbe passant par ces points en se laissant guider par le sentiment de la continuité ; la courbe ainsi obtenue est approximativement la courbe demandée. Ce procédé est extrêmement laborieux et dans le cas où l'équation de la courbe est d'un degré supérieur au second, la formule de résolution d'une telle équation peut se prêter difficilement au calcul ; ce procédé peut même être complètement en défaut, puisqu'il n'est pas toujours possible de résoudre l'équation par rapport à y ou à x.

Ce qu'on recherche habituellement, c'est la forme générale d'une courbe et l'analyse nous fournit des méthodes pour déterminer la forme d'une courbe au moyen de très peu de calculs.

La dérivée première nous donne la pente de la courbe en un point quelconque ; la dérivée seconde détermine les intervalles dans lesquels la courbe est concave vers le haut ou concave vers le bas et les points d'inflexion séparent ces intervalles ; les points maxima sont les « points hauts » de la courbe et les points minima en sont les « points bas ». Comme guide dans ce travail, le lecteur peut suivre la règle ci-après :

Règle pour le tracé des courbes. Coordonnées rectangulaires.

1re opération. Trouver la dérivée première ; l'égaler à zéro ; la résolution de cette équation donne les abscisses des points maxima et minima.

2e opération. Trouver la dérivée seconde ; l'égaler à zéro ; la résolution de cette équation donne les points d'inflexion.

3e opération. Calculer les ordonnées correspondantes des points dont les abscisses ont été trouvées dans les deux premières opérations. Calculer autant de points supplémentaires qu'il est nécessaire pour avoir une idée nette de la forme de la courbe. Dresser un tableau semblable à celui de l'exemple traité ci-après.

4e opération. Construire les points déterminés et tracer la courbe correspondant aux résultats indiqués par le tableau.

Si les valeurs calculées pour les ordonnées sont grandes, il est pré-

férable de réduire l'échelle sur l'axe des y, de façon que l'allure générale de la courbe puisse être vue dans les limites du papier utilisé. On devra employer du papier spécialement destiné à construire les coordonnées.

EXEMPLES

Tracer les courbes ci-après, en faisant usage de la règle qui précède. Trouver également les équations de la tangente et de la normale aux points d'inflexion.

1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$.

Solution. Utilisons la règle ci-dessus.

1re opération. $y' = 3x^2 - 18x + 24.$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0,$$
$$x = 2, 4.$$

2e opération. $y'' = 6x - 18,$

$$6x - 18 = 0,$$
$$x = 3.$$

3e opération.

x	y	y'	y''	REMARQUES	DIRECTION DE LA COURBE
0	− 7	+	−	»	Concave vers le bas.
2	13	0	−	max.	
3	11	−	0	Point d'inflexion.	
4	9	0	+	min.	Concave vers le haut.
6	29	+	+	»	

4e opération. En construisant les points et en traçant la courbe, nous obtenons la figure 70 ci-dessous.

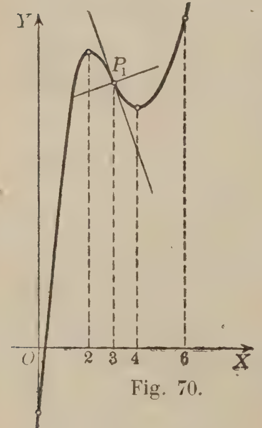


Fig. 70.

Pour trouver les équations de la tangente et de la normale à la courbe au point d'inflexion P_1 (3, 11), utilisons les formules (1), (2), page 85. Nous obtenons $3x + y = 20$ pour la tangente et $3y - x = 30$ pour la normale.

2. $y = x^3 - 6x^2 - 36x + 5$.

Rép. Max. (− 2, 45) ; min. (6, − 211) ; point d'inflexion (2, − 83) ; tangente, $y + 48x - 13 = 0$; normale, $48y - x + 3986 = 0$.

3. $y = x^4 - 2x^2 + 10$.

Rép. Max. (0, 10) ; min. (± 1, 9) ; point d'inflexion $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{85}{9}\right)$.

4. $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$.

Rép. Max. (0, 2) ; min. $(\pm\sqrt{3}, -\frac{5}{2})$; point d'inflexion $(\pm 1, -\frac{1}{2})$.

5. $y = \frac{6x}{1+x^2}$.

Rép. Max. $(1, 3)$; min. $(-1, -3)$; point d'inflexion $(0, 0)$, $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. $y = 12x - x^3$.

Rép. Max. $(2, 16)$; min. $(-2, -16)$; point d'inflexion $(0, 0)$.

7. $4y + x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. *Rép.* Max. $(2, 0)$; min. $(0, -1)$.

8. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$.

9. $2y + x^3 - 9x + 6 = 0$.

10. $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$.

11. $y(1 + x^2) = x$.

12. $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$.

13. $y = e^{-x^2}$.

14. $y = \frac{4 + x}{x^2}$.

15. $y = (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2$.

16. $y = \frac{x+2}{x^3}$.

17. $y = x^3 - 3x^2 - 24x$.

18. $y = 18 + 36x - 3x^2 - 2x^3$.

19. $y = x - 2\cos x$.

20. $y = 3x - x^3$.

21. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$.

22. $x^2y = 4 + x$.

23. $4y = x^4 - 6x^2 + 5$.

24. $y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$.

25. $y = \sin x + \frac{x}{2}$.

26. $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.

27. $y = 5x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

28. $y = \frac{1 + x^2}{2x}$.

29. $y = x - 2\sin x$.

30. $y = \log\cos x$.

31. $y = \log(1 + x^2)$.

CHAPITRE IX

DIFFÉRENTIELLES

87. Introduction. — Jusqu'ici nous avons représenté la dérivée de $y = f(x)$ par la notation

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

et nous nous sommes spécialement efforcés de pénétrer le lecteur de cette idée que le symbole

$$\frac{dy}{dx}$$

doit être considéré non comme une fraction ordinaire avec dy comme numérateur et dx comme dénominateur, mais comme un simple symbole désignant la limite du quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

quand Δx tend vers zéro.

Des problèmes se présentent, cependant, où il est très commode de pouvoir donner une signification à dx et à dy séparément, et cela est particulièrement utile dans les applications du calcul intégral. Nous expliquerons par la suite comment il y a lieu de procéder.

88. Définitions. — Si $f'(x)$ est la dérivée de $f(x)$ pour une valeur particulière de x, et Δx un accroissement de x arbitrairement choisi, la *différentielle de* $f(x)$, désignée par le symbole $df(x)$, est définie par l'équation

(A) $$df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Si maintenant $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$ et (A) se réduit à

$$dx = \Delta x,$$

ce qui montre que quand x est la variable indépendante, la *différen-*

tielle de x est identique à Δx. Par suite, si $y = f(x)$, on peut en général écrire (A) sous la forme

(B) $$dy = f'(x)dx\ (*).$$

La différentielle d'une fonction est égale à sa dérivée multipliée par la différentielle de la variable indépendante.

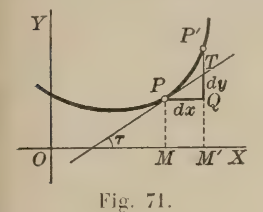


Fig. 71.

Nous allons montrer la signification géométrique de cette définition (*fig.* 71).

Soit $f'(x)$ la dérivée de $y = f(x)$ au point P. Prenons $dx = \mathrm{PQ}$, alors

$$dy = f'(x)dx = \operatorname{tg}\tau \cdot \mathrm{PQ} = \frac{\mathrm{QT}}{\mathrm{PQ}} \cdot \mathrm{PQ} = \mathrm{QT}.$$

Par conséquent dy, ou $df(x)$, est l'accroissement (QT) de l'ordonnée de la tangente correspondant à dx (**).

Cette considération nous donne l'interprétation ci-après de la dérivée considérée comme une fraction :

Si dx *désigne un accroissement, choisi arbitrairement, de la variable indépendante* x *pour un point* P(x, y) *de la courbe* $y = f(x)$, *dans la dérivée*

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{tg}\tau,$$

dy *désigne l'accroissement correspondant de l'ordonnée de la tangente à la courbe au point* P.

89. Infiniment petits. — Dans le calcul différentiel, on s'occupe habituellement de la dérivée, c'est-à-dire du rapport des différentielles dy et dx. Dans quelques applications, il est également utile de considérer dx comme un infiniment petit (voir § 15, p. 14), c'est-à-dire comme une variable dont les valeurs restent petites numériquement, et qui tend vers zéro à un certain moment de nos recherches. Alors, d'après (B), p. 149, et (2), p. 20, dy est également un infiniment petit.

(*) A cause de la position que la dérivée $f'(x)$ occupe ici, elle est quelquefois appelée *coefficien différentiel.*

Le lecteur devra observer ce fait important que, puisqu'on peut donner à dx une valeur arbitraire quelconque, *dx est indépendant de x*. Par suite, *dy est une fonction de deux variables indépendantes x et dx.*

(**) Le lecteur devra noter spécialement que la différentielle (dy) et l'accroissement (Δy) de la fonction correspondant à la même valeur de dx, (Δx), ne sont pas égaux en général ; car dans la figure 71, $dy = \mathrm{QT}$, mais $\Delta y = \mathrm{QP'}$.

Dans les problèmes où entrent plusieurs infiniment petits, on fait souvent usage du théorème suivant :

Théorème. — *Dans les problèmes comportant la limite du rapport de deux infiniment petits, chaque infiniment petit peut être remplacé par un infiniment petit tel que la limite de leur rapport soit l'unité.*

Démonstration. — Soient α, β, α', β' des infiniment petits tels que

$$\text{(C)} \qquad \text{limite}\,\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{limite}\,\frac{\beta'}{\beta} = 1.$$

Nous avons identiquement

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta}$$

et

$$\text{limite}\,\frac{\alpha}{\beta} = \text{limite}\,\frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \text{limite}\,\frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \text{limite}\,\frac{\beta'}{\beta} \qquad \text{(th. II, p. 20)}$$

$$= \text{limite}\,\frac{\alpha'}{\beta'} \cdot 1 \cdot 1. \qquad \text{D'après (C)}$$

$$\text{(D)} \qquad \text{limite}\,\frac{\alpha}{\beta} = \text{limite}\,\frac{\alpha'}{\beta'}. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Appliquons maintenant ce théorème aux deux limites importantes ci-après. Pour la variable indépendante x, nous savons d'après le paragraphe précédent que Δx et dx sont identiques.

Par suite, leur rapport est l'unité et aussi limite $\frac{\Delta x}{dx} = 1$, c'est-à-dire que, d'après le théorème ci-dessus,

(E) *Dans la limite du rapport de Δx à un deuxième infiniment petit, Δx peut être remplacé par dx.*

Au contraire, on a montré que pour la variable dépendante y, Δy et dy sont en général inégaux. Mais, cependant, nous pouvons montrer maintenant, que dans ce cas on a également

$$\text{limite}\,\frac{\Delta y}{dy} = 1.$$

Puisque $\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, nous pouvons écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon.$$

où ε est un infiniment petit qui tend vers zéro quand $\Delta x \doteq 0$.

Chassons le dénominateur, en nous rappelant que $\Delta x = dx$.

$$\Delta y = f'(x)dx + \varepsilon\Delta x,$$

$$\Delta y = dy + \varepsilon\Delta x. \qquad \text{(B), p. 149.}$$

En divisant des deux côtés par Δy, il vient

$$1 = \frac{dy}{\Delta y} + \varepsilon \frac{\Delta x}{\Delta y},$$

ou

$$\frac{dy}{\Delta y} = 1 - \varepsilon \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y},$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{dy}{\Delta y} = 1;$$

et par suite $\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$; c'est-à-dire que, d'après le théorème ci-dessus,

(F) *Dans la limite du rapport de Δy à un deuxième infiniment petit, Δy peut être remplacé par dy.*

90. Dérivée de l'arc en coordonnées rectangulaires. — Soit s la longueur (*) de l'arc AP mesuré à partir d'un point fixe A sur la courbe (*fig.* 72). Désignons l'accroissement de s (arc PQ) par Δs.

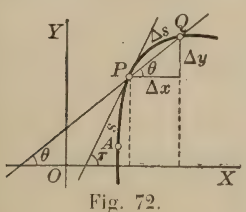


Fig. 72.

La définition de la longueur d'un arc repose sur l'hypothèse que lorsque Q tend vers P,

$$\text{limite} \left(\frac{\text{corde PQ}}{\text{arc PQ}} \right) = 1.$$

Si nous appliquons maintenant le théorème de la p. 150 à cette relation, nous obtenons :

(G) *Dans la limite du rapport d'une corde* PQ *à un deuxième infiniment petit, la corde* PQ *peut être remplacée par l'arc* PQ (Δs).

(*) Définie au § 209.

D'après la figure 72 ci-dessus,

(H) $$(\text{corde PQ})^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

En divisant par $(\Delta x)^2$, nous obtenons

(I) $$\left(\frac{\text{corde PQ}}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Maintenant, faisons tendre Q vers P comme position limite; alors $\Delta x = 0$ et nous avons

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

$$\left[\text{Puisque} \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\text{corde PQ}}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right) = \frac{ds}{dx}, \text{ d'après (G).}\right]$$

(24) $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

De même, si nous divisons (H) par $(\Delta y)^2$ et que nous passions à la limite, nous obtenons

(25) $$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}.$$

D'après la figure 72 ci-dessus, nous avons aussi

$$\cos\theta = \frac{\Delta x}{\text{corde PQ}}, \qquad \sin\theta = \frac{\Delta y}{\text{corde PQ}}.$$

Maintenant, quand Q tend vers P comme position limite, $\theta = \tau$ et nous obtenons

(26) $$\cos\tau = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\tau = \frac{dy}{ds}.$$

$$\left[\text{Puisque d'après (G) limite } \frac{\Delta x}{\text{corde PQ}} = \text{limite } \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{dx}{ds} \text{ et limite } \frac{\Delta y}{\text{corde PQ}} = \text{limite } \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{dy}{ds}.\right]$$

En faisant usage de la notation des différentielles, les formules (24) et (25) peuvent s'écrire

(27) $$ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

$$(28)\qquad ds = \left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dy.$$

En substituant dans (26) la valeur de ds donnée par (27), il vient

$$(29)\quad \cos\tau = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},\qquad \sin\tau = \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Un moyen facile de se rappeler les relations (24)-(26) entre les différentielles dx, dy, ds est de noter qu'elles sont représentées exactement par un triangle rectangle dont l'hypoténuse est ds, les côtés de l'angle droit, dx, dy, et l'angle à la base, τ (*fig.* 73). Donc

Fig. 73.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

et la division par dx ou dy donne respectivement (24) ou (25). D'après la figure 73, on a aussi

$$\cos\tau = \frac{dx}{ds},\qquad \sin\tau = \frac{dy}{ds};$$

les mêmes relations sont données par (26).

91. Dérivée de l'arc en coordonnées polaires. — Dans la dérivation qui suit, nous emploierons la même figure et la même notation que celles utilisées pages 93, 94.

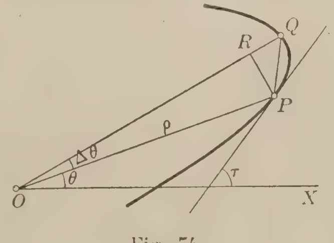


Fig. 74.

D'après le triangle rectangle PRQ (*fig.* 74)

$$(\text{corde PQ})^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 = (\rho\sin\Delta\theta)^2 + (\rho + \Delta\rho - \rho\cos\Delta\theta)^2.$$

En divisant les deux membres par $(\Delta\theta)^2$, nous obtenons

$$\left(\frac{\text{corde PQ}}{\Delta\theta}\right)^2 = \rho^2\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho}{\Delta\theta} + \rho\cdot\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta}\right)^2.$$

En passant à la limite quand $\Delta\theta$ diminue et tend vers zéro, nous obtenons (*)

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2.$$

(30) $$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2},$$

ce qui s'écrit, en notation différentielle,

(31) $$ds = \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Ces relations entre ρ et les différentielles ds, $d\rho$ et $d\theta$ sont représentées exactement par un triangle rectangle dont l'hypoténuse est ds et les côtés de l'angle droit, $d\rho$ et $\rho d\theta$ (*fig.* 75). Par suite,

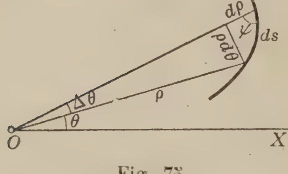


Fig. 75.

$$ds = \sqrt{(\rho d\theta)^2 + (d\rho)^2},$$

et la division par $d\theta$ donne (30).

En désignant par ψ l'angle formé par $d\rho$ et ds, nous obtenons immédiatement

$$\operatorname{tg}\psi = \rho\frac{d\theta}{d\rho},$$

qui est la même formule que celle trouvée en (A), p. 94.

EXEMPLE I. — Trouver la différentielle de l'arc du cercle $x^2 + y^2 = r^2$.

Solution. Différentions ; $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Pour trouver ds en fonction de x, nous substituons dans (27), ce qui donne

$$ds = \left[1 + \frac{x^2}{y^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^2+y^2}{y^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{r^2}{y^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx = \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

(*) $\lim_{\Delta\theta=0}\frac{\text{corde PQ}}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta=0}\frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{ds}{d\theta}$. d'après (G), p. 151

$\lim_{\Delta\theta=0}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} = 1$. d'après § 22, p. 23

$\lim_{\Delta\theta=0}\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta=0}\frac{2\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta=0}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 0 . 1 = 0$, d'après 39, p. 2 et § 22, p. 23

Pour trouver ds en fonction de y, nous substituons dans (28), ce qui donne

$$ds = \left[1 + \frac{y^2}{x^2}\right]^{\frac{1}{2}} dy = \left[\frac{x^2+y^2}{x^2}\right]^{\frac{1}{2}} dy = \left[\frac{r^2}{x^2}\right]^{\frac{1}{2}} dy = \frac{r\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}}.$$

EXEMPLE II. — Trouver la différentielle de l'arc de la cardioïde $\rho = a(1 - \cos\theta)$ en fonction de θ.

Solution. Différentions, $\frac{d\rho}{d\theta} = a \sin\theta$.

La substitution dans (31) donne

$$ds = [a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}} d\theta = a[2 - 2\cos\theta]^{\frac{1}{2}} d\theta$$
$$= a\left[4\sin^2\frac{\theta}{2}\right]^{\frac{1}{2}} d\theta = 2a \sin\frac{\theta}{2} d\theta.$$

EXEMPLES

Trouver la différentielle de l'arc de chacune des courbes ci-après :

1. $y^2 = 4x$. *Rép.* $ds = \sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx$.

2. $y = ax^2$. $ds = \sqrt{1 + 4a^2x^2}\,dx$.

3. $y = x^3$. $ds = \sqrt{1 + 9x^4}\,dx$.

4. $y^3 = x^2$. $ds = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 9y}\,dy$.

5. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $ds = \sqrt[3]{\frac{a}{y}}\,dy$.

6. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. $ds = \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\,dx$.

NOTE. $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

7. $e^y \cos x = 1$. $ds = \sec x\,dx$.

8. $\rho = a \cos\theta$. $ds = a\,d\theta$.

9. $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. $ds = a\sqrt{\sec 2\theta}\,d\theta$.

10. $\rho = ae^{\theta \operatorname{cotg} \alpha}$. $ds = \rho \operatorname{cosec} \alpha\,d\theta$.

11. $\rho = a^\theta$. $ds = a^\theta\sqrt{1 + \log^2 a}\,d\theta$.

12. $\rho = a\theta$. $ds = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + \rho^2}\,d\rho$.

13. (*a*) $x^2 - y^2 = a^2$.
(*b*) $x^2 = 4ay$.
(*c*) $y = e^x + e^{-x}$.
(*d*) $xy = a$.
(*e*) $y = \log \sec x$.
(*f*) $\rho = 2a \operatorname{tg}\theta \sin\theta$.
(*g*) $\rho = a \sec^3 \frac{\theta}{3}$.
(*h*) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.
(*i*) $y^2 = ax^3$.
(*j*) $y = \log x$.
(*k*) $4x = y^3$.
(*l*) $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$.
(*m*) $\rho = 1 + \sin\theta$.
(*n*) $\rho\theta = a$.

92. Formules pour trouver les différentielles des fonctions. — Puisque la différentielle d'une fonction est égale à sa dérivée multipliée par la différentielle de la variable indépendante, il en résulte immédiatement que les formules pour trouver les différentielles sont les mêmes que celles pour trouver les dérivées données au § 33, pages 38-40, si nous multiplions chacune d'elles par dx. Nous obtenons ainsi :

I	$d(c) = 0.$
II	$d(x) = dx.$
III	$d(u + v - w) = du + dv - dw.$
IV	$d(cv) = cdv.$
V	$d(uv) = udv + vdu.$
VI	$d(v^n) = nv^{n-1}dv.$
VI*a*	$d(x^n) = nx^{n-1}dx.$
VII	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$
VII*a*	$d\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{du}{c}.$
VIII	$d(\log_a v) = \log_a e \frac{dv}{v}.$
IX	$d(a^v) = a^v \log a dv.$
IX*a*	$d(e^v) = e^v dv.$
X	$d(u^v) = vu^{v-1}du + \log u \cdot u^v \cdot dv.$
XI	$d(\sin v) = \cos v dv.$
XII	$d(\cos v) = -\sin v dv.$
XIII	$d(\operatorname{tg} v) = \sec^2 v dv,$ etc.
XVIII	$d(\operatorname{arc} \sin v) = \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}},$ etc.

Le terme « différentiation » s'applique également à l'opération relative à la recherche des différentielles.

Pour trouver les différentielles, le procédé le plus commode est de trouver d'abord la dérivée par les moyens habituels et de multiplier ensuite le résultat par dx.

Exemple I. — Trouver la différentielle de

$$y = \frac{x + 3}{x^2 + 3}.$$

Solution. $$dy = d\left(\frac{x+3}{x^2+3}\right) = \frac{(x^2+3)d(x+3)-(x+3)d(x^2+3)}{(x^2+3)^2}$$
$$= \frac{(x^2+3)dx-(x+3)2xdx}{(x^2+3)^2} = \frac{(3-6x-x^2)dx}{(x^2+3)^2}. \text{ Rép.}$$

EXEMPLE II. — Trouver dy en partant de
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$
Solution. $$2b^2xdx - 2a^2ydy = 0.$$
$$dy = \frac{b^2x}{a^2y}dx. \text{ Rép.}$$

EXEMPLE III. — Trouver $d\rho$ en partant de
$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$
Solution. $$2\rho d\rho = -a^2 \sin 2\theta \cdot 2d\theta.$$
$$d\rho = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{\rho}d\theta.$$

EXEMPLE IV. — Trouver $d\left[\text{arc sin}\,(3t-4t^3)\right]$.

Solution. $$d\left[\text{arc sin}\,(3t-4t^3)\right] = \frac{d(3t-4t^3)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}} = \frac{3dt}{\sqrt{1-t^2}}. \text{ Rép.}$$

93. Différentielles successives. — Comme la différentielle d'une fonction est aussi, en général, une fonction de la variable indépendante, nous pouvons chercher sa différentielle. Considérons la fonction
$$y = f(x).$$

$d(dy)$ est appelé la *différentielle seconde de y* (ou *de la fonction*) et on la désigne par le symbole d^2y.

De même, la *différentielle troisième* de y, $d[d(dy)]$, s'écrit d^3y et ainsi de suite jusqu'à la *différentielle* n^e *de* y,
$$d^ny.$$

Puisque dx, la différentielle de la variable indépendante, est indépendante de x [voir renvoi (*) de la page 149], elle doit être traitée comme une constante quand on différentie par rapport à x. On obtient ainsi des relations très simples entre les *différentielles successives* et *les dérivées successives* ; car
$$dy = f'(x)dx,$$
et $$d^2y = f''(x)(dx)^2,$$
puisque dx est regardé comme une constante.

De même, $d^3y = f''(x)(dx)^3,$

et, en général,

$$d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

En divisant les deux membres de chaque expression par la puissance de dx qui figure dans le membre de droite, nous obtenons la notation habituelle de la dérivée :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x), \quad \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

Les puissances d'un infiniment petit sont appelées *infiniment petits d'ordre supérieur*.

Plus généralement, si pour les infiniment petits α et β

$$\text{limite}\ \frac{\beta}{\alpha} = 0,$$

on dit que β est un infiniment petit d'un ordre supérieur à α.

EXEMPLE. — Trouver la différentielle troisième de

$$y = x^5 - 2x^3 + 3x - 5.$$

Solution.

$$dy = (5x^4 - 6x^2 + 3)dx,$$
$$d^2y = (20x^3 - 12x)(dx)^2,$$
$$d^3y = (60x^2 - 12)(dx)^3.\ \textit{Rép.}$$

NOTE. — Ce résultat est évidemment la dérivée troisième de la fonction multipliée par le cube de la différentielle de la variable indépendante. En divisant par $(dx)^3$, on obtient la dérivée troisième

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 - 12.$$

EXEMPLES

Différentier les fonctions suivantes, en faisant usage des différentielles :

1. $y = ax^3 - bx^2 + cx + d.$ *Rép.* $dy = (3ax^2 - 2bx + c)dx.$

2. $y = 2x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-1} + 5.$ $dy = \left(5x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{-2}\right)dx.$

3. $y = (a^2 - x^2)^5.$ $dy = -10x(a^2 - x^2)^4dx.$

4. $y = \sqrt{1 + x^2}.$ $dy = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}dx.$

5. $y = \frac{x^{2n}}{(1 + x^2)^n}.$ $dy = \frac{2nx^{2n-1}}{(1 + x^2)^{n+1}}dx.$

6. $y = \log \sqrt{1 - x^3}$. $\qquad dy = \frac{3x^2 dx}{2(x^3 - 1)}$.

7. $y = (e^x + e^{-x})^2$. $\qquad dy = 2(e^{2x} - e^{-2x})dx$.

8. $y = e^x \log x$. $\qquad dy = e^x \left(\log x + \frac{1}{x}\right) dx$.

9. $s = t - \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$. $\qquad ds = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\right)^2 dt$.

10. $\rho = \text{tg}\, \varphi + \sec \varphi$. $\qquad d\rho = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi$.

11. $r = \frac{1}{3} \text{tg}^3 \theta + \text{tg}\, \theta$. $\qquad dr = \sec^4 \theta d\theta$.

12. $f(x) = (\log x)^3$. $\qquad f'(x)dx = \frac{3 (\log x)^2 dx}{x}$.

13. $\varphi(t) = \frac{t^3}{(1 - t^2)^{\frac{3}{2}}}$. $\qquad \varphi'(t)dt = \frac{3t^2 dt}{(1 - t^2)^{\frac{5}{2}}}$.

14. $d\left[\frac{x \log x}{1 - x} + \log (1 - x)\right] = \frac{\log x dx}{(1 - x)^2}$.

15. $d\, [\text{arc tg} \log y] = \frac{dy}{y [1 + (\log y)^2]}$.

16. $d\left[r \text{ arc sin vers } \frac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}\right] = \frac{y dy}{\sqrt{2ry - y^2}}$.

17. $d\left[\frac{\cos \varphi}{2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{2} \log \text{tg} \frac{\varphi}{2}\right] = - \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi}$.

CHAPITRE X

LE TEMPS CONSIDÉRÉ COMME NOUVELLE VARIABLE

94. La dérivée considérée comme le rapport de deux coefficients différentiels. — Soit $y=f(x)$ l'équation d'une courbe engendrée par le déplacement d'un point P (*fig.* 76). Les coordonnées x et y de ce point peuvent être considérées comme fonctions du temps, ainsi que nous l'avons expliqué au § 71, p. 102. En différentiant par rapport à t, d'après XXV, nous avons

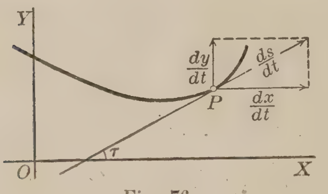


Fig. 76.

$$\text{(32)} \qquad \frac{dy}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}.$$

A un instant quelconque le coefficient différentiel de y (ou de la fonction) par rapport au temps est égal à la dérivée de la fonction multipliée par le coefficient différentiel de la variable indépendante par rapport au temps.

Ou, en écrivant (32) sous la forme

$$\text{(33)} \qquad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

La dérivée mesure le rapport du coefficient différentiel de y à celui de x par rapport au temps.

$\frac{ds}{dt}$ étant le coefficient différentiel de la longueur d'un arc par rapport au temps, nous avons d'après (12), p. 103,

$$\text{(34)} \qquad \frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

qui est la relation indiquée par la figure 76 ci-dessus.

Comme guide dans la résolution des problèmes analogues aux suivants, on peut utiliser la **règle** ci-dessous :

1re opération. Tracer une figure illustrant le problème. Désigner par x, y, z, etc., les quantités qui varient avec le temps.

2e opération. Obtenir une relation entre les variables considérées qui soit vraie à tout instant.

3e opération. Différentier par rapport au temps.

4e opération. Dresser une liste des quantités données et des quantités cherchées.

5e opération. Substituer les quantités connues dans le résultat trouvé par différentiation (3e opération) et résoudre par rapport aux quantités inconnues.

EXEMPLES

1. Un homme s'avance à raison de 8 kilomètres par heure vers le pied d'une tour de 60 mètres de hauteur. A quelle vitesse s'approche-t-il du sommet quand il est à 80 mètres du pied de la tour ?

Solution. Appliquons la règle qui précède.

1re opération. Traçons la figure 77.

Soit x la distance séparant l'homme du pied de la tour et y la distance le séparant du sommet de la tour à un moment quelconque.

Fig. 77.

2e opération. Puisque nous avons un triangle rectangle,

$$y^2 = x^2 + 3600.$$

3e opération. En différentiant, nous obtenons

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt},$$

ou (A)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt},$$

ce qui signifie qu'à un moment *quelconque :*

$$(\textit{coefficient différentiel de } y) = \left(\frac{x}{y}\right)(\textit{coefficient différentiel de } x).$$

4e opération.

$$x = 80, \qquad \frac{dx}{dt} = 8 \text{ kilomètres par heure.}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 3600} \qquad \frac{dy}{dt} = ?$$

$$= 100.$$

5e opération. En substituant dans (A), il vient

$$\frac{dy}{dt} = \frac{80}{100} \times 8 \text{ kilomètres par heure}$$
$$= 6 \text{ kilomètres } 400 \text{ par heure.}$$ *Rép.*

2. Un point se meut sur la parabole $6y = x^2$ de telle sorte que quand $x = 6$, l'abscisse croît à raison de 2 mètres par seconde. Comment varient au même instant l'ordonnée et la longueur de l'arc ?

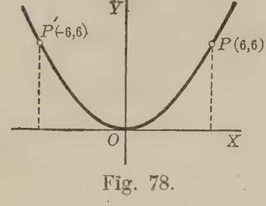


Fig. 78.

Solution.

1re opération. Construisons la parabole (*fig.* 78).

2e opération. $6y = x^2$.

3e opération. $6\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$,

ou (B) $\frac{dy}{dt} = \frac{x}{3} \cdot \frac{dx}{dt}$,

ce qui veut dire qu'en un point *quelconque* de la parabole :

(*coefficient différentiel de l'ordonnée*) $= \left(\frac{x}{3}\right)$ (*coefficient différentiel de l'abscisse*).

4e opération. $\frac{dx}{dt} = 2$ mètres par seconde.

$x = 6.$ $\frac{dy}{dt} = ?$

$y = \frac{x^2}{6} = 6.$ $\frac{ds}{dt} = ?$

5e opération. En substituant dans (B), il vient

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6}{3} \times 2 = 4 \text{ mètres par seconde.}$$ *Rép.*

En substituant dans (34), p. 160, on obtient

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{5} \text{ mètres par seconde.}$$ *Rép.*

D'après le premier résultat, nous voyons qu'au point P(6, 6) l'ordonnée croît deux fois plus vite que l'abscisse.

Si nous considérons le point P'(— 6, 6), au lieu du point P(6, 6), le résultat est

$$\frac{dy}{dt} = -4 \text{ mètres par seconde,}$$

le signe moins indiquant que l'ordonnée décroît quand l'abscisse croît.

3. Une plaque circulaire de métal se dilate sous l'influence de la chaleur, de telle sorte que son rayon croît uniformément à raison de 0,01 centimètre par seconde. Comment la surface croît-elle quand le rayon est de 2 centimètres ?

Solution. Soit $x =$ rayon et $y =$ aire de la plaque.

Alors $y = \pi x^2$.

(C) $\frac{dy}{dt} = 2\pi x\frac{dx}{dt}$,

c'est-à-dire qu'à un instant quelconque l'aire de la plaque croît en centimètres carrés $2\pi x$ fois plus vite que le rayon en centimètres linéaires.

Fig. 79.

$$x=2, \quad \frac{dx}{dt}=0{,}01, \quad \frac{dy}{dt}=?$$

Substituant dans (C), il vient

$$\frac{dy}{dt}=2\pi\times 2\times 0{,}01$$
$$=0{,}04\pi \text{ centimètre carré par seconde.}$$ *Rép.*

4. Un arc électrique est suspendu à 12 mètres directement au-dessus d'un chemin en ligne droite et horizontal sur lequel marche un jeune homme mesurant $1^m,50$ de hauteur. A quelle vitesse se déplace l'ombre du jeune homme quand il s'éloigne de la lumière à raison de 49 mètres par minute ?

Solution. Soit x la distance qui sépare le jeune homme d'un point situé directement sous la lumière L, et y la longueur de l'ombre du jeune homme. D'après la figure 80,

$$\frac{y}{y+x}=\frac{1{,}5}{12},$$

ou

$$y=\frac{1}{7}x.$$

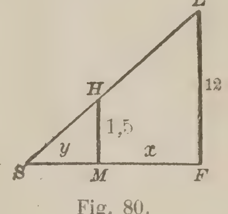


Fig. 80.

En différentiant, il vient

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{7}\frac{dx}{dt},$$

c'est-à-dire que l'ombre se déplace à raison de $\frac{1}{7}$ de la vitesse à laquelle marche le jeune homme, ou 7 mètres par minute.

5. Dans la parabole $y^2=12x$, si x croît uniformément à raison de 2 centimètres par seconde, comment croît y quand $x=3$ centimètres ?

Rép. 2 centimètres par seconde.

6. En quel point de la parabole de l'exercice précédent, l'abscisse et l'ordonnée ont-elles le même accroissement ? *Rép.* (3,6).

7. Dans la fonction $y=2x^3+6$, quelle est la valeur de x au point où y croît 24 fois plus vite que x ? *Rép.* $x=\pm 2$.

8. L'ordonnée d'un point décrivant la courbe $x^2+y^2=25$ décroît à raison de $1\frac{1}{2}$ centimètre par seconde. A quelle vitesse l'abscisse change-t-elle quand l'ordonnée mesure 4 centimètres ? *Rép.* $\frac{dx}{dt}=2$ centimètres par seconde.

9. Trouver les valeurs de x pour lesquelles la dérivée de $x^3-12x^2+45x-13$ est nulle. *Rép.* $x=3$ et 5.

10. En quel point de l'ellipse $16x^2+9y^2=400$, y et x ont-ils des accroissements opposés ? *Rép.* $(3, \frac{16}{3})$.

11. En quel point du premier quadrant l'arc croît-il deux fois plus vite que l'ordonnée ? *Rép.* A 60°.

Un point engendre chacune des courbes ci-après. Comment croît l'arc dans chaque cas ?

12. $y^2 = 2x$; $\frac{dx}{dt} = 2$, $x = 2$. *Rép.* $\frac{ds}{dt} = \sqrt{5}$.

13. $xy = 6$; $\frac{dy}{dt} = 2$, $y = 3$. $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}\sqrt{13}$.

14. $x^2 + 4y^2 = 20$; $\frac{dx}{dt} = -1$, $y = 1$. $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2}$.

15. $y = x^3$; $\frac{dx}{dt} = 3$, $x = -3$.

16. $y^2 = x^3$; $\frac{dy}{dt} = 4$, $y = 8$.

17. Le côté d'un triangle équilatéral a 24 centimètres de long et croît à raison de 3 centimètres par heure. A quelle vitesse la surface croît-elle ?

Rép. $36\sqrt{3}$ centimètres carrés par heure.

18. Comment varie l'aire d'un carré quand le côté b croît à raison de a unités par seconde ?

Rép. $2ab$ unités carrées par seconde.

19. (*a*) On demande combien le volume d'une bulle de savon sphérique croît de fois plus vite que son rayon. (*b*) Quand son rayon est de 4 centimètres et croît à raison de $\frac{1}{2}$ centimètre par seconde, à quelle vitesse croît le volume ?

Rép. (*a*) $4\pi r^2$ fois plus vite ;
(*b*) 32π centimètres cubes par seconde.

A quelle vitesse croît la surface dans le dernier cas ?

20. L'extrémité d'une échelle longue de 50^m est appuyée contre un mur vertical qui repose sur une surface horizontale. En supposant que l'on écarte le pied de l'échelle du mur à raison de 3^m par minute :

(*a*) A quelle vitesse le sommet de l'échelle descend-il quand le pied est à 14^m du mur ?

(*b*) A quel moment le sommet et le pied de l'échelle se déplacent-ils à la même vitesse ?

(*c*) A quel moment le sommet de l'échelle descend-il à raison de 4^m par minute ?

Rép. (*a*) $\frac{7}{8}$ de mètre par minute.
(*b*) Quand la distance du pied de l'échelle au mur est de $25\sqrt{2}$ mètres.
(*c*) Quand la distance du pied de l'échelle au mur est de 40^m.

21. Une barque dont le pont est à $3^m,60$ au-dessous du niveau des bords d'un bassin est halée au moyen d'un câble attaché à un anneau fixé au plancher du bassin. Le câble est enroulé sur un treuil fixé sur le pont de la barque, à la vitesse de $2^m,40$ par minute. A quelle vitesse la barque se déplace-t-elle vers le bords du bassin quand elle en est à $4^m,80$? *Rép.* 3^m par minute.

22. Un wagon de chemin de fer est à 12^m immédiatement au-dessus d'un autre wagon de chemin de fer, leurs voies se coupant à angles droits. Si la vitesse du wagon le plus élevé est de $25^{km},35$ par heure et celle de l'autre wagon de $12^{km},68$ par heure, à quelle vitesse les wagons se séparent-ils au bout de la cinquième minute qui suit leur rencontre ? *Rép.* $28^{km},35$ par heure.

23. Un bateau se dirige vers le Sud à la vitesse de 6^{km} à l'heure et un autre

vers l'Est à la vitesse de 8^{km} à l'heure. A 4 heures de l'après-midi, le second bateau traverse la route suivie par le premier, à l'endroit où ce premier bateau se trouvait deux heures auparavant.

(*a*) Comment la distance entre les bateaux variait-elle à 3 heures de l'après-midi ?
(*b*) Comment à 5 heures de l'après-midi ?
(*c*) A quel moment la distance entre les bateaux était-elle sans changement

Rép. (*a*) En diminuant de $2^{km},8$ à l'heure.
(*b*) En augmentant de $8^{km},73$ à l'heure.
(*c*) 3 : 17 heure de l'après-midi.

24. En supposant que le volume du bois d'un arbre soit proportionnel au cube de son diamètre et que ce dernier croisse uniformément d'année en année, montrer que l'accroissement quand le diamètre atteint 90^{cm}, est 36 fois plus grand que quand le diamètre est de 15^{cm}.

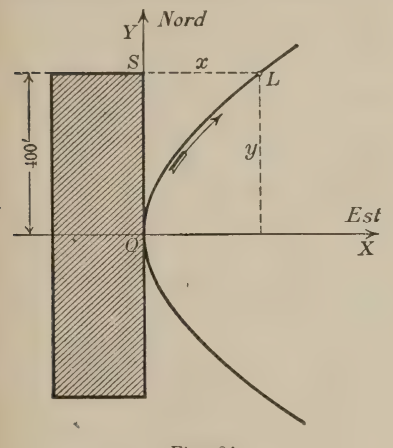


Fig. 81.

25. Un train de chemin de fer marche à $79^{km},200$ à l'heure en passant une station de 800^m de longueur. Les rails ont la forme de la parabole $y^2 = 600x$ et le train suit la direction indiquée par la figure. Le soleil étant supposé se lever à l'Est, juste au moment où le train passe devant la station, trouver à quelle vitesse l'ombre S de la locomotive L se déplace le long du mur de la station à l'instant où cette locomotive atteint l'extrémité du mur.

Solution. $y^2 = 600x.$

$$2y\frac{dy}{dt} = 600\frac{dx}{dt},$$

où

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{300}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

En substituant cette valeur de $\frac{dx}{dt}$ dans

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

nous obtenons

(D) $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{y}{300}\cdot\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Or $$\frac{ds}{dt} = 79^{km},200 \text{ par heure}$$
$$= 22 \text{ mètres par seconde.}$$
$$y = 400 \text{ et } \frac{dy}{dt} = ?$$

En substituant dans (D) nous obtenons

$$(22)^2 = \left(\frac{16}{9} + 1\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

ou $$\frac{dy}{dt} = 13\tfrac{1}{5} \text{ mètres par seconde.}$$ *Rép.*

26. Un train express et un ballon partent du même point au même instant. Le premier marche à 50^{km} à l'heure et le second s'élève à la vitesse de 10^{km} à l'heure. A quelle vitesse se séparent-ils ? *Rép.* 51^{km} à l'heure.

27. Un homme haut de $1^{m},80$ s'éloigne d'un lampadaire de 3^{m} de hauteur à la vitesse de $6^{km},340$ à l'heure. A quelle vitesse l'ombre de sa tête se déplace-t-elle ? *Rép.* $15^{km},840$ à l'heure.

28. Les rayons du soleil font un angle de 30° avec l'horizon. Un ballon est lancé verticalement à une hauteur de $19^{m},20$. A quelle vitesse l'ombre du ballon se déplace-t-elle sur le sol, juste au moment où le ballon touche terre ? *Rép.* $33^{m},24$ par seconde.

29. Un bateau mouille l'ancre dans $5^{m},40$ d'eau. Le câble passe sur un rouet de poulie fixé à l'avant du bateau à une hauteur de $1^{m},80$ au-dessus de la surface de l'eau. Si on enroule le câble à raison de 30^{cm} par seconde, à quelle vitesse le bateau se déplacera-t-il quand il restera 9 mètres de câble à enrouler ? *Rép.* $0^{m},50$ par seconde.

30. Un homme hisse une caisse jusqu'à une fenêtre haute de 15^{m} au moyen d'une poulie. S'il tire la corde à raison de 3^{m} par minute en s'écartant de l'édifice à raison de $1^{m},50$ par minute, à quelle vitesse la caisse montera-t-elle à la fin de la deuxième minute ? *Rép.* $3^{m},29$ par minute.

31. De l'eau coule d'un fossé dans un bassin hémisphérique de 35^{cm} de diamètre à raison de 5^{cm^3} par seconde. A quelle vitesse l'eau s'élève-t-elle :

(*a*) Quand le niveau de l'eau est à mi-chemin du sommet ?

(*b*) Juste au moment où elle déborde ? (Le volume d'un segment sphérique $= \frac{1}{2}\pi r^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3$, où $h =$ la hauteur du segment.)

32. Du sable versé sur le sol par l'orifice d'un tuyau élevé forme une pile qui a constamment la forme d'un cône circulaire dont la hauteur est égale au rayon de la base. Si le sable tombe à raison de 2 mètres cubes par seconde, à quelle vitesse la hauteur de la pile croît-elle au moment où la hauteur est de $1^{m},50$?

33. Un aéroplane est à 176^{m} directement au-dessus d'une automobile et part vers l'Est à la vitesse de 40^{km} par heure ; au même instant l'automobile part vers l'Est à la vitesse de 80^{km} par heure. A quelle vitesse se séparent-ils ?

34. Un phare envoyant un faisceau de rayons parallèles est à une distance de $0^{km},792$ de la côte et fait un tour en une minute. Trouver à quelle vitesse la lumière parcourt une côte en ligne droite quand elle est à une distance de $1^{km},584$ du point le plus rapproché du rivage. *Rép.* $24^{km},87$ par minute.

35. Un cerf-volant ayant 67^{m} de ficelle déroulés, est à 50^{m} de hauteur. En supposant que le cerf-volant se déplace horizontalement à raison de 4^{km} à l'heure, on demande à quelle vitesse la ficelle filait au départ.

36. Une solution est versée dans un filtre conique dont le rayon de base a 6^{cm} et la hauteur 24^{cm}, à raison de 2^{cm^3} par seconde et filtre à raison de 1^{cm^3} par seconde. A quelle vitesse le niveau de la solution s'élève-t-il quand :

(*a*) il est à un tiers de la hauteur ?

(*b*) il est au sommet ?

Rép. (*a*) $0,079^{cm}$ par seconde ;
(*b*) $0,009^{cm}$ par seconde.

37. Un cheval court à la vitesse de 20^{km} à l'heure sur une piste circulaire au centre de laquelle est un arc électrique. A quelle vitesse son ombre se déplace-t-elle le long d'une palissade en ligne droite (tangente à la piste au point de départ) quand il a accompli un huitième du circuit ?

Rép. 40 kilomètres par heure.

38. Les arêtes d'un cube mesurent 24^{cm} et croissent à raison de $0^{cm},02$ par minute. (*a*) Comment le volume croît-il ? (*b*) Comment la surface croît-elle ?

39. Les arêtes d'un tétraèdre régulier mesurent 10^{cm} et croissent à raison de $0^{cm},3$ par heure. A quelle vitesse : (*a*) le volume croît-il ? (*b*) la surface croît-elle ?

40. Une lumière électrique est suspendue à 12 mètres d'un mur en pierre. Un homme marche à raison de $3^{m},60$ par seconde sur un chemin en ligne droite à 3 mètres de la lumière et perpendiculaire au mur. A quelle vitesse l'ombre de l'homme se déplace-t-elle quand il est à 9 mètres du mur ?

Rép. $14^{m},40$ par seconde.

41. Un pont-levis est constitué par une porte dont les deux bras tournent autour du même axe, ainsi que le montre la figure 82. Le bras qui est au-dessus du passage des voitures a 4 mètres de long et celui qui est au-dessus du chemin des piétons en a 3. Les deux bras tournent à la vitesse de 5 radians par minute. A quelle vitesse la distance entre les extrémités des bras varie-t-elle quand ils font un angle de 45° avec l'horizontale ?

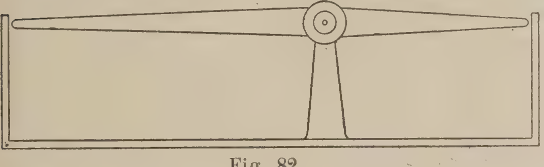


Fig. 82.

Rép. 24^{m} par minute.

42. Un entonnoir conique de 8^{cm} de rayon et de même profondeur est rempli d'une solution qui filtre à raison de 2^{cm^3} par minute. A quelle vitesse la surface descend-elle quand elle est à 2^{cm} du sommet de l'entonnoir ?

43. Un angle croît à une vitesse constante. Montrer que la tangente et le sinus croissent à la même vitesse quand l'angle est nul, et que la tangente croît 8 fois plus vite que le sinus quand l'angle est de 60°.

CHAPITRE XI

CHANGEMENT DE VARIABLE

95. Échange des variables dépendante et indépendante. — Il est quelquefois avantageux de transformer une expression renfermant des dérivées de y par rapport à x en une expression équivalente renfermant des dérivées de x par rapport à y. Nos exemples montreront qu'en beaucoup de cas un tel changement transforme l'expression donnée en une expression plus simple. Ou bien x est donnée comme fonction explicite de y dans un problème et l'on trouve plus commode d'utiliser une formule contenant $\frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{d^2y}$, etc. qu'une contenant $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc.

Nous allons établir les formules nécessaires pour opérer ces transformations.

Étant donné $y = f(x)$, nous avons alors d'après XXVI, p. 40,

$$(35) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad \frac{dx}{dy} \neq 0,$$

expression qui donne $\frac{dy}{dx}$ en fonction de $\frac{dx}{dy}$. Nous avons aussi, d'après XXV,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx},$$

ou

$$(A) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx}.$$

Mais

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2};$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad \text{d'après (35).}$$

En substituant dans (A), nous obtenons

$$(36) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

expression qui donne $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de $\frac{dx}{dy}$ et de $\frac{d^2x}{dy^2}$.

De même,

$$(37) \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5};$$

et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre supérieur. Cette transformation s'appelle *changer la variable indépendante x en y.*

Exemple. Changer la variable indépendante x en y dans l'équation

$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Solution. En substituant d'après (35), (36), (37), il vient

$$3\left(-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right)^2 - \left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\left(-\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}\right) - \left(-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right)\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)^2 = 0.$$

En réduisant, nous obtenons

$$\frac{d^3x}{dy^3} + \frac{d^2x}{dy^2} = 0,$$

équation beaucoup plus simple que celle qui est donnée.

96. Changement de la variable dépendante. — Soit

$$(A) \qquad y = f(x)$$

et supposons en même temps que y soit une fonction de z, c'est-à-dire

$$(B) \qquad y = \varphi(z).$$

Nous pouvons alors exprimer $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., en fonction de $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}$, etc., comme il suit. En général, z est une fonction de y, d'après (B), p. 50, et puisque y est une fonction de x en vertu de (A), il est évident que z est une fonction de x. Par suite, d'après XXV, nous avons

(C) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \phi'(z)\frac{dz}{dx}.$$

Nous avons aussi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\varphi'(z)\frac{dz}{dx}\right) = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d}{dx}\varphi'(z) + \varphi'(z)\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \text{d'après V.}$$

Mais,

$$\frac{d}{dx}\varphi'(z) = \frac{d}{dz}\varphi'(z)\frac{dz}{dx} = \varphi''(z)\frac{dz}{dx}, \quad \text{d'après XXV,}$$

(D) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \phi''(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \phi'(z)\frac{d^2z}{dx^2}.$$

De même pour les dérivées d'ordre supérieur. Cette transformation s'appelle *changer la variable dépendante y en z*, x restant la variable indépendante.

Nous allons maintenant éclairer ce procédé au moyen d'un exemple.

EXEMPLE. — Étant donné l'équation

(E) $$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{2(1+y)}{1+y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

changer la variable dépendante y en z au moyen de la relation

(F) $$y = \operatorname{tg} z.$$

Solution. En tenant compte de (F),

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 z\frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 z\frac{d^2z}{dx^2} + 2\sec^2 z \operatorname{tg} z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2.$$

En substituant dans (E), il vient

$$\sec^2 z\frac{d^2z}{dx^2} + 2\sec^2 z \operatorname{tg} z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{2(1+\operatorname{tg} z)}{1+\operatorname{tg}^2 z}\left(\sec^2 z\frac{dz}{dx}\right)^2$$

et, en réduisant, nous obtenons

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \cos^2 z. \quad \textit{Réponse.}$$

97. Changement de la variable indépendante. — Soit y une

fonction de x et, en même temps, soit x (et par suite y également) une fonction d'une nouvelle variable t. On demande d'exprimer $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., en fonction des nouvelles dérivées ayant t comme variable indépendante.

D'après XXV, $$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt},$$

ou

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Nous avons aussi

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}.$$

Mais, en différentiant (A) par rapport à t,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Par conséquent,

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3};$$

et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre supérieur. Cette transformation s'appelle *changer la variable indépendante x en t*. Il est généralement préférable de résoudre les problèmes par les méthodes exposées ci-dessus que d'utiliser des formules toutes faites.

EXEMPLE. — Changer la variable indépendante x en t dans l'équation

$$\text{(C)} \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0,$$

au moyen de la relation

$$\text{(D)} \qquad x=e^t.$$

Solution. $\frac{dx}{dt}=e^t$; par conséquent (E) $\frac{dt}{dx}=e^{-t}$.

On a également

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}; \quad \text{par conséquent} \quad \text{(F)}\ \frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}.$$

De même,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-t}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{dy}{dt}e^{-t}\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{d}{at}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}-\frac{dy}{dt}e^{-t}\frac{dt}{dx}.$$

En remplaçant (E) par sa valeur dans le dernier résultat, il vient

$$\text{(G)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}e^{-2t}.$$

Substituons (D), (F), (G) dans (C),

$$e^{2t}\left(e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}e^{-2t}\right)+e^t\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)+y=0.$$

En réduisant, nous obtenons

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0. \quad \textit{Rép.}$$

Puisque les formules établies dans le calcul différentiel renferment généralement des dérivées de y par rapport à x, des formules telles que (A) et (B) sont particulièrement utiles quand les équations paramétriques d'une courbe sont données. Des exemples de ce genre ont été donnés pages 88, 89 et beaucoup d'autres seront donnés dans la suite de cet ouvrage.

98. Changement simultané de la variable dépendante et de la variable indépendante. — Il est souvent avantageux de changer simultanément les deux variables. Un cas important est celui qui se présente dans la transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires.

Puisque

$$x=\rho\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y=\rho\sin\theta,$$

l'équation $f(x, y)=0$ devient par substitution une équation entre ρ et θ, définissant ρ comme fonction de θ. Par suite, ρ, x, y sont tous des fonctions de θ.

Exemple. — Transformer la formule du rayon de courbure (42), p. 181,

$$\text{(A)} \qquad R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

en coordonnées polaires.

Solution. Puisque dans (A) et (B), page 171, t est une variable quelconque dont dépendent x et y, nous pouvons poser dans ce cas $t = \theta$, ce qui donne

$$(B) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}},$$

et

$$(C) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d^2x}{d\theta^2}}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^3}.$$

En substituant (B) et (C) dans (A), nous obtenons

$$R = \left[\frac{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}} : \frac{\frac{dx}{d\theta}\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta}\frac{d^2x}{d\theta^2}}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^3}$$

ou

$$(D) \qquad R = \frac{\left[\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{d\theta}\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta}\frac{d^2x}{d\theta^2}}.$$

Mais, puisque $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$, nous avons

$$\frac{dx}{d\theta} = -\rho \sin \theta + \cos \theta \frac{d\rho}{d\theta}; \quad \frac{dy}{d\theta} = \rho \cos \theta + \sin \theta \frac{d\rho}{d\theta};$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = -\rho \cos \theta - 2 \sin \theta \frac{d\rho}{d\theta} + \cos \theta \frac{d^2\rho}{d\theta^2}; \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = -\rho \sin \theta + 2 \cos \theta \frac{d\rho}{d\theta} + \sin \theta \frac{d^2\rho}{d\theta^2}.$$

En substituant ces résultats en (D) et en réduisant, il vient

$$R = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2}}. \quad \textit{Rép.}$$

EXEMPLES

Changer la variable indépendante x en y dans les quatre équations suivantes :

1. $R = \dfrac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$ *Rép.* $R = -\dfrac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}}.$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$ $\dfrac{d^2x}{dy^2} - 2y\dfrac{dx}{dy} = 0.$

3. $x\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{dy}{dx}=0.$ *Rép.* $x\frac{d^2x}{dy^2}-1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=0.$

4. $\left(3a\frac{dy}{dx}+2\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left(a\frac{dy}{dx}+1\right)\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}.$ $\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2=\left(\frac{dx}{dy}+a\right)\frac{d^3x}{dy^3}.$

Changer la variable dépendante y en z dans les équations ci-après :

5. $(1+y)^2\left(\frac{d^3y}{dx^3}-2y\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=2(1+y)\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2},\ y=z^2+2z.$

Rép. $(z+1)\frac{d^3z}{dx^3}=\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}+z^2+2z.$

6. $\frac{d^2y}{dx^2}=1+\frac{2(1+y)}{1+y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,\ y=\operatorname{tg} z.$ *Rép.* $\frac{d^2z}{dx^2}-2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=\cos^2 z.$

7. $y^2\frac{d^3y}{dx^3}-\left(3y\frac{dy}{dx}+2xy^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left\{2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2xy\frac{dy}{dx}+3x^2y^2\right\}\frac{dy}{dx}+x^3y^3=0,\ y=e^z.$

Rép. $\frac{d^3z}{dx^3}-2x\frac{d^2z}{dx^2}+3x^2\frac{dz}{dx}+x^3=0.$

Changer la variable indépendante dans les huit équations suivantes :

8. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{1-x^2}=0,$ $x=\cos t.$ *Rép.* $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$

9. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0,$ $x=\cos z.$ $\frac{d^2y}{dz^2}=0.$

10. $(1-y^2)\frac{d^2u}{dy^2}-y\frac{du}{dy}+a^2u=0,$ $y=\sin x.$ $\frac{d^2u}{dx^2}+a^2u=0.$

11. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{x^2}y=0,$ $x=\frac{1}{z}.$ $\frac{d^2y}{dz^2}+a^2y=0.$

12. $x^3\frac{d^3v}{dx^3}+3x^2\frac{d^2v}{dx^2}+x\frac{dv}{dx}+v=0,$ $x=e^t.$ $\frac{d^3v}{dt^3}+v=0.$

13. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{(1+x^2)^2}=0,$ $x=\operatorname{tg}\theta.$ $\frac{d^2y}{d\theta^2}+y=0.$

14. $\frac{d^2u}{ds^2}+su\frac{du}{ds}+\sec^2 s=0,$ $s=\operatorname{arc\,tg} t.$

Rép. $(1+t^2)\frac{d^2u}{dt^2}+(2t+u\operatorname{arc\,tg} t)\frac{du}{dt}+1=0.$

15. $x^4\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0,$ $x=\frac{1}{z}.$ *Rép.* $\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{2}{z}\frac{dy}{dz}+a^2y=0.$

Dans les sept exemples ci-après, les équations sont données sous forme paramétrique.

Trouver $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans chaque cas :

16. $x=7+t^2,\ y=3+t^2-3t^4.$ *Rép.* $\frac{dy}{dx}=1-6t^2,\ \frac{d^2y}{dx^2}=-6.$

17. $x = \operatorname{cotg} t$, $y = \sin^3 t$. *Rép.* $\dfrac{dy}{dx} = -3\sin^4 t\cos t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3\sin^5 t(4 - 5\sin^2 t)$.

18. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$. *Rép.* $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{at\cos^3 t}$.

19. $x = \dfrac{1-t}{1+t}$, $y = \dfrac{2t}{1+t}$.

20. $x = 2t$, $y = 2 - t^2$.

21. $x = 1 - t^2$, $y = t^3$.

22. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

23. Transformer $\dfrac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}$ en supposant que $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

Rép. $\dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2}}$.

24. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe. Trouver une expression de sa pente $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ en fonction des coordonnées polaires.

Rép. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\rho\cos\theta + \sin\theta\dfrac{d\rho}{d\theta}}{-\rho\sin\theta + \cos\theta\dfrac{d\rho}{d\theta}}$.

CHAPITRE XII

COURBURE. RAYON DE COURBURE

99. Courbure. — La forme d'une courbe dépend en très grande partie de la valeur du changement de direction de la tangente quand le point de contact décrit la courbe. Cette valeur du changement de direction est appelée *courbure* et on la désigne par K. Nous allons maintenant trouver son expression analytique, d'abord pour le cas simple du cercle, et ensuite des courbes en général.

100. Courbure d'un cercle. — Considérons un cercle de rayon R (*fig.* 83). Soit

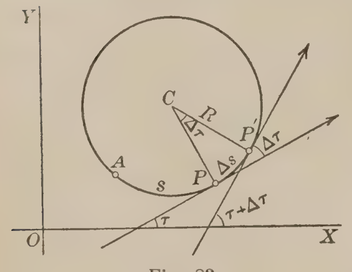


Fig. 83.

τ l'angle que la tangente en P fait avec OX,

$\tau + \Delta\tau$ l'angle fait par la tangente en un point voisin P'.

Nous disons alors que

$\Delta\tau =$ *courbure totale de l'arc* PP'.

Si on suppose que le point P avec sa tangente se déplace le long de la courbe jusqu'en P', la courbure totale ($\Delta\tau$) mesurera le changement total de direction, ou rotation, de la tangente, ou, ce qui est la même chose, le changement total de direction de l'arc lui-même. Si nous désignons par s la longueur de l'arc de la courbe mesuré à partir d'un certain point fixe (tel que A) jusqu'au point P, et par Δs la longueur de l'arc PP', le rapport

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$$

mesure le changement moyen de direction de l'arc (*) par unité de longueur.

(*) Ainsi si $\Delta\tau = \frac{\pi}{6}$ radians (30°) et $\Delta s = 3^{cm}$, on a $\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{\pi}{18}$ radians par centimètre = 10° par centimètre = valeur moyenne du changement de direction.

Puisque, d'après la figure 83,

$$\Delta s = R\Delta\tau,$$

ou

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

il est évident que ce rapport est constant en tout point du cercle. Ce rapport est, par définition, la *courbure du cercle*, et nous avons

$$(38)\qquad K = \frac{1}{R}.$$

La courbure d'un cercle est égale à l'inverse de son rayon.

101. Courbure en un point. — Considérons une courbe quelconque. Comme dans le dernier paragraphe,

$$\Delta\tau = \textit{courbure totale de l'arc } PP',$$

et

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \textit{courbure moyenne de l'arc } PP'.$$

Il y a une notion plus importante que la notion de courbure moyenne d'un arc, c'est celle de la courbure en un point. Cette notion s'obtient comme il suit (*fig.* 84). Imaginons P′ s'approchant de P sur la courbe ; la valeur limite de la courbure moyenne $\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta s}\right)$ quand P′ tend vers P est définie comme étant la courbure au point P, c'est-à-dire que

courbure en un point

$$= \lim_{\Delta s = 0}\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta s}\right) = \frac{d\tau}{ds}.$$

$$(39)\qquad K = \frac{d\tau}{ds} = \textit{courbure}.$$

Fig. 84.

Puisque l'angle $\Delta\tau$ est mesuré en radians et la longueur de l'arc Δs en unités de longueur, il s'ensuit que *l'unité de courbure en un point est un radian par unité de longueur*.

102. Formules relatives à la courbure. — Il est évident que si, dans le dernier paragraphe, au lieu de mesurer les angles que les tan-

gentes font avec OX, nous avions désigné par τ et $\tau + \Delta\tau$, les angles formés par les tangentes avec une ligne fixée arbitrairement, les différentes opérations ne seraient nullement changées; les résultats sont donc entièrement indépendants du système de coordonnées employé. Cependant, puisque les équations des courbes que nous considérons sont toutes données soit en coordonnées rectangulaires, soit en coordonnées polaires, il est nécessaire d'établir des formules pour K en fonction de ces deux sortes de coordonnées. Nous avons

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx}, \qquad \text{§ 32, p. 35}$$

ou

$$\tau = \operatorname{arc\,tg}\frac{dy}{dx}.$$

Différentions par rapport à x, en utilisant la formule XX, p. 70:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\tau}{dx} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Nous avons aussi

$$\text{(B)} \qquad \frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{d'après (24), p. 152.}$$

La division de (A) par (B) donne

$$\frac{\dfrac{d\tau}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais

$$\frac{\dfrac{d\tau}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}} = \frac{d\tau}{ds} = \mathrm{K}.$$

Par suite,

$$\textbf{(40)} \qquad \mathbf{K} = \frac{\dfrac{\mathbf{d^2y}}{\mathbf{dx^2}}}{\left[1 + \left(\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Si l'équation de la courbe est donnée en coordonnées polaires, K peut être trouvé comme il suit :

D'après (B), p. 94,

$$\tau = \theta + \psi.$$

Différentions,

$$\text{(C)} \qquad \frac{d\tau}{d\theta} = 1 + \frac{d\psi}{d\theta}.$$

Mais
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\rho}{\dfrac{d\rho}{d\theta}}, \qquad \text{d'après (A), p. 94,}$$

d'où
$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{\dfrac{d\rho}{d\theta}}.$$

Différentions d'après XX, p. 70, par rapport à θ et réduisons :

$$\text{(D)} \qquad \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho \dfrac{d^2\rho}{d\theta^2}}{\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2}.$$

En substituant (D) dans (C), nous obtenons

$$\text{(E)} \qquad \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\rho^2 - \rho \dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2}{\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2}.$$

Nous avons également

$$\text{(F)} \qquad \frac{ds}{d\theta} = \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{d'après (30), p. 154.}$$

La division de (E) par (F) donne

$$\frac{\dfrac{d\tau}{d\theta}}{\dfrac{ds}{d\theta}} = \frac{\rho^2 - \rho \dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2}{\left[\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais,

$$\frac{\frac{d\tau}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{d\tau}{ds} = \mathrm{K}.$$

Par suite,

$$(41) \qquad \mathrm{K} = \frac{\rho^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Exemple I. — Trouver la courbure de la parabole $y^2 = 4px$ au point $(p, 2p)$.

Solution. $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2p}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{4p^2}{y^3}.$

En substituant dans (40), il vient

$$\mathrm{K} = -\frac{4p^2}{(y^2 + 4p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui donne la courbure en un *point quelconque*. Au point $(p, 2p)$,

$$\mathrm{K} = -\frac{4p^2}{(4p^2 + 4p^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{4p^2}{16\sqrt{2}p^3} = -\frac{1}{4\sqrt{2}p}. \text{ (*)} \qquad \textit{Réponse.}$$

Exemple II. — Trouver la courbure de la spirale logarithmique $\rho = e^{a\theta}$ en un point quelconque.

Solution. $\quad \frac{d\rho}{d\theta} = ae^{a\theta} = a\rho, \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = a^2e^{a\theta} = a^2\rho.$

En substituant dans (41), on a

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\rho\sqrt{1 + a^2}}. \qquad \textit{Réponse.}$$

En posant les rails d'un chemin de fer, on ne peut pas, à cause de la grande vitesse des trains, passer brusquement d'une partie droite à une partie courbe. Pour opérer graduellement le changement de

(*) Quoique dans cet ouvrage, ce soit généralement la valeur numérique de K qui ait seulement de l'importance, nous pouvons cependant donner une signification géométrique à son signe. D'un bout à l'autre de l'ouvrage, nous avons pris le signe positif devant le radical $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Par suite, K sera positif ou négatif en même temps que $\frac{d^2y}{dx^2}$, c'est-à-dire (§ 85, p. 142) suivant que la courbe est concave vers le haut ou concave vers le bas.

direction, les ingénieurs font usage de *courbes de transition* pour raccorder la partie droite de la voie avec la partie courbe. Les arcs de parabole cubique sont généralement employés comme courbes de transition.

Exemple III. — La courbe de transition d'une voie ferrée a la forme d'un arc de parabole cubique $y = \frac{1}{3}x^3$. A quelle vitesse une voiture change-t-elle de direction sur cette voie (le kilomètre = l'unité de longueur) quand elle passe : (*a*) par le point (3, 9) ; (*b*) par le point $\left(2, \frac{8}{3}\right)$; (*c*) par le point $\left(1, \frac{1}{3}\right)$?

Solution. $\frac{dy}{dx} = x^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2x.$

En substituant dans (40), il vient

$$K = \frac{2x}{(1 + x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

(*a*) Au point (3, 9),

$$K = \frac{6}{(82)^{\frac{3}{2}}} \text{ radians par kilomètre} = 28' \text{ par kilomètre.}$$ *Réponse.*

(*b*) Au point $\left(2, \frac{8}{3}\right)$,

$$K = \frac{4}{(17)^{\frac{3}{2}}} \text{ radians par kilomètre} = 3^\circ\, 16' \text{ par kilomètre.}$$ *Réponse.*

(*c*) Au point $\left(1, \frac{1}{3}\right)$,

$$K = \frac{2}{(2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ radian par kilomètre} = 40^\circ\, 30' \text{ par kilomètre.}$$ *Réponse.*

103. Rayon de courbure. — Par analogie avec ce qui a été dit pour le cercle [voir (**38**) p. 177], le *rayon de courbure d'une courbe en un point* est défini comme étant l'inverse de la courbure de la courbe en ce point. En désignant le rayon de courbure par R, nous avons

$$R = \frac{1}{K}, \text{ (*)}$$

ou, en substituant les valeurs de K d'après (**40**) et (**41**),

$$\text{(42)} \qquad R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

(*) Par suite, le rayon de courbure aura le même signe que la courbure, c'est-à-dire + ou — suivant que la courbe est concave vers le haut ou concave vers le bas.

$$(43)\qquad R=\frac{\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}.\ (*)$$

EXEMPLE I. — Trouver le rayon de courbure en un point quelconque de la chaînette

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Solution. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

En substituant dans (42), il vient

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2a}}=\frac{\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^3}{\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2a}}=\frac{a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4}=\frac{y^2}{a}.\quad \textit{Réponse.}$$

Si l'équation de la courbe est donnée sous forme paramétrique, on cherche la dérivée première et la dérivée seconde de y par rapport à x, d'après (A) et (B), p. 171, savoir :

$$(G)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\qquad \text{et}\qquad (H)\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3};$$

et l'on substitue ensuite les résultats dans (42). (**)

EXEMPLE II. — Trouver le rayon de courbure de la cycloïde

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t).$$

Solution. $\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$, $\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$;

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=a\sin t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=a\cos t$.

(*) Au § 98, p. 172, (43) est dérivé de (42) en passant des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires.

(**) La substitution de (G) et de (H) dans (42) donne $R=\dfrac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}$.

En substituant dans (G) et (H), et ensuite dans (42), p. 181, nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a(1 - \cos t)a \cos t - a \sin t\, a \sin t}{a^3(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2},$$

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}} = -2a\sqrt{2 - 2\cos t}. \qquad \textit{Réponse.}$$

104. Cercle de courbure. — Considérons un point quelconque P sur la courbe C (*fig.* 85).

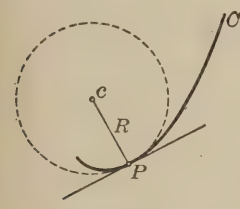


Fig. 85.

La tangente à la courbe au point P a même pente que la courbe elle-même en ce point (§ 64, p. 81). D'une manière analogue, nous pouvons construire pour chaque point de la courbe un cercle dont la courbure est la même que celle de la courbe en ce point.

Pour obtenir ce résultat, on procède comme il suit : on mène la normale à la courbe au point P du côté concave de la courbe. On prend sur cette normale la distance Pc = rayon de courbure (R) en P. Du point c comme centre, on trace le cercle passant par P. La courbure de ce cercle est alors

$$K = \frac{1}{R},$$

qui égale aussi la courbure de la courbe elle-même en P. Le cercle ainsi construit est appelé le *cercle de courbure* au point P de la courbe.

En général, le cercle de courbure d'une courbe en un point traverse la courbe en ce point. Ce fait est mis en évidence dans la figure 85 ci-dessus.

De même que la tangente en P indique la direction de la courbe en ce point, de même le cercle de courbure en P nous aide beaucoup à nous former une conception géométrique de la courbure de la courbe en P, les variations de direction de la courbe et du cercle étant les mêmes en P.

Dans un paragraphe subséquent (§ 116), le cercle de courbure sera défini comme étant la position limite d'un cercle sécant, définition analogue à celle de la tangente donnée au § 32, p. 35.

EXEMPLE. — Trouver le rayon de courbure au point (3, 4) de l'hyperbole équilatère $xy = 12$ et tracer le cercle de courbure correspondant (*fig.* 86).

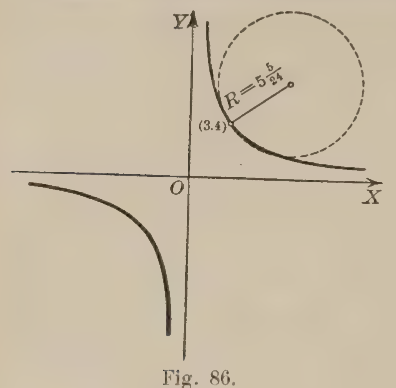


Fig. 86.

Solution. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$.

Pour (3, 4),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{9}.$$

$$R = \frac{\left[1 + \frac{16}{9}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{8}{9}} = \frac{125}{24} = 5\tfrac{5}{24}.$$

Le cercle de courbure traverse la courbe en deux points.

EXEMPLES

1. Trouver le rayon de courbure de chacune des courbes suivantes, au point indiqué ; tracer la courbe et le cercle de courbure correspondant :

(*a*) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $(a, 0)$. *Rép.* $R = \frac{b^2}{a}$.

(*b*) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $(0, b)$. $R = \frac{a^2}{b}$.

(*c*) $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$, $(0, 0)$. $R = \frac{1}{36}$.

(*d*) $16y^2 = 4x^4 - x^6$, $(2, 0)$. $R = 2$.

(*e*) $y = x^3$, (x_1, y_1). $R = \frac{(1 + 9x_1^4)^{\frac{3}{2}}}{6x_1}$.

(*f*) $y^2 = x^3$, $(4, 8)$. $R = \frac{1}{3}(40)^{\frac{3}{2}}$.

(*g*) $y^2 = 8x$, $(\frac{9}{8}, 3)$. $R = 7\frac{13}{16}$.

(*h*) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, $(0, b)$. $R = \frac{a^2}{3b}$.

(*i*) $x^2 = 4ay$, $(0, 0)$. $R = 2a$.

(*j*) $(y - x^2)^2 = x^5$, $(0, 0)$. $R = \frac{1}{2}$.

(*k*) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, (x_1, y_1). $R = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$.

(*l*) $e^x = \sin y$, (x_1, y_1).

(*m*) $y = \sin x$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

(*n*) $y = \cos x$, $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$.

(*o*) $y = \log x$, $x = e$.

(*p*) $9y = x^3$, $x = 3$.

(*q*) $4y^2 = x^3$, $x = 4$.

(*r*) $x^2 - y^2 = a^2$, $y = 0$.

(*s*) $x^2 + 2y^2 = 9$, $(1, -2)$.

2. Déterminer le rayon de courbure de la courbe $a^2y = bx^2 + cx^2y$ à l'origine.

Rép. $R = \frac{a^2}{2b}$.

3. Montrer que le rayon de courbure de la courbe $y^2 = \frac{a^2(a-x)}{x}$ au sommet est $\frac{a}{2}$.

4. Trouver le rayon de courbure de la courbe $y = \log \sec x$ au point (x_1, y_1).

Rép. $R = \sec x_1$.

5. Trouver K en un point quelconque de la parabole $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

Rép. $K = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2(x+y)^{\frac{3}{2}}}$.

6. Trouver R en un point quelconque de l'hypocycloïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Rép. $R = 3(axy)^{\frac{1}{3}}$.

7. Trouver R en un point quelconque de la cycloïde

$x = r \text{ arc sin verse } \frac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$. *Rép.* $R = 2\sqrt{2ry}$.

Trouver le rayon de courbure des courbes ci-après, en un point quelconque :

8. Le cercle $\rho = a \sin \theta$. *Rép.* $R = \frac{a}{2}$.

9. La spirale d'Archimède $\rho = a\theta$. *Rép.* $R = \frac{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2a^2}$.

10. La cardioïde $\rho = a(1 - \cos \theta)$. *Rép.* $R = \frac{2}{3}\sqrt{2a\rho}$.

11. La lemniscate $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. *Rép.* $R = \frac{a^2}{3\rho}$.

12. La parabole $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$. *Rép.* $R = 2a \sec^3 \frac{\theta}{2}$.

13. La courbe $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$. *Rép.* $R = \frac{3}{4} a \sin^2 \frac{\theta}{3}$.

14. La trisectrice $\rho = 2a \cos \theta - a$. *Rép.* $R = \frac{a(5 - 4\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{9 - 6\cos\theta}$.

15. L'hyperbole équilatère $\rho^2 \cos 2\theta = a^2$. *Rép.* $R = \frac{\rho^3}{a^2}$.

16. La conique $\rho = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos\theta}$. *Rép.* $R = \frac{a(1-e^2)(1 - 2e\cos\theta + e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - e\cos\theta)^3}$.

17. La courbe $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$ $t = 1$. *Rép.* $R = 6$.

18. L'hypocycloïde $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ $t = t_1$. *Rép.* $R = 3a \sin t_1 \cos t_1$.

19. La courbe $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$ $t = \frac{\pi}{2}$. *Rép.* $R = \frac{\pi a}{2}$.

20. La courbe $\begin{cases} x = a(m\cos t + \cos mt), \\ y = a(m\sin t - \sin mt). \end{cases}$ $t = t_0$.

Rép. $R = \dfrac{4ma}{m-1}\sin\left(\dfrac{m+1}{2}\right)t_0$.

21. Trouver le rayon de courbure de chacune des courbes suivantes au point indiqué ; tracer la courbe et le cercle de courbure correspondant :

(*a*) $x = t^2$, $2y = t$; $t = 1$.
(*b*) $x = t^2$, $y = t^3$; $t = 1$.
(*c*) $x = \sin t$, $y = \cos 2t$; $t = \dfrac{\pi}{6}$.
(*d*) $x = 1 - t$, $y = t^3$; $t = 3$.
(*e*) $x = t$, $y = 6t^{-1}$; $t = 2$.
(*f*) $x = 2e^t$, $y = e^{-t}$; $t = 0$.
(*g*) $x = \sin t$, $y = 2\cos t$; $t = \dfrac{\pi}{4}$.
(*h*) $x = t^3$, $y = t^2 + 2t$; $t = 1$.

22. Le circuit de course d'une automobile a la forme de l'ellipse $x^2 + 16y^2 = 16$, l'unité étant le kilomètre. A quelle vitesse une voiture change-t-elle de direction sur cette piste :

(*a*) Quand elle passe à une extrémité du grand axe ?
(*b*) Quand elle passe à une extrémité du petit axe ?
(*c*) Quand elle est à deux kilomètres du petit axe ?
(*d*) Quand elle est à égale distance des deux axes ?

Rép. (*a*) 4 radians par kilomètre ; (*b*) $\frac{1}{16}$ radian par kilomètre.

23. En quittant son bassin, un bateau à vapeur se déplace suivant un arc de la parabole semi-cubique $4y^2 = x^3$. Si l'on suppose que la ligne du rivage coïncide avec l'axe des y et que l'unité de longueur soit le kilomètre, à quelle vitesse le bateau change-t-il de direction quand il est à un kilomètre du rivage ?

Rép. $\dfrac{24}{125}$ de radian par kilomètre.

24. Un navire de guerre long de 120 mètres a changé sa direction de 30° en se déplaçant d'une distance égale à sa propre longueur. Quel est le rayon du cercle dans lequel il se meut ? *Rép.* $229^{\text{m}},20$.

25. A quelle vitesse un bicycliste change-t-il de direction sur une piste circulaire d'un demi-kilomètre de diamètre ? *Rép.* 4 radians par kilomètre.

26. L'origine étant directement au-dessus du point de départ, un aéroplane suit approximativement la spirale $\rho = \theta$, l'unité de longueur étant le kilomètre. A quelle vitesse l'aéroplane tourne-t-il à l'instant où il termine sa première spirale ?

27. Une ligne de chemin de fer forme des courbes qui ont approximativement la forme d'arcs des courbes ci-après. A quelle vitesse une machine change-t-elle de direction au moment où elle passe par les points indiqués (le kilomètre est l'unité de longueur) ?

(*a*) $y = x^3$, $(2, 8)$.
(*b*) $y = x^2$, $(3, 9)$.
(*c*) $x^2 - y^2 = 8$, $(3, 1)$.
(*d*) $y = e^x$, $x = 0$.
(*e*) $y = \cos x$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.
(*f*) $\rho\theta = 4$, $\theta = 1$.

CHAPITRE XIII

THÉORÈME DE LA MOYENNE. FORMES INDÉTERMINÉES

105. Théorème de Rolle. — Soit $y = f(x)$ une fonction continue de x à valeur unique (fonction uniforme), s'annulant pour $x = a$ et pour $x = b$, et supposons que $f'(x)$ varie d'une façon continue quand x varie de a à b. La fonction est alors représentée graphiquement par une courbe continue comme dans la figure 87. L'intuition géométrique nous montre immédiatement que pour *une valeur de x, au moins, comprise entre a et b*, la tangente est parallèle à l'axe des x (comme en P), c'est-à-dire que la pente est nulle. Ces considérations éclairent le **théorème de Rolle :**

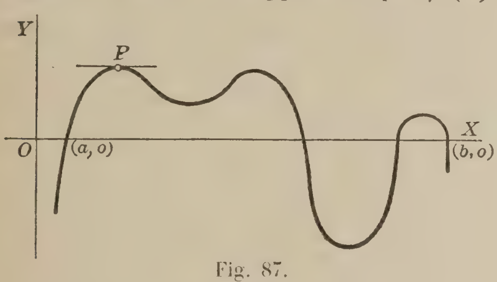


Fig. 87.

Si $f(x)$ s'annule quand $x = a$ et $x = b$, et que $f(x)$ et $f'(x)$ soient continues pour toutes les valeurs de x, de $x = a$ jusqu'à $x = b$, $f'(x)$ s'annulera pour au moins une valeur de x comprise entre a et b.

Ce théorème est évident, parce que quand x croît de a à b, $f(x)$ ne peut pas constamment croître ou constamment décroître quand x croît, puisque $f(a) = 0$ et $f(b) = 0$. Par suite, pour une valeur de x, au moins, comprise entre a et b, $f(x)$ doit cesser de croître pour commencer à décroître, ou bien cesser de décroître pour commencer à croître, et pour cette valeur particulière de x, la dérivée première doit être nulle (§ 81, p. 121).

On montre comme il suit que le théorème de Rolle ne s'applique pas quand $f(x)$, ou $f'(x)$ sont discontinues :

La figure 88 représente le graphique d'une fonction qui est discontinue (∞) pour $x = c$, valeur comprise entre a et b.

La figure 89 représente une fonction continue dont la dérivée première est discontinue (∞) pour une valeur intermédiaire $x = c$.

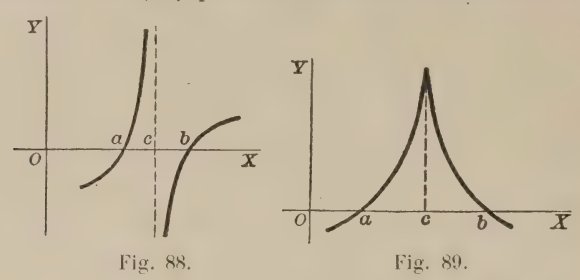


Fig. 88. Fig. 89.

Dans les deux cas, on voit qu'en aucun point du graphique situé entre $x = a$ et $x = b$, la tangente (ou la courbe) n'est parallèle à OX.

106. Théorème de la moyenne (*). — Considérons la quantité Q définie par l'équation

(A) $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = Q,$$

ou (B) $$f(b) - f(a) - (b - a)Q = 0.$$

Soit $f(x)$ une fonction formée en remplaçant b par x dans le membre gauche de B, c'est-à-dire

(C) $$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q.$$

D'après (B), $F(b) = 0$ et d'après (C), $F(a) = 0$; par conséquent, en vertu du théorème de Rolle (p. 187), $F'(x)$ doit s'annuler pour au moins une valeur de x comprise *entre* a et b, soit x_1. Mais en différentiant (C), nous obtenons

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Par conséquent, puisque $F'(x_1) = 0$, on a aussi

$$f'(x_1) - Q = 0$$

et

$$Q = f'(x_1).$$

En substituant cette valeur de Q dans (A), nous obtenons le **théorème de la moyenne**

(44) $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1), \qquad a < x_1 < b,$$

(*) Appelé aussi *loi de la moyenne.*

où, en général, tout ce que nous savons de x_1 est qu'il se trouve entre a et b.

Le théorème de la moyenne interprété géométriquement. — Supposons que la courbe de la figure 90 soit le lieu de

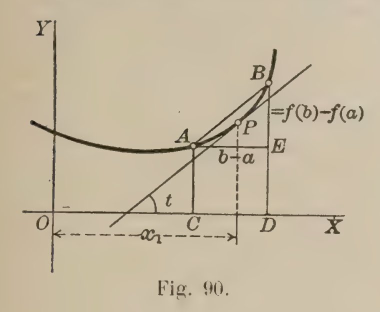


Fig. 90.

$$y = f(x).$$

Prenons $OC = a$ et $OD = b$; alors, $f(a) = CA$ et $f(b) = DB$, ce qui donne

$$AE = b - a$$

et

$$EB = f(b) - f(a).$$

Par conséquent, la pente de la corde AB est

$$\text{(D)} \qquad \operatorname{tg} EAB = \frac{EB}{AE} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il y a au moins un point de la courbe entre A et B (tel que P) où la tangente (ou la courbe) est parallèle à la corde AB. Si l'abscisse de P est x_1, la pente en P est

$$\text{(E)} \qquad \operatorname{tg} t = f'(x_1) = \operatorname{tg} EAB.$$

En égalant (D) et (E), nous obtenons

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1),$$

qui est le théorème de la moyenne.

Le lecteur devra tracer des courbes (telles que celle de la p. 187, *fig.* 87) pour montrer qu'il peut y avoir plus d'un point tel que P dans l'intervalle considéré, et pour montrer, d'autre part, que le théorème peut ne pas être vrai si $f(x)$ devient discontinue pour une valeur quelconque de x comprise entre a et b (*fig.* 88, p. 188), ou si $f'(x)$ devient discontinue (*fig.* 89, p. 188).

En chassant le dénominateur de (44), nous pouvons également écrire le théorème de la moyenne sous la forme

$$\textbf{(45)} \qquad \boldsymbol{f(b) = f(a) + (b - a)f'(x_1).}$$

Soit $b = a + \Delta a$; alors $b - a = \Delta a$, et puisque x_1 est un nombre se trouvant compris entre a et b, nous pouvons écrire

$$x_1 = a + \theta \cdot \Delta a,$$

où θ est une fraction positive proprement dite. En substituant dans (45), nous obtenons une *autre forme du* **théorème de la moyenne :**

$$(46) \quad f(a + \Delta a) - f(a) = \Delta a f'(a + \theta \cdot \Delta a), \qquad 0 < \theta < 1.$$

107. Développement du théorème de la moyenne (*). — En suivant la méthode du dernier paragraphe, soit R défini par l'équation

$$(A) \qquad f(b) - f(a) - (b - a)f'(a) - \frac{1}{2}(b - a)^2 R = 0.$$

Soit $F(x)$ une fonction formée en remplaçant b par x dans le membre gauche de (A), c'est-à-dire

$$(B) \qquad F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)f'(a) - \frac{1}{2}(x - a)^2 R.$$

D'après (A), $F(b) = 0$ et, d'après (B), $F(a) = 0$.

Par conséquent, en vertu du théorème de Rolle (p. 187), au moins une valeur de x comprise entre a et b, soit x_1, annule $F'(x)$. Par suite, puisque

$$F'(x) = f'(x) - f'(a) - (x - a)R,$$

nous obtenons

$$F'(x_1) = f'(x_1) - f'(a) - (x_1 - a)R = 0.$$

Puisque $F'(x_1) = 0$ et $F'(a) = 0$, il est évident que $F'(x)$ satisfait également aux conditions du théorème de Rolle, de sorte que *sa dérivée,* c'est-à-dire $F''(x)$, doit s'annuler pour au moins une valeur de x comprise entre a et x_1, soit x_2, et par conséquent x_2 se trouve également comprise entre a et b. Mais,

$$F''(x) = f''(x) - R \,; \text{ donc } F''(x_2) = f''(x_2) - R = 0$$

et

$$R = f''(x_2).$$

En substituant ce résultat dans (A), nous obtenons

$$(C) \quad f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{1}{2!}(b - a)^2 f''(x_2). \qquad a < x_2 < b.$$

(*) Appelé aussi *développement de la loi de la moyenne.*

De la même manière, si nous définissons S au moyen de l'équation

$$f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\frac{1}{2!}(b-a)^2f''(a)-\frac{1}{3!}(b-a)^3S=0,$$

nous pouvons en faire dériver l'équation

$$\text{(D)}\qquad f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{1}{2!}(b-a)^2f''(a)+\frac{1}{3!}(b-a)^3f'''(x_3),\qquad a<x_3<b,$$

dans laquelle x_3 est compris entre a et b. En continuant cette méthode, nous obtenons le résultat général

$$\text{(E)}\qquad f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1!)}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(x_1),\qquad a<x_1<b,$$

dans lequel x_1 se trouve entre a et b. La relation (E) s'appelle le *développement du théorème de la moyenne*.

108. Maxima et minima traités analytiquement. — En utilisant les résultats des deux derniers paragraphes, nous pouvons maintenant donner une discussion générale des *maxima et minima des fonctions d'une seule variable indépendante*.

Etant donnée la fonction $f(x)$, soit h un nombre positif aussi petit qu'on voudra ; les définitions données au § 82, p. 122, peuvent alors être énoncées comme il suit :

Si, pour toutes les valeurs de x différant de a dans l'intervalle $[a-h, a+h]$,

$$\text{(A)}\qquad f(x)-f(a)=\textit{un nombre négatif},$$

on dit que $f(x)$ passe par un *maximum pour* $x=a$.

Si, d'autre part,

$$\text{(B)}\qquad f(x)-f(a)=\textit{un nombre positif},$$

on dit que $f(x)$ passe par un *minimum pour* $x=a$.

Considérons les cas suivants :

I. *Soit* $f'(a) \neq 0$. D'après (45), p. 189, en remplaçant b par x et en transposant $f(a)$, il vient

(C) $$f(x) - f(a) = (x - a) f'(x_1). \qquad a < x_1 < x.$$

Puisque $f'(a) \neq 0$ et que $f'(x)$ est supposée continue, h peut être choisi assez petit pour que $f'(x)$ ait le même signe que $f'(a)$ pour toutes les valeurs de x de l'intervalle $[a - h, a + h]$. Par conséquent $f'(x_1)$ a le même signe que $f'(a)$ (chapitre III). Mais, $x - a$ change de signe suivant que x est inférieur ou supérieur à a. Donc, d'après (C), la différence

$$f(x) - f(a)$$

changera également de signe et d'après (A) et (B), $f(a)$ ne sera ni un maximum ni un minimum. Ce résultat concorde avec la discussion du § 82, où il a été montré que *pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ passe par un maximum ou par un minimum, la dérivée première $f'(x)$ doit s'annuler.*

II. *Soit* $f'(a) = 0$ *et* $f''(a) \neq 0$.

D'après (C), p. 190, en remplaçant b par x et en transposant $f(a)$, il vient

(D) $$f(x) - f(a) = \frac{(x - a)^2}{2!} f''(x_2). \qquad a < x_2 < x.$$

Puisque $f''(a) \neq 0$ et que $f''(x)$ est supposée continue, nous pouvons choisir l'intervalle $[a - h, a + h]$ assez petit pour que $f''(x_2)$ ait le même signe que $f''(a)$ (chap. III) ; $(x - a)^2$ ne change pas non plus de signe. Par conséquent, le second membre de (D) ne change pas de signe et la différence

$$f(x) - f(a)$$

a le même signe pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $[a - h, a + h]$, et, de plus, *ce signe est le même que celui de $f''(a)$.*

En conséquence, il résulte de nos définitions (A) et (B) que :

(E) *$f(a)$ est un maximum si $f'(a) = 0$ et $f''(a) =$ un nombre négatif ;*

(F) *$f(a)$ est un minimum si $f'(a) = 0$ et $f''(a) =$ un nombre positif.*

Ces conditions sont les mêmes que celles énoncées sous les numéros **(21)** et **(22)**, p. 127.

III. *Soit* $f'(a) = f''(a) = 0$ *et* $f'''(a) \neq 0$.

D'après (D), p. 191, en remplaçant b par x et en transposant $f(a)$, il vient

(G) $$f(x) - f(a) = \frac{1}{3!}(x-a)^3 f'''(x_3). \quad a < x_3 < x.$$

Comme ci-dessus $f'''(x_3)$ aura le même signe que $f'''(a)$. Mais $(x-a)^3$ change son signe de — en + quand x croît en passant par a. Par conséquent, la différence

$$f(x) - f(a)$$

doit changer de signe et $f(a)$ n'est ni un maximum ni un minimum.

IV. *Soit* $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ *et* $f^{(n)}(a) \neq 0$.

En continuant la méthode employée dans I, II et III, on voit que si la première dérivée de $f(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = a$ est d'ordre pair ($= n$),

(47) **$f(a)$ est un maximum si $f^{(n)}(a) =$ un nombre négatif ;**

(48) **$f(a)$ est un minimum si $f^{(n)}(a) =$ un nombre positif** (*).

Si la première dérivée de $f(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = a$ est **d'ordre impair, $f(a)$ n'est ni un maximum ni un minimum.**

Exemple I. — Examiner $x^3 - 9x^2 + 24x - 7$ en ce qui concerne ses valeurs maximum et minimum.

Solution. $$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7.$$
$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24.$$

La résolution de $$3x^2 - 18x + 24 = 0$$

donne les valeurs critiques $x = 2$ et $x = 4$.

$$f'(2) = 0 \text{ et } f'(4) = 0.$$

Différentions de nouveau, $f''(x) = 6x - 18$.

Puisque $f''(2) = -6$, nous savons, d'après (47), que $f(2) = 13$ est un maximum.

Puisque $f''(4) = +6$, nous savons, d'après (48), que $f(4) = 9$ est un minimum.

Exemple II. — Examiner $e^x + 2\cos x + e^{-x}$ en ce qui concerne ses valeurs maximum et minimum.

(*) Comme au § 82, une valeur critique $x = a$ est trouvée en égalant la dérivée première à zéro et en résolvant l'équation résultante pour ses racines réelles.

Solution.

$$f(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x},$$
$$f'(x) = e^x - 2\sin x - e^{-x} = 0, \text{ pour } x = 0, (*)$$
$$f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x} = 0, \text{ pour } x = 0,$$
$$f'''(x) = e^x + 2\sin x - e^{-x} = 0, \text{ pour } x = 0,$$
$$f^{\text{IV}}(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x} = 4, \text{ pour } x = 0.$$

Par suite, d'après (48), $f(0) = 4$ est un minimum.

EXEMPLES

Examiner les fonctions suivantes en ce qui concerne leurs valeurs maxima et minima en utilisant la méthode du dernier paragraphe.

1. $3x^4 - 4x^3 + 1$. *Rép.* $x = 1$ donne min. $= 0$; $x = 0$ ne donne ni max. ni min.

2. $x^3 - 6x^2 + 12x + 48$. $x = 2$ ne donne ni max. ni min.

3. $(x-1)^2(x+1)^3$. $x = 1$ donne min. $= 0$; $x = \frac{1}{5}$ donne max. ; $x = -1$ ne donne ni max. ni min.

4. Examiner $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$, pour $x = 1$ et $x = 3$.

5. Examiner $x^3 - 3x^2 + 3x + 7$, pour $x = 1$.

6. Montrer que si la première dérivée de $f(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = a$ est d'ordre impair $(= n)$, $f(x)$ est une fonction croissante ou décroissante quand $x = a$ suivant que $f^{(n)}(a)$ est positive ou négative.

109. Formes indéterminées. — Quand pour une valeur particulière de la variable indépendante, une fonction prend une des formes

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \infty - \infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \qquad 1^\infty,$$

on dit qu'elle est *indéterminée*, et la fonction *n'est pas* définie pour cette valeur de la variable indépendante par l'expression analytique donnée.

Par exemple, supposons que nous ayons

$$y = \frac{f(x)}{F(x)},$$

et que pour une certaine valeur de la variable, telle que $x = a$,

$$f(a) = 0, \qquad F(a) = 0.$$

(*) $x = 0$ est la seule racine de l'équation $e^x - 2\sin x - e^{-x} = 0$.

Pour cette valeur de x, la fonction *n'est pas* définie et nous pouvons, par suite, lui assigner la valeur qu'il nous plaît. Il est évident, d'après ce que nous avons vu (2e cas, p. 16), qu'il est utile de pouvoir attribuer à la fonction une valeur qui la rende continue quand $x = a$, toutes les fois que cela est possible.

110. Évaluation d'une fonction prenant une forme indéterminée. — Si pour $x = a$ la fonction $f(x)$ prend une forme indéterminée, *on prend alors*

$$\lim_{x=a} f(x) \ (^*)$$

comme valeur de $f(x)$ pour $x = a$.

Le fait de prendre cette valeur limite comme valeur de $f(x)$ rend $f(x)$ continue pour $x = a$, ce qui concorde avec le théorème du 2e cas, p. 16, et aussi, avec les exercices du chapitre III, où plusieurs fonctions prenant la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ont été évaluées. Ainsi, pour $x = 2$, la fonction $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ prend la forme $\frac{0}{0}$, mais

$$\lim_{x=2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Par suite, on prend 4 comme valeur de la fonction pour $x = 2$. Montrons maintenant graphiquement que si nous supposons 4 comme étant la valeur de la fonction pour $x = 2$, la fonction est continue pour $x = 2$.

Soit
$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Cette équation peut s'écrire également sous la forme

$$y(x - 2) = (x - 2)(x + 2);$$

ou
$$(x - 2)(y - x - 2) = 0.$$

En égalant à zéro chaque facteur séparément, nous avons

$$x = 2 \quad \text{et} \quad y = x + 2.$$

En construisant le graphique (*fig.* 91), on trouve que les lieux de ces équations sont respectivement les deux lignes AB et CD. Puisqu'il

(*) Le calcul de cette valeur limite est appelé *évaluation de la forme indéterminée*.

y a un nombre infini de points sur la ligne AB ayant l'abscisse 2, il est clair que quand $x = 2 = \mathrm{OM}$, la valeur de y (ou de la fonction) peut être prise par n'importe quel nombre. Mais quand x est différent de 2, on voit par le graphique de la fonction, que la valeur correspondante de y (ou de la fonction) est toujours obtenue en partant de

$$y = x + 2,$$

qui est l'équation de la ligne CD.

Et pour CD, quand $x = 2$, nous obtenons

$$y = \mathrm{MP} = 4,$$

Fig. 91.

qui, nous le voyons, est aussi la valeur limite de y (ou de la fonction) pour $x = 2$; et il est évident, d'après des considérations géométriques, que si nous supposons 4 comme étant la valeur de la fonction pour $x = 2$, la fonction est alors continue pour $x = 2$.

De même, plusieurs des exemples donnés au chapitre III, montrent comment les valeurs limites d'un grand nombre de fonctions prenant des formes indéterminées peuvent être trouvées en employant des transformations algébriques ou trigonométriques appropriées, et comment, en général, ces valeurs limites rendent continues les fonctions correspondantes aux points en question. Cependant, les méthodes les plus générales pour évaluer les formes indéterminées dépendent de la différentiation.

111. Évaluation de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. — Étant donnée une fonction de la forme $\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}$ telle que $f(a) = 0$ et $\mathrm{F}(a) = 0$, c'est-à-dire une fonction prenant la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ quand a est substitué à x, on demande de trouver

$$\underset{x=a}{\text{limite}} \frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}.$$

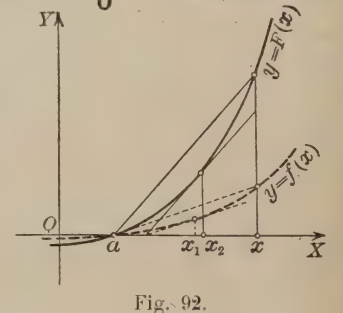


Fig. 92.

Traçons les graphiques des fonctions $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$. Puisque, par hypothèse, $f(a) = 0$ et $\mathrm{F}(a) = 0$, ces graphiques se coupent en $(a, 0)$.

En appliquant le théorème de la moyenne à chacune de ces fonctions (en remplaçant b par x), il vient

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(x_1), \qquad a < x_1 < x,$$
$$F(x) = F(a) + (x-a)F'(x_2), \qquad a < x_2 < x.$$

Puisque $f(a) = 0$ et $F(a) = 0$, nous obtenons, après avoir supprimé $(x-a)$,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_2)}.$$

Maintenant, faisons $x \doteq a$,

alors $$x_1 \doteq a, \qquad x_2 \doteq a$$

et $$\operatorname*{limite}_{x=a} f'(x_1) = f'(a),$$

$$\operatorname*{limite}_{x=a} F'(x_2) = F'(a);$$

(49) $$\operatorname*{limite}_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}. \qquad F'(a) \neq 0.$$

Règle pour évaluer la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. — *Différentier le numérateur et le dénominateur pour obtenir un nouveau numérateur et un nouveau dénominateur* (*). *La valeur de cette nouvelle fraction pour la valeur considérée* (**) *de la variable sera la valeur limite de la fraction primitive.*

Quand il arrive que

$$f'(a) = 0 \quad \text{et} \quad F'(a) = 0,$$

c'est-à-dire que les dérivées premières s'annulent également pour

---

(*) Nous mettons en garde le lecteur contre la faute d'étourderie très fréquente qui consiste à différentier toute l'expression comme une fraction d'après VII, p. 39.

(**) Si $a = \infty$, la substitution $x = \frac{1}{z}$ réduit le problème à l'évaluation de la limite pour $z = 0$.

Ainsi. $$\operatorname*{limite}_{x=\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \operatorname*{limite}_{z=0} \frac{-f'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{-F'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}} = \operatorname*{limite}_{z=0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)} = \operatorname*{limite}_{x=\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Par conséquent, la règle s'applique également dans ce cas.

$x=a$, nous avons encore la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ et le théorème peut être appliqué de nouveau au rapport

$$\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

ce qui nous donne

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}.$$

Quand aussi $f''(a)=0$ et $F''(a)=0$, nous obtenons de la même manière

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'''(a)}{F'''(a)},$$

et ainsi de suite.

Il peut être nécessaire de répéter cette opération plusieurs fois.

Exemple I. — Évaluer $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ quand $x=1$.

Solution. $\frac{f(1)}{F(1)} = \left[\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}\right]_{x=1} = \frac{1-3+2}{1-1-1+1} = \frac{0}{0}$; indéterminé.

$$\frac{f'(1)}{F'(1)} = \left[\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}\right]_{x=1} = \frac{3-3}{3-2-1} = \frac{0}{0};\ \text{indéterminé.}$$

$$\frac{f''(1)}{F''(1)} = \left[\frac{6x}{6x-2}\right]_{x=1} = \frac{6}{6-2} = \frac{3}{2}.\ \textit{Rép.}$$

Exemple II. — Évaluer $\lim_{x=0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Solution. $\frac{f(0)}{F(0)} = \left[\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\right]_{x=0} = \frac{1-1-0}{0-0} = \frac{0}{0}$; indéterminé.

$$\frac{f'(0)}{F'(0)} = \left[\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\right]_{x=0} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0};\ \text{indéterminé.}$$

$$\frac{f''(0)}{F''(0)} = \left[\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\right]_{x=0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0};\ \text{indéterminé.}$$

$$\frac{f'''(0)}{F'''(0)} = \left[\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}\right]_{x=0} = \frac{1+1}{1} = 2.\ \textit{Rép.}$$

EXEMPLES

Evaluer les limites ci-après par différentiation (*) :

1. $\lim_{x=4} \frac{x^2-16}{x^2+x-20}$. *Rép.* $\frac{8}{9}$.

2. $\lim_{x=1} \frac{x-1}{x^n-1}$. *Rép.* $\frac{1}{n}$.

(*) Après avoir différentié, le lecteur devra dans chaque cas réduire l'expression résultante à sa forme la plus simple avant de substituer la valeur de la variable.

3. $\underset{x=1}{\text{limite}} \dfrac{\log x}{x-1}$. *Rép.* 1.

4. $\underset{x=0}{\text{limite}} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$. 2.

5. $\underset{x=0}{\text{limite}} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$. 2.

6. $\underset{x=\frac{\pi}{2}}{\text{limite}} \dfrac{\log \sin x}{(\pi - 2x)^2}$. $-\dfrac{1}{8}$.

7. $\underset{x=0}{\text{limite}} \dfrac{a^x - b^x}{x}$. $\log \dfrac{a}{b}$.

8. $\underset{r=a}{\text{limite}} \dfrac{r^3 - ar^2 - a^2r + a^3}{r^2 - a^2}$. 0.

9. $\underset{\theta=0}{\text{limite}} \dfrac{\theta - \operatorname{arc} \sin \theta}{\sin^3 \theta}$. $-\dfrac{1}{6}$.

10. $\underset{x=\varphi}{\text{limite}} \dfrac{\sin x - \sin \varphi}{x - \varphi}$. *Rép.* $\cos \varphi$.

11. $\underset{y=0}{\text{limite}} \dfrac{e^y + \sin y - 1}{\log (1 + y)}$. 2.

12. $\underset{\theta=0}{\text{limite}} \dfrac{\operatorname{tg} \theta + \sec \theta - 1}{\operatorname{tg} \theta - \sec \theta + 1}$. 1.

13. $\underset{\varphi=\frac{\pi}{4}}{\text{limite}} \dfrac{\sec^2 \varphi - 2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \cos 4\varphi}$. $\dfrac{1}{2}$.

14. $\underset{z=a}{\text{limite}} \dfrac{az - z^2}{a^4 - 2a^3z + 2az^3 - z^4}$. $+\infty$.

15. $\underset{x=2}{\text{limite}} \dfrac{(e^x - e^2)^3}{(x - 4)e^x + e^2 x}$. $6e^4$

16. $\underset{x=1}{\text{limite}} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$.

17. $\underset{x=-2}{\text{limite}} \dfrac{x^3 + 8}{x^5 + 32}$.

18. $\underset{x=0}{\text{limite}} \dfrac{\sin 2x}{x}$.

19. $\underset{x=0}{\text{limite}} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

20. $\underset{x=1}{\text{limite}} \dfrac{\log \cos (x - 1)}{1 - \sin \dfrac{\pi x}{2}}$.

21. $\underset{x=0}{\text{limite}} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

112. Évaluation de la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. — Pour trouver

$$\underset{x=a}{\text{limite}} \frac{f(x)}{F(x)}$$

quand $\underset{x=a}{\text{limite}} f(x) = \infty$ et $\underset{x=a}{\text{limite}} F(x) = \infty$,

c'est-à-dire quand pour $x = a$ la fonction

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

prend la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$, nous suivons la même règle que celle qui a été donnée, p. 197, pour évaluer la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. D'où :

Règle pour évaluer la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. — *Différentier le numérateur et le dénominateur pour obtenir un nouveau numérateur et un nouveau dénominateur. La valeur de cette nouvelle fraction pour la valeur considérée de la variable est la valeur limite de la fraction primitive.*

Une démonstration rigoureuse de cette règle est au-dessus de la portée de ce livre et doit être réservée pour des traités plus avancés.

Exemple. — Evaluer $\frac{\log x}{\operatorname{cosec} x}$ pour $x=0$.

Solution. $\frac{f(0)}{F(0)}=\left[\frac{\log x}{\operatorname{cosec} x}\right]_{x=0}=\frac{-\infty}{\infty}$; indéterminé.

$$\frac{f'(0)}{F'(0)}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x}\right]_{x=0}=-\left[\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}\text{; indéterminé.}$$

$$\frac{f''(0)}{F''(0)}=\left[-\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}\right]_{x=0}=-\frac{0}{1}=0. \text{ Rép.}$$

113. Évaluation de la forme indéterminée $0\cdot\infty$. — Si une fonction $f(x)\cdot\varphi(x)$ prend la forme indéterminée $0\cdot\infty$ pour $x=a$, nous écrirons la fonction donnée

$$f(x)\varphi(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\left(\text{ou}=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}\right),$$

afin de lui faire prendre l'une des formes $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ et de lui appliquer ensuite la règle du § 111 ou celle du § 112.

Exemple. — Évaluer $\sec 3x\cos 5x$ pour $x=\frac{\pi}{2}$.

Solution. $[\sec 3x\cdot\cos 5x]_{x=\frac{\pi}{2}}=\infty\cdot 0$; indéterminé.

En substituant $\frac{1}{\cos 3x}$ à $\sec 3x$, la fonction devient $\frac{\cos 5x}{\cos 3x}=\frac{f(x)}{F(x)}$.

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\left[\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{0}\text{; indéterminé.}$$

$$\frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\left[\frac{-\sin 5x\cdot 5}{-\sin 3x\cdot 3}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=-\frac{5}{3}. \text{ Rép.}$$

114. Évaluation de la forme indéterminée $\infty-\infty$. — Il est possible, en général, de transformer l'expression en une fraction qui prendra soit la forme $\frac{0}{0}$, soit la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple. — Évaluer $\sec x - \operatorname{tg} x$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Solution. $[\sec x - \operatorname{tg} x]_{x=\frac{\pi}{2}} = \infty - \infty$; indéterminé.

D'après la trigonométrie

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{f(x)}{F(x)}.$$

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \left[\frac{1 - \sin x}{\cos x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\text{ ; indéterminé.}$$

$$\frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \left[\frac{-\cos x}{-\sin x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{-1} = 0. \quad \textit{Rép.}$$

EXEMPLES

Evaluer les expressions suivantes par différentiation (*) :

1. $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{ax^2+b}{cx^2+d}$. *Rép.* $\dfrac{a}{c}$.
2. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\operatorname{cotg} x}{\log x}$. $-\infty$.
3. $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{\log x}{x^n}$. 0.
4. $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$. 0.
5. $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{e^x}{\log x}$. ∞.
6. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\log \sin 2x}{\log \sin x}$. 1.
7. $\lim\limits_{\theta=\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg} 3\theta}$. 3.
8. $\lim\limits_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \dfrac{\log\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\varphi}$. 0.
9. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\log x}{\operatorname{cotg} x}$. 0.
10. $\lim\limits_{x=0} x \log \sin x$. 0.
11. $\lim\limits_{x=0} x \operatorname{cotg} \pi x$. $\dfrac{1}{\pi}$.
12. $\lim\limits_{y=\infty} \dfrac{y}{e^{ay}}$. *Rép.* 0.
13. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\operatorname{tg} x$. 2.
14. $\lim\limits_{x=\infty} x \sin \dfrac{a}{x}$. a.
15. $\lim\limits_{x=0} x^n \log x$. [$n$ positif.] 0.
16. $\lim\limits_{\theta=\frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{tg}\theta) \sec 2\theta$. 1.
17. $\lim\limits_{\varphi=a} (a^2 - \varphi^2) \operatorname{tg} \dfrac{\pi\varphi}{2a}$. $\dfrac{4a^2}{\pi}$.
18. $\lim\limits_{x=1} \left[\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right]$. $-\dfrac{1}{2}$.
19. $\lim\limits_{x=1} \left[\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{x}{\log x}\right]$. -1
20. $\lim\limits_{\theta=\frac{\pi}{2}} [\sec\theta - \operatorname{tg}\theta]$. 0.
21. $\lim\limits_{\varphi=0} \left[\dfrac{2}{\sin^2\varphi} - \dfrac{1}{1-\cos\varphi}\right]$. $\dfrac{1}{2}$.
22. $\lim\limits_{y=1} \left[\dfrac{y}{y-1} - \dfrac{1}{\log y}\right]$. $\dfrac{1}{2}$.
23. $\lim\limits_{z=0} \left[\dfrac{\pi}{4z} - \dfrac{\pi}{2z(e^{\pi z}+1)}\right]$. $\dfrac{\pi^2}{8}$.

(*) En résolvant les exemples qui restent à voir dans ce chapitre, il peut être utile au lecteur de se référer au § 24, pp. 25, 26, où plusieurs formes spéciales *non indéterminées* sont évaluées.

115. Évaluation des formes indéterminées 0^0, 1^∞, ∞^0. — Étant donnée une fonction de la forme

$$f(x)^{\varphi(x)},$$

pour que la fonction puisse prendre une des trois formes ci-dessus, nous devons avoir pour une certaine valeur de x :

$$f(x)=0, \quad \varphi(x)=0, \text{ ce qui donne } 0^0;$$

ou $$f(x)=1, \quad \varphi(x)=\infty, \text{ ce qui donne } 1^\infty;$$

ou $$f(x)=\infty, \quad \varphi(x)=0, \text{ ce qui donne } \infty^0.$$

Soit $$y=f(x)^{\varphi(x)}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres :

$$\log y=\varphi(x)\log f(x).$$

Dans l'un quelconque des cas ci-dessus, le logarithme de y (la fonction) prendra la forme indéterminée

$$0\cdot\infty.$$

L'évaluation de ce résultat par la méthode exposée au § 113 donne la limite du logarithme de la fonction ; celle-ci étant égale au logarithme de la limite de la fonction, la limite de la fonction est connue (*).

EXEMPLE I. — Évaluer x^x quand $x=0$.

Solution. Cette fonction prend la forme indéterminée 0^0 pour $x=0$.

Soit $$y=x^x;$$

alors $$\log y=x\log x=0(-\infty), \qquad \text{quand } x=0.$$

D'après le § 113, p. 200,

$$\log y=\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}, \qquad \text{quand } x=0.$$

D'après le § 112, p. 199,

$$\log y=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-x=0, \qquad \text{quand } x=0.$$

Puisque $y=x^x$, nous avons

$$\log_e x^x=0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x^x=1. \quad \textit{Réponse.}$$

(*) Ainsi, si limite $\log_e y=a$, alors $y=e^a$.

EXEMPLE II. — Évaluer $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ quand $x=0$.

Solution. La fonction prend la forme indéterminée 1^{∞} pour $x=0$.

Soit $$y=(1+x)^{\frac{1}{x}};$$

alors $$\log y=\frac{1}{x}\log(1+x)=\infty\cdot 0, \qquad \text{quand } x=0.$$

D'après le § 113, p. 200,

$$\log y=\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{0}{0}, \qquad \text{quand } x=0.$$

D'après le § 111, p. 196,

$$\log y=\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\frac{1}{1+x}=1, \qquad \text{quand } x=0.$$

Puisque $$y=(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

nous avons $$\log_e(1+x)^{\frac{1}{x}}=1,$$

c'est-à-dire $$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \qquad \textit{Réponse.}$$

EXEMPLE III. — Évaluer $(\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$ pour $x=0$.

Solution. Cette fonction prend la forme indéterminée ∞^0 pour $x=0$.

Soit $$y=(\operatorname{cotg} x)^{\sin x};$$

alors $$\log y=\sin x\log\operatorname{cotg} x=0\cdot\infty, \qquad \text{quand } x=0.$$

D'après le § 113, p. 200,

$$\log y=\frac{\log\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x}=\frac{\infty}{\infty}, \qquad \text{quand } x=0.$$

D'après le § 112, p. 199,

$$\log y=\frac{\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{cotg} x}}{-\operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0, \qquad \text{quand } x=0.$$

Puisque $y=(\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$, on a

$$\log_e(\operatorname{cotg} x)^{\sin x}=0,$$

c'est-à-dire $$(\operatorname{cotg} x)^{\sin x}=1. \qquad \textit{Réponse.}$$

EXEMPLES

Évaluer les expressions ci-après par différentiation :

1. $\lim\limits_{x=1} x^{\frac{1}{1-x}}$. *Rép.* $\frac{1}{e}$.

2. $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. 1.

3. $\lim\limits_{\theta=\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{\operatorname{tg}\theta}$. *Rép.* 1.

4. $\lim\limits_{y=\infty}\left(1+\frac{a}{y}\right)^{y}$. e^a.

5. $\underset{x=0}{\text{limite}}\,(1+\sin x)^{\operatorname{cotg} x}$. *Rép.* e.

6. $\underset{x=\infty}{\text{limite}}\left(\frac{2}{x}+1\right)^{x}$. e^2.

7. $\underset{x=0}{\text{limite}}\,(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$. e^2.

8. $\underset{x=0}{\text{limite}}\,(\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\log x}}$. $\frac{1}{e}$.

9. $\underset{z=0}{\text{limite}}\,(1+nz)^{\frac{1}{z}}$. e^n.

10. $\underset{\varphi=1}{\text{limite}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{2}}$. *Rép.* $\frac{1}{e}$.

11. $\underset{\theta=0}{\text{limite}}\,(\cos m\theta)^{\frac{n}{\theta^2}}$. $e^{-\frac{1}{2}nm^2}$.

12. $\underset{x=0}{\text{limite}}\,(\operatorname{cotg} x)^{x}$. 1.

13. $\underset{x=a}{\text{limite}}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$. $e^{\frac{2}{\pi}}$.

CHAPITRE XIV

CERCLE DE COURBURE. CENTRE DE COURBURE

116. Cercle de courbure (*). Centre de courbure. — Si un cercle est tracé par trois points P_0, P_1, P_2, situés sur une courbe plane (*fig.* 93) et que P_1 et P_2 tendent vers P_0 comme position limite, en se déplaçant sur la courbe, le cercle tendra en général, en grandeur et en position, vers un cercle limite appelé *cercle de courbure de la courbe au point* P_0. Le centre de ce cercle est appelé *centre de courbure.*

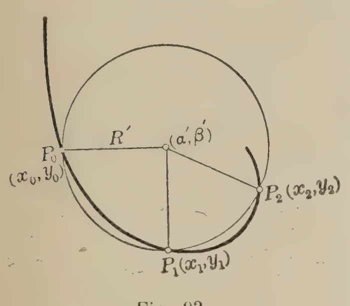


Fig. 93.

Soit

$$(1) \qquad y = f(x)$$

l'équation de la courbe et soient x_0, x_1, x_2 les abscisses respectives des points P_0, P_1, P_2, (α', β') les coordonnées du centre et R' le rayon du cercle passant par les trois points. Alors, l'équation du cercle est

$$(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 = R'^2;$$

et puisque les coordonnées des points P_0, P_1, P_2 doivent satisfaire à cette équation, nous avons

$$(2) \qquad \begin{cases} (x_0-\alpha')^2 + (y_0-\beta')^2 - R'^2 = 0, \\ (x_1-\alpha')^2 + (y_1-\beta')^2 - R'^2 = 0, \\ (x_2-\alpha')^2 + (y_2-\beta')^2 - R'^2 = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant la *fonction de x* définie par

$$F(x) = (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 - R'^2,$$

dans laquelle y a été remplacé par $f(x)$ d'après (1).

(*) Appelé parfois *cercle osculateur*. Le cercle de courbure a été défini d'un autre point de vue p. 183.

Nous obtenons alors, d'après les équations (2),

$$F(x_0) = 0, \qquad F(x_1) = 0, \qquad F(x_2) = 0.$$

Par suite, d'après le théorème de Rolle (p. 187), $F'(x)$ doit s'annuler pour au moins deux valeurs de x, l'une comprise entre x_0 et x_1 soit x', et l'autre entre x_1 et x_2, soit x'', c'est-à-dire que

$$F'(x') = 0, \qquad F'(x'') = 0.$$

Pour la même raison, $F''(x)$ doit s'annuler pour une certaine valeur de x comprise entre x' et x'', soit x_3 ; par suite

$$F''(x_3) = 0.$$

Par conséquent, les éléments α', β', R' du cercle passant par les points P_0, P_1, P_2 doivent satisfaire aux trois équations

$$F(x_0) = 0, \qquad F'(x') = 0, \qquad F''(x_3) = 0.$$

Supposons maintenant que P_1 et P_2 tendent vers P_0 comme position limite ; alors x_1, x_2, x', x'', x_3 tendront tous vers x_0 comme limite et les éléments α, β, R du cercle osculateur sont par suite déterminés par les trois équations

$$F(x_0) = 0, \qquad F'(x_0) = 0, \qquad F''(x_0) = 0 ;$$

ou, ce qui revient au même, en laissant de côté les accents,

(A) $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

(B) $$(x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0, \text{ en différentiant (A)};$$

(C) $$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{ en différentiant (B)}.$$

En résolvant (B) et (C) par rapport à $x - \alpha$ et $y - \beta$, nous obtenons $\left(\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0\right)$,

(D) $$\begin{cases} x - \alpha = \dfrac{\dfrac{dy}{dx}\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \\[2ex] y - \beta = -\dfrac{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} ; \end{cases}$$

Par suite, *les coordonnées du centre de courbure sont*

$$
(\mathrm{E}) \quad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= x - \frac{\dfrac{dy}{dx}\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\\
\beta &= y + \frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}.
\end{aligned}
\right. \qquad \left(\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0\right).
$$

Fig. 94.

En substituant les valeurs de $x-\alpha$ et $y-\beta$ de (D) dans (A) et en résolvant par rapport à R, nous obtenons

$$
\mathrm{R} = \pm \frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},
$$

formule qui est identique à (**42**), p. 181. Par suite :

Théorème. — *Le rayon du cercle de courbure est égal au rayon de courbure.*

117. Seconde méthode pour trouver le centre de courbure. — Ici, nous utiliserons la définition du cercle de courbure donnée p. 183. Traçons une figure représentant la tangente, le cercle de courbure, le rayon de courbure et le centre de courbure (α, β) correspondant au point $P(x, y)$ de la courbe (*fig.* 95). Alors

Fig. 95.

$$
\alpha = \mathrm{OA} = \mathrm{OD} - \mathrm{AD} = \mathrm{OD} - \mathrm{BP} = x - \mathrm{BP},
$$
$$
\beta = \mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} = \mathrm{DP} + \mathrm{BC} = y + \mathrm{BC}.
$$

Mais, $\quad \mathrm{BP} = \mathrm{R}\sin\tau, \qquad \mathrm{BC} = \mathrm{R}\cos\tau.$

Par suite,

(A) $\qquad \alpha = x - \mathrm{R}\sin\tau, \qquad \beta = y + \mathrm{R}\cos\tau.$

D'après (**29**), p. 153 et (**42**), p. 181,

$$\sin\tau = \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},\ \cos\tau = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},\ R = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

En substituant ces valeurs dans (A), nous obtenons

$$(50)\qquad \alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}};\quad \beta = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

D'après (**23**), p. 142, nous savons qu'en un point d'inflexion (tel que Q dans la figure 96) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Par conséquent, d'après (**40**), p. 178, la courbure $K = 0$; et d'après (**42**), p. 181, et (**50**), p. 208, nous voyons qu'en général, α, β, R croissent sans limite quand la dérivée seconde tend vers zéro, c'est-à-dire que si nous supposons que P, avec sa tangente, se déplace sur la courbe dans la direction de P', au point d'inflexion Q, la courbure est nulle, la rotation de la tangente est momentanément arrêtée, et comme la direction de rotation change, le centre de courbure est rejeté à l'infini et le rayon de courbure devient infini.

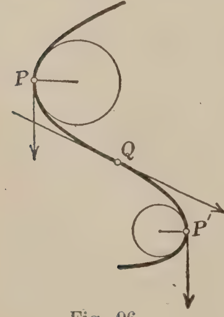


Fig. 96.

Exemple. — Trouver les coordonnées du centre de courbure de la parabole $y^2 = 4px$ correspondant :

(a) à un point quelconque de la courbe ;
(b) au sommet.

Solution. $\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4p^2}{y^3}$.

(a) Substituons dans (E), p. 207,

$$\alpha = x + \frac{y^2+4p^2}{y^2}\cdot\frac{2p}{y}\cdot\frac{y^3}{4p^2} = 3x + 2p,$$

$$\beta = y - \frac{y^2+4p^2}{y^2}\cdot\frac{y^3}{4p^2} = -\frac{y^3}{4p^2}.$$

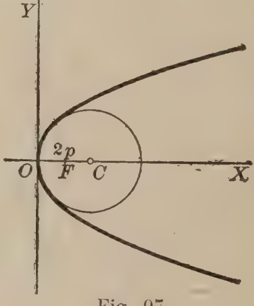


Fig. 97.

Par conséquent $\left(3x+2p,\ -\frac{y^3}{4p^2}\right)$ est le centre de courbure correspondant à un point quelconque de la courbe.

(*b*) $(2p, 0)$ est le centre de courbure correspondant au sommet $(0, 0)$.

118. Le centre de courbure, position limite de l'intersection de normales en des points infiniment voisins. — Soit

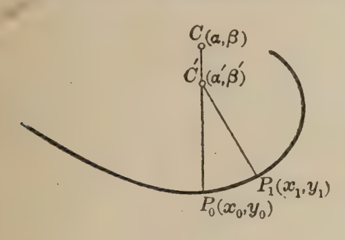


Fig. 98.

$$\text{(A)} \qquad y = f)x)$$

l'équation d'une courbe.

Les équations des normales à la courbe en deux points voisins P_0 et P_1 sont (*)

$$(x_0 - X) + (y_0 - Y)\frac{dy_0}{dx_0} = 0,$$

$$(x_1 - X) + (y_1 - Y)\frac{dy_1}{dx_1} = 0.$$

Si les normales se coupent en C' (α', β'), les coordonnées de ce point doivent satisfaire aux deux équations, ce qui donne

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} (x_0 - \alpha') + (y_0 - \beta')\dfrac{dy_0}{dx_0} = 0, \\ (x_1 - \alpha') + (y_1 - \beta')\dfrac{dy_1}{dx_1} = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant la *fonction de x* définie par

$$\varphi(x) = (x - \alpha') + (y - \beta')\frac{dy}{dx},$$

dans laquelle y a été remplacé par $f(x)$, d'après (A).

Dans ces conditions, les équations (B) montrent que

$$\varphi(x_0) = 0, \qquad \varphi(x_1) = 0.$$

Mais alors, en vertu du théorème de Rolle (p. 187), $\varphi'(x)$ doit s'annuler pour une certaine valeur de x comprise entre x_0 et x_1, soit x'. Par suite, α' et β' sont déterminés par les deux équations

$$\varphi(x_0) = 0, \qquad \varphi'(x') = 0.$$

Si, maintenant, P_1 tend vers P_0 comme position limite, alors x' tend vers x_0, ce qui donne

$$\varphi(x_0) = 0, \qquad \varphi'(x_0) = 0;$$

et C' (α', β') tendra, comme position limite, vers le centre de cour-

(*) D'après (2), p. 85, X et Y étant les coordonnées variables.

bure C (α, β) correspondant à P_0 sur la courbe ; car si nous laissons de côté les accents et que nous écrivions les deux dernières équations sous la forme

$$(x-\alpha')+(y-\beta')\frac{dy}{dx}=0, \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta')\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

il est évident que la résolution de ces équations par rapport à α' et β' donnera les mêmes résultats que la résolution de (B) et (C), p. 206, par rapport à α et β. Par suite,

Théorème. — *Le centre de courbure* C *correspondant à un point* P *d'une courbe est la position limite de l'intersection de la normale à la courbe en* P *avec une normale infiniment voisine.*

119. Développées. — Le lieu des centres de courbure d'une courbe donnée est appelé la *développée* de cette courbe.

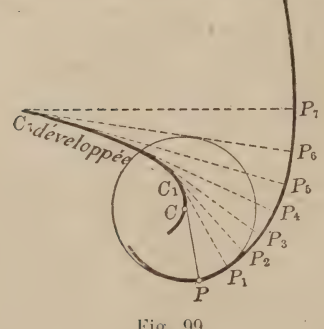


Fig. 99.

Considérons le cercle de courbure correspondant à un point P d'une courbe (*fig.* 99). Si P se déplace sur la courbe donnée, nous pouvons supposer que le cercle de courbure correspondant roule sur la courbe en même temps que P se déplace, le rayon de ce cercle variant de façon à être constamment égal au rayon de courbure de la courbe au point P. La courbe CC_7 décrite par le centre du cercle est la développée de PP_7.

Il est intéressant de faire une construction approchée de la développée d'une courbe en évaluant (d'après la forme de la courbe) les longueurs des rayons de courbure en différents points de la courbe, de tracer ensuite ces rayons de courbure ainsi que le lieu des centres de courbure. La formule (E), p. 207, donne les coordonnées d'un point quelconque (α, β) de la développée exprimées en fonction des coordonnées du point correspondant (x, y) de la courbe donnée. Mais y est une fonction de x ; par conséquent

$$\alpha=x-\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad \beta=y+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

nous donne immédiatement *les équations paramétriques de la développée en fonction du paramètre x.*

Pour trouver l'équation rectangulaire ordinaire de la développée, nous éliminerons x entre les deux expressions. On ne peut donner de méthode générale d'élimination s'appliquant à tous les cas ; la méthode à adopter dépend de la forme de l'équation donnée. Dans un grand nombre de cas, cependant, le lecteur pourra trouver l'équation rectangulaire de la développée en se servant des directives ci-après :

Directives générales pour trouver l'équation de la développée en coordonnées rectangulaires.

1re opération. Trouver α et β d'après (**50**), p. 208.

2e opération. Résoudre les deux équations résultantes par rapport à x et y en fonction de α et de β.

3e opération. Substituer ces valeurs de x et de y dans l'équation donnée, ce qui donne une relation entre les variables α et β qui est l'équation de la développée.

Exemple I. — Trouver l'équation de la développée de la parabole $y^2 = 4px$ (*fig.* 100).

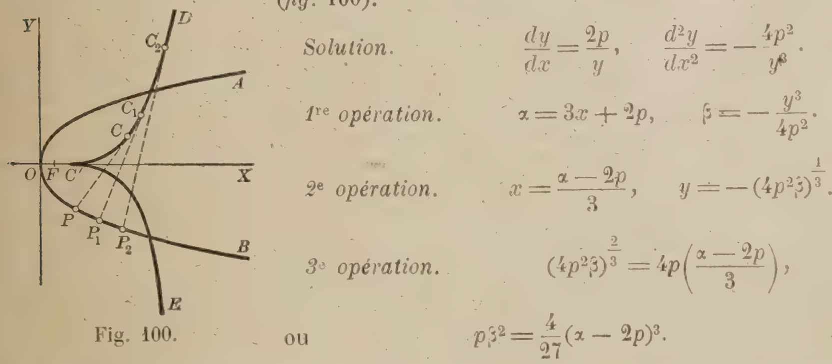


Fig. 100.

Solution. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2p}{y}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{4p^2}{y^3}.$

1re opération. $\alpha = 3x + 2p, \quad \beta = -\dfrac{y^3}{4p^2}.$

2e opération. $x = \dfrac{\alpha - 2p}{3}, \quad y = -(4p^2\beta)^{\frac{1}{3}}.$

3e opération. $(4p^2\beta)^{\frac{2}{3}} = 4p\left(\dfrac{\alpha - 2p}{3}\right),$

ou $p\beta^2 = \dfrac{4}{27}(\alpha - 2p)^3.$

En se rappelant que α désigne l'abscisse et β l'ordonnée d'un système de coordonnées rectangulaires, nous voyons que la développée de la parabole AOB est la parabole semi-cubique DC′E, les centres de courbure correspondant à O, P, P_1, P_2 étant respectivement en C′, C, C_1, C_2.

Exemple II. — Trouver l'équation de la développée de l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (fig.\ 101).$$

Solution. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{b^4}{a^2y^3}.$

1re opération. $\alpha = \frac{(a^2 - b^2)x^3}{a^4}$,

$$\beta = -\frac{(a^2 - b^2)y^3}{b^4}.$$

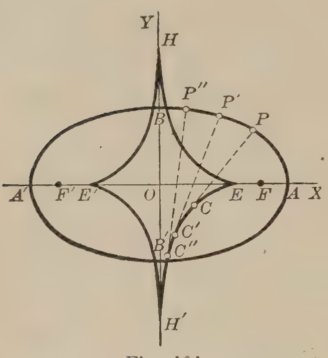


Fig. 101.

2e opération. $x = \left(\frac{a^4\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$,

$$y = -\left(\frac{b^4\beta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

3e opération. $(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$, relation qui est l'équation de la développée EHE′H′ de l'ellipse ABA′B′. Les points E, E′, H′, H sont les centres de courbure correspondant aux points A, A′, B, B′ de la courbe et C, C′, C″ correspondent aux points P, P′, P″.

Quand les équations de la courbe sont données sous forme paramétrique, on procède comme p. 182, pour trouver $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, en partant de

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3};$$

et l'on substitue ensuite les résultats dans la formule (50), p. 208. On obtient ainsi les équations paramétriques de la développée en fonction du paramètre qui se trouve dans les équations données.

Exemple III. — Les équations paramétriques d'une courbe sont

$$\text{(B)} \qquad x = \frac{t^2 + 1}{4}, \qquad y = \frac{t^3}{6}.$$

Trouver l'équation de la développée sous forme paramétrique, construire la courbe et la développée, trouver le rayon de courbure au point où $t = 1$ et tracer le cercle de courbure correspondant.

Solution.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{2}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = t.$$

La substitution dans les formules (A) ci-dessus, et ensuite dans (50), p. 208. donne

$$\text{(C)} \qquad \alpha = \frac{1 - t^2 - 2t^4}{4}, \qquad \beta = \frac{4t^3 + 3t}{6},$$

relations qui sont les équations paramétriques de la développée. En donnant

des valeurs déterminées au paramètre t, nous calculons x, y, α et β d'après (B) et (C) et nous dressons comme ci-contre le tableau des résultats obtenus.

t	x	y	α	β
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$		
2	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{35}{4}$	$\frac{19}{3}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{91}{32}$	3
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{6}$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{13}{16}$	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{91}{32}$	-3
-2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{35}{4}$	$-\frac{19}{3}$
-3	$\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{2}$		

Construisons maintenant la courbe et sa développée (*fig.* 102).

Le point $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ est commun à la courbe donnée et à sa développée. La courbe donnée (parabole semi-cubique) se trouve entièrement à droite et la développée entièrement à gauche de

$$x = \frac{1}{4}.$$

Le cercle de courbure en A $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ où $t = 1$ aura son centre en A′ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right)$ sur la développée et son rayon est égal à AA′. Pour vérifier ces résultats, cher-

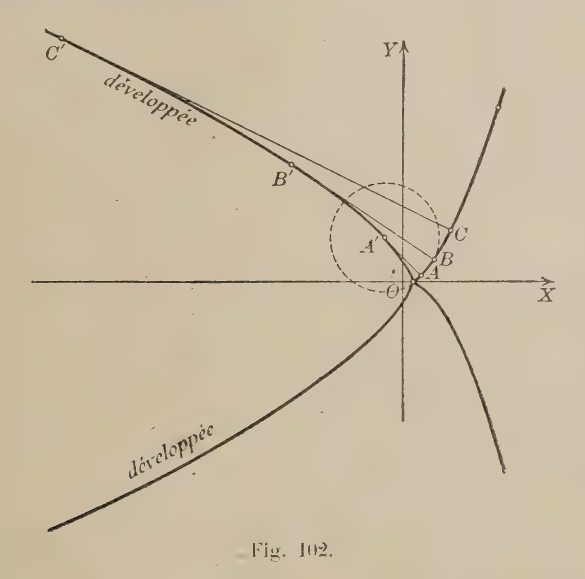


Fig. 102.

chons le rayon de courbure correspondant au point A. D'après (42), p. 181, nous obtenons

$$R = \frac{t(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}{2} = \sqrt{2},$$

quand $t = 1$, et ce résultat est précisément égal à

$$AA' = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{7}{6}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

EXEMPLE IV. — Trouver les équations paramétriques de la développée de la cycloïde

(C) $$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Solution. Comme dans l'exemple 2, p. 182, nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

En substituant ces résultats dans les formules (50), p. 208, il vient

(D) $$\begin{cases} \alpha = a(t + \sin t), \\ \beta = -a(1 - \cos t). \end{cases}$$ *Réponse.*

NOTE. — Si nous éliminons t entre les équations (D), on obtient l'équation rectangulaire de la développée $OO'Q^V$ rapportée aux axes $O'\alpha$ et $O'\beta$. Les coordonnées de O par rapport à ces axes sont $(-\pi a, -2a)$. Transformons les équations (D) en tenant compte de la nouvelle position des axes OX et OY. Nous avons

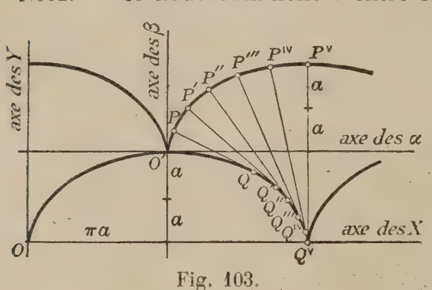


Fig. 103.

$$\alpha = x - \pi a,$$
$$\beta = y - 2a,$$
$$t = t' - \pi.$$

En substituant dans (D) et en réduisant, les équations de la développée deviennent

(E) $$\begin{cases} x = a(t' - \sin t'), \\ y = a(1 - \cos t'). \end{cases}$$

Puisque (E) et (C) sont identiques comme forme, nous pouvons dire que :

La développée d'une cycloïde est elle-même une cycloïde dont le cercle générateur est égal à celui de la cycloïde donnée.

120. Propriétés de la développée. — D'après (A), p. 207,

(A) $$\alpha = x - R\sin\tau, \qquad \beta = y + R\cos\tau.$$

Choisissons comme variable indépendante la longueur s d'un arc de la courbe donnée ; alors x, y, R, τ, α, β sont des fonctions de s. La différentiation de (A) par rapport à s donne

(B) $$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dx}{ds} - R\cos\tau\frac{d\tau}{ds} - \sin\tau\frac{dR}{ds},$$

(C) $$\frac{d\beta}{ds} = \frac{dy}{ds} - R\sin\tau\frac{d\tau}{ds} + \cos\tau\frac{dR}{ds}.$$

Mais $\frac{dx}{ds} = \cos\tau$, $\frac{dy}{ds} = \sin\tau$, d'après (**26**), p. 152 ; et $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$, d'après (**38**) et (**39**), p. 177.

En substituant dans (B) et (C), nous obtenons

$$\text{(D)} \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \cos\tau - R\cos\tau\cdot\frac{1}{R} - \sin\tau\frac{dR}{ds} = -\sin\tau\frac{dR}{ds},$$

$$\text{(E)} \qquad \frac{d\beta}{ds} = \sin\tau - R\sin\tau\cdot\frac{1}{R} + \cos\tau\frac{dR}{ds} = \cos\tau\frac{dR}{ds}.$$

La division de (E) par (D) donne

$$\text{(F)} \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\operatorname{cotg}\tau = -\frac{1}{\operatorname{tg}\tau} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Mais $\frac{d\beta}{d\alpha} = \operatorname{tg}\tau' =$ pente de la tangente à la développée en C, et $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\tau =$ pente de la tangente à la courbe donnée au point correspondant P (x, y).

En substituant les deux derniers résultats dans (F), nous obtenons

$$\operatorname{tg}\tau' = -\frac{1}{\operatorname{tg}\tau}.$$

Puisque la pente d'une des tangentes est l'inverse négative de la pente de l'autre, elles sont perpendiculaires. Mais une perpendiculaire à la tangente en P est une normale à la courbe. Par suite :

Une normale à la courbe donnée est tangente à sa développée.

D'autre part, élevons au carré les équations (D) et (E) et additionnons, nous obtenons

$$\text{(G)} \qquad \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

Mais si $s' =$ longueur d'arc de la développée, le membre de gauche de (G) est précisément le carré de $\frac{ds'}{ds}$ [d'après (**34**), p. 160, où $t = s$, $s = s'$, $x = \alpha$, $y = \beta$]. Par suite la relation (D) montre que

$$\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2, \qquad \text{ou} \qquad \frac{ds'}{ds} = \pm\frac{dR}{ds},$$

c'est-à-dire que *le rayon de courbure de la courbe donnée croît ou décroît comme l'arc de la développée croît.*

Dans la figure 99, ce résultat signifie que

$$P_1C_1 - PC = \text{arc } CC_1.$$

La longueur d'un arc de la développée est égale à la différence entre les rayons de courbure de la courbe donnée qui sont tangents à cet arc à ses extrémités.

Ainsi, dans l'exemple 4, p. 214, nous observons que si nous replions $Q^vP^v = 4a$ vers la gauche sur la développée, le point P^v vient en O' et nous avons

La longueur d'un arc de cycloïde (tel que $OO'Q^v$*) est égale à huit fois la longueur du rayon du cercle générateur.*

121. Les développantes et leur construction mécanique. — Soit une règle flexible courbée suivant la forme de la courbe C_1C_9, développée de la courbe P_1P_9 (*fig.* 104) et supposons un fil de longueur R_9 dont une extrémité est fixée en C_9, s'enroulant autour de la règle (ou de la courbe). Il est clair, d'après les résultats du dernier paragraphe, que quand le fil se déroule étant tenu raide, l'extrémité libre décrit la courbe P_1P_9, d'où le nom de *développée*.

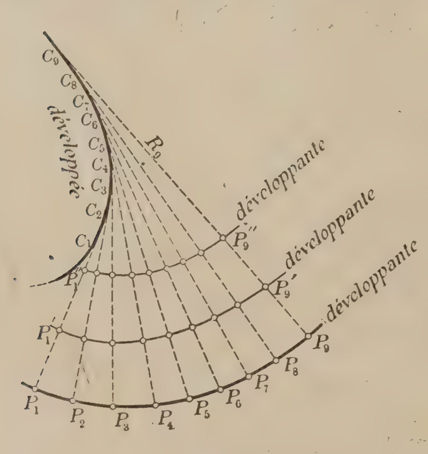


Fig. 104.

On dit que la courbe P_1P_9 est la *développante* de C_1C_9. Il est clair qu'un point quelconque du fil décrira une développante; de sorte qu'une courbe donnée a un nombre infini de développantes, mais une seule développée.

Les développantes P_1P_9, $P_1'P_9'$, $P_1''P_9''$ sont appelées *courbes parallèles* parce que la distance entre deux quelconques d'entre elles mesurée sur leurs normales communes est constante.

Le lecteur devra observer comment la parabole et l'ellipse, pages 211, 212, peuvent être construites de cette façon, en partant de leurs développées.

EXEMPLES

Trouver les coordonnées du centre de courbure et l'équation de la développée de chacune des courbes ci-après. Tracer la courbe et sa développée et tracer au moins un cercle de courbure.

1. L'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Réponse : $\alpha = \frac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}$, $\beta = -\frac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}$;

développée $(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$.

2. L'hypocycloïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Réponse ; $\alpha = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, $\beta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$;

développée $(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}} + (\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$.

3. Trouver les coordonnées du centre de courbure de la parabole cubique $y^3 = a^2x$.

Réponse : $\alpha = \frac{a^4 + 15y^4}{6a^2y}$, $\beta = \frac{a^4y - 9y^5}{2a^4}$.

4. Montrer que dans la parabole $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, nous avons la relation $\alpha + \beta = 3(x+y)$.

5. Étant donné l'équation de l'hyperbole équilatère $2xy = a^2$, montrer que

$$\alpha + \beta = \frac{(x+y)^3}{a^2}, \quad \alpha - \beta = \frac{(y-x)^3}{a^2}.$$

De ce résultat déduire l'équation de la développée $(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}} - (\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$.

Trouver les équations paramétriques des développées des courbes ci-après en fonction du paramètre t. Tracer la courbe et sa développée et tracer au moins un cercle de courbure.

6. L'hypocycloïde $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ *Rép.* $\begin{cases} \alpha = a\cos^3 t + 3a\cos t\sin^2 t, \\ \beta = 3a\cos^2 t\sin t + a\sin^3 t. \end{cases}$

7. La courbe $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = \frac{3}{2}(1 + 2t^2 - t^4), \\ \beta = -4t^3. \end{cases}$

8. La courbe $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = a\cos t, \\ \beta = a\sin t. \end{cases}$

9. La courbe $\begin{cases} x = 3t, \\ y = t^2 - 6. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -\frac{4}{3}t^3, \\ \beta = 3t^2 - \frac{3}{2}. \end{cases}$

10. La courbe $\begin{cases} x = 6 - t^2, \\ y = 2t. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 4 - 3t^2, \\ \beta = -2t^3. \end{cases}$

11. La courbe $\begin{cases} x = 2t. \\ y = t^2 - 2. \end{cases}$ *Rép.* $\begin{cases} \alpha = -2t^3, \\ \beta = 3t^2. \end{cases}$

12. La courbe $\begin{cases} x = 4t, \\ y = 3 + t^2. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -t^3, \\ \beta = 11 + 3t^2. \end{cases}$

13. La courbe $\begin{cases} x = 9 - t^2, \\ y = 2t. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 7 - 3t^2. \\ \beta = -2t^3, \end{cases}$

14. La courbe $\begin{cases} x = 2t, \\ y = \dfrac{1}{3} t^3. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = \dfrac{4t - t^5}{4}, \\ \beta = \dfrac{12 + 5t^4}{6t}. \end{cases}$

15. La courbe $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = \dfrac{4t^3 + 12t}{3}, \\ \beta = -\dfrac{2t^2 + t^4}{2}. \end{cases}$

16. La courbe $\begin{cases} x = 2t, \\ y = \dfrac{3}{t}. \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = \dfrac{12t^4 + 9}{4t^3}, \\ \beta = \dfrac{27 + 4t^4}{6t}. \end{cases}$

17. $x = 4 - t^2,\ y = 2t.$

18. $x = 2t,\ y = 16 - t^2.$

19. $x = t,\ y = \sin t.$

20. $x = \dfrac{4}{t},\ y = 3t.$

21. $x = t^2,\ y = \frac{1}{6} t^3.$

22. $x = t,\ y = t^3.$

23. $x = \sin t,\ y = 3 \cos t.$

24. $x = 1 - \cos t,\ y = t - \sin t.$

25. $x = \cos^4 t,\ y = \sin^4 t.$

26. $x = a \sec t,\ y = b \operatorname{tg} t.$

CHAPITRE XV

DIFFÉRENTIATION PARTIELLE

122. Fonctions continues de deux ou plusieurs variables indépendantes. — On dit qu'une fonction $f(x, y)$ de deux variables indépendantes est continue pour les valeurs (a, b) de (x, y) quand

$$\underset{\substack{x=a\\ y=b}}{\text{limite}}\, f(x, y) = f(a, b).$$

quelle que soit la façon dont x et y tendent vers leurs limites respectives a et b. Cette définition est quelquefois résumée brièvement comme il suit : *un très petit changement dans une des variables indépendantes, ou dans toutes les deux à la fois, produit un très petit changement dans la valeur de la fonction* (*).

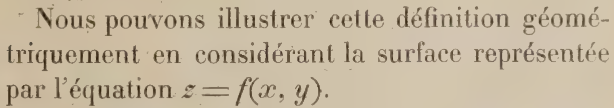


Fig. 105.

Nous pouvons illustrer cette définition géométriquement en considérant la surface représentée par l'équation $z = f(x, y)$.

Considérons un point fixe P de cette surface pour lequel $x = a$ et $y = b$ (*fig.* 105).

Désignons par Δx et Δy les accroissements des variables indépendantes x et y et par Δz l'accroissement correspondant de la variable dépendante z, les coordonnées de P′ étant

$$(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z).$$

En P la valeur de la fonction est

$$z = f(a, b) = \text{MP}.$$

Si la fonction est continue en P, de quelque façon que Δx et Δy tendent vers zéro, Δz tendra également vers zéro, c'est-à-dire que M′P′ tendra à coïncider avec MP, le point P′ tendant à se confondre

(*) Le lecteur comprendra mieux cette définition en relisant le § 18, p. 15, sur les fonctions continues d'une seule variable.

avec le point P de la surface, quelle que soit la direction dans laquelle P′ tende vers P.

On définit d'une façon analogue une fonction continue de plus de deux variables indépendantes.

Dans ce qui suit, nous considérerons seulement les valeurs des variables indépendantes pour lesquelles une fonction est continue.

123. Dérivées partielles. — Puisque les variables x et y sont indépendantes dans

$$z = f(x, y),$$

on peut supposer que x varie tandis que y reste constante, ou inversement.

La dérivée de z par rapport à x quand x varie et que y reste constante (*) est appelée la *dérivée partielle de z par rapport à x* et on la désigne par le symbole $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Nous pouvons donc écrire

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right].$$

De même, quand x reste constante (*) et que y varie, la *dérivée partielle de z par rapport à y* est

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y = 0} \left[\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \right].$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ s'écrit également } \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x}.$$

De même,

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ s'écrit également } \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Afin d'éviter la confusion, le ∂ rond (**) a été généralement adopté pour indiquer la différentiation partielle. Les autres notations qu'on utilise sont

$$\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right); \quad f'_x(x, y), \quad f'_y(x, y); \quad f_x(x, y), \quad f_y(x, y);$$
$$D_x f, \quad D_y f; \quad Z_x, \quad Z_y.$$

(*) Les valeurs constantes sont substituées dans la fonction avant de différentier.
(**) Introduit par Jacobi (1804-1851).

Notre notation peut être étendue à une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Ainsi, si

$$u = F(x, y, z).$$

nous avons les trois dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Exemple I. — Trouver les dérivées partielles de $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Solution. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + 2by$, en traitant y comme une constante,

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2bx + 2cy$, en traitant x comme une constante.

Exemple II. — Trouver les dérivées partielles de $u = \sin(ax + by + cz)$.

Solution.

$\frac{\partial u}{\partial x} = a \cos(ax + by + cz)$, en traitant y et z comme des constantes,

$\frac{\partial u}{\partial y} = b \cos(ax + by + cz)$, en traitant x et z comme des constantes.

$\frac{\partial u}{\partial z} = c \cos(ax + by + cz)$, en traitant x et y comme des constantes.

En nous reportant à la fonction

$$z = f(x, y)$$

nous avons, d'après (A), p. 220, défini $\frac{\partial z}{\partial x}$ comme étant la limite du rapport de l'accroissement de la fonction (y étant constant) à l'accroissement de x, quand l'accroissement de x tend vers zéro.

De même, (B), p. 220, définit $\frac{\partial z}{\partial y}$. Il est d'ailleurs évident que si nous considérons ces dérivées partielles du point de vue du § 94, p. 160, $\frac{\partial z}{\partial x}$ peut être considéré comme le rapport des coefficients différentiels de z et de x par rapport au temps, quand y est constant, et $\frac{\partial z}{\partial y}$ comme le rapport des coefficients différentiels de z et de y par rapport au temps, quand x est constant.

124. Dérivées partielles interprétées géométriquement. —

Soit $z = f(x, y)$ l'équation de la surface représentée par la figure 106.

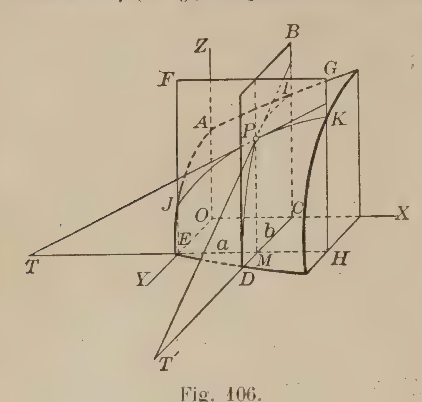


Fig. 106.

Faisons passer un plan EFGH par le point P (pour lequel $x = a$ et $y = b$) de la surface, parallèlement au plan XOZ.

Puisque l'équation de ce plan est

$$y = b,$$

l'équation de la section JPK faite dans la surface est

$$z = f(x, b),$$

si nous considérons EF comme l'axe des z et EH comme l'axe des x. Dans ce plan, $\frac{\partial z}{\partial x}$ a la même signification que $\frac{dz}{dx}$ et nous avons

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} \text{MTP}$$

$$= \textit{pente de la section } \text{JK} \textit{ au point } \text{P}.$$

De même, si nous faisons passer le plan BCD par le point P parallèlement au plan YOZ, son équation est

$$x = a$$

et pour la section DPI, $\frac{\partial z}{\partial y}$ a la même signification que $\frac{dz}{dy}$. Par suite,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dy} = -\operatorname{tg} \text{MT'P} = \textit{pente de la section } \text{DI} \textit{ au point } \text{P}.$$

Exemple. — Étant donné l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} = 1,$$

trouver la pente de la section de l'ellipsoïde faite (*a*) par le plan $y = 1$ au point où $x = 4$ et où z est positif ; (*b*) par le plan $x = 2$ au point où $y = 3$ et où z est positif.

Solution. En considérant y comme une constante, nous avons

$$\frac{2x}{24} + \frac{2z}{6} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{4z}.$$

Quand x est constant, il vient

$$\frac{2y}{12} + \frac{2z}{6} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{2z}.$$

(a) Quand $y=1$ et $x=4$,

$$z=\sqrt{\frac{3}{2}},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\sqrt{\frac{2}{3}}.\quad \textit{Réponse.}$$

(b) Quand $x=2$ et $y=3$,

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3}{2}\sqrt{2}.\quad \textit{Réponse.}$$

EXEMPLES

1. $u=x^3+3x^2y-y^3.$ *Rép.* $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy$; $\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2.$

2. $u=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F.$ $\frac{\partial u}{\partial x}=2Ax+By+D$; $\frac{\partial u}{\partial y}=Bx+2Cy+E.$

3. $u=(ax^2+by^2+cz^2)^n.$ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2anxu}{ax^2+by^2+cz^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2bnyu}{ax^2+by^2+cz^2}.$

4. $u=\arcsin\frac{x}{y}.$ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}.$

5. $u=x^y.$ $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\log x.$

6. $u=ax^3y^2z+bxy^3z^4+cy^6+dxz^3.$ $\frac{\partial u}{\partial x}=3ax^2y^2z+by^3z^4+dz^3$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2ax^3yz+3bxy^2z^4+6cy^5$; $\frac{\partial u}{\partial z}=ax^3y^2+4bxy^3z^3+3dxz^2.$

7. $u=x^3y^2-2xy^4+3x^2y^3$; montrer que $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=5u.$

8. $u=\frac{xy}{x+y}$; montrer que $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u.$

9. $u=(y-z)(z-x)(x-y)$; montrer que $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$

10. $u=\log(e^x+e^y)$; montrer que $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=1.$

11. $u=\frac{e^{xy}}{e^x+e^y}$; montrer que $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=(x+y-1)u.$

12. $u = x^y y^x$; montrer que $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = (x + y + \log u)u$.

13. $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$; montrer que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}$.

14. $u = e^x \sin y + e^y \sin x$; montrer que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{2x} + e^{2y} + 2e^{x+y}\sin(x + y).$$

15. $u = \log(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)$; montrer que

$$\sin 2x\frac{\partial u}{\partial x} + \sin 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \sin 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 2.$$

16. Soit y la hauteur d'un cône circulaire droit et x le rayon de sa base. Montrer : (a) que si la base reste constante, le volume varie $\frac{1}{3}\pi x^2$ fois plus vite que la hauteur ; (b) que si la hauteur reste constante, le volume varie $\frac{2}{3}\pi xy$ fois plus vite que le rayon de la base.

17. Un point se meut sur le paraboloïde elliptique $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ et aussi dans un plan parallèle au plan XOZ. Quand $x = 3$ mètres et croît à raison de 9 mètres par seconde, trouver : (a) le coefficient différentiel de z par rapport au temps ; (b) la vitesse du point ; (c) la direction de son mouvement.

Rép. (a) $v_z = 6$ mètres par seconde ;
(b) $v = 3\sqrt{13}$ mètres par seconde ;
(c) $\tau = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{3}$, angle fait avec le plan XOY.

18. Si, sur la surface de l'exercice 17, le point se meut dans un plan parallèle au plan YOZ, trouver, quand $y = 2$ mètres et croît à raison de 5 mètres par seconde, (a) le coefficient différentiel de z par rapport au temps ; (b) la vitesse du point ; (c) la direction de son mouvement.

Rép. (a) 5 mètres par seconde ;
(b) $5\sqrt{2}$ mètres par seconde ;
(c) $\tau = \frac{\pi}{4}$, angle fait avec le plan XOY.

125. Dérivées totales. — Nous avons déjà considéré la différentiation d'une fonction de fonction d'une seule variable indépendante. Ainsi, si

$$y = f(v) \quad \text{et} \quad v = \varphi(x),$$

nous avons montré que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Nous considérerons maintenant une fonction de deux variables,

dépendant toutes les deux d'une seule variable indépendante. Soit la fonction

$$u = f(x, y)$$

où x et y sont fonctions d'une troisième variable t.

Donnons à t un accroissement Δt, et soient Δx, Δy, Δu les accroissements correspondants de x, y, u. Alors la quantité

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

est appelée l'*accroissement total de u*.

En ajoutant et en retranchant $f(x, y + \Delta y)$ dans le second membre, il vient

(A) $$\Delta u = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

En appliquant le théorème de la moyenne (**46**), p. 190, à chacune des deux différences du second membre de (A), nous obtenons pour la première différence,

(B) $$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = f'_x(x + \theta_1 \cdot \Delta x, y + \Delta y)\Delta x.$$

[$a = x$, $\Delta a = \Delta x$ et puisque x varie pendant que $y + \Delta y$ reste constant, nous obtenons la dérivée partielle par rapport à x.]

Pour la seconde différence, nous obtenons

(C) $$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y + \theta_2 \cdot \Delta y)\Delta y.$$

[$a = y$, $\Delta a = \Delta y$ et puisque y varie pendant que x reste constant, nous obtenons la dérivée partielle par rapport à y.]

La substitution de (B) et de (C) dans (A) donne

(D) $$\Delta u = f'_x(x + \theta_1 \cdot \Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, y + \theta_2 \cdot \Delta y)\Delta y,$$

où θ_1 et θ_2 sont des fractions positives proprement dites.

En divisant (D) par Δt, il vient

(E) $$\frac{\Delta u}{\Delta t} = f'_x(x + \theta_1 \cdot \Delta x, y + \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y + \theta_2 \cdot \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Maintenant, faisons tendre Δt vers zéro, nous obtenons

(F) $$\frac{du}{dt} = f'_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f'_y(x, y)\frac{dy}{dt}.$$

[Puisque Δx et Δy tendent vers zéro en même temps que Δt, nous obtenons $\lim_{\Delta t = 0} f'_x(x + \theta_1 \cdot \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y)$ et $\lim_{\Delta t = 0} f'_y(x, y + \theta_2 \cdot \Delta y) = f'_y(x, y)$, $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ étant supposées continues.]

En remplaçant $f(x, y)$ par u dans (F), nous obtenons la *dérivée totale*

(51) $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

De même, si

$$u = f(x, y, z)$$

et que x, y, z soient des fonctions de t, nous obtenons

(52) $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

et ainsi de suite pour un nombre quelconque de variables (*).

Dans (51) nous pouvons supposer $t = x$; alors y est une fonction de x, et u est en réalité une fonction de la seule variable x, ce qui donne

(53) $$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Nous avons de même, d'après (52),

(54) $$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Le lecteur devra observer que $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{du}{dx}$ ont des significations tout à fait différentes. La dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ est formée en partant de l'hypothèse que la *variable particulière x varie seule,* tandis que dans

$$\frac{du}{dx} = \underset{\Delta x = 0}{\text{limite}} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

Δu est l'*accroissement total de u* résultant des accroissements de *toutes les variables,* ces accroissements étant dus à l'accroissement Δx de la variable indépendante. Pour les distinguer des dérivées

(*) En réalité, ceci n'est qu'un cas particulier d'un théorème général qui peut être énoncé comme il suit :

Si u est une fonction des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$, chacune de celles-ci étant à leur tour une fonction des variables indépendantes $r, s, t, \ldots$, alors (avec certaines hypothèses quant à la continuité)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} + \cdots;$$

on obtient des expressions semblables pour $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, etc.

partielles, $\frac{du}{dt}$, $\frac{du}{dx}$ sont appelées respectivement *dérivées totales* par rapport à t et par rapport à x (*).

EXEMPLE I. — Étant donnés $u = \sin\frac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = t^2$, trouver $\frac{du}{dt}$.

Solution. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}\cos\cdot\frac{x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$, $\frac{dx}{dt} = e^t$, $\frac{dy}{dt} = 2t$.

En substituant dans (51), il vient

$$\frac{du}{dt} = (t-2)\frac{e^t}{t^3}\cos\frac{e^t}{t^2}. \quad \textit{Réponse.}$$

EXEMPLE II. — Étant donnés $u = e^{ax}(y - z)$, $y = a\sin x$, $z = \cos x$; trouver $\frac{du}{dx}$.

Solution. $\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax}(y-z)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{ax}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -e^{ax}$, $\frac{dy}{dx} = a\cos x$, $\frac{dz}{dx} = -\sin x$.

En substituant dans (54), il vient

$$\frac{du}{dx} = ae^{ax}(y-z) + ae^{ax}\cos x + e^{ax}\sin x = e^{ax}(a^2+1)\sin x. \quad \textit{Réponse.}$$

NOTE. — Dans les exemples semblables à ceux qui précèdent, u pourrait, par substitution, être trouvée explicitement en fonction de la variable indépendante et ensuite différentiée directement, mais, en général, ce procédé serait plus long, et dans beaucoup de cas il ne pourrait pas être employé du tout.

Les formules (51) et (52) sont très utiles dans toutes les applications se rapportant aux changements de valeur des fonctions de deux ou de plusieurs variables par rapport au temps. Le procédé est pratiquement le même que celui qui a été exposé dans la règle donnée p. 160, excepté que, au lieu de différentier par rapport à t (troisième opération), nous cherchons les dérivées partielles et nous substituons dans (51) ou (52). Eclairons ce qui précède par un exemple.

EXEMPLE III. — La hauteur d'un cône circulaire est de 100 mètres et décroît à raison de 10 mètres par seconde; le rayon de la base a 50 mètres et croît à raison de 5 mètres par seconde. A quelle vitesse le volume change-t-il?

(*) On doit observer que $\frac{\partial u}{\partial x}$ a une valeur parfaitement définie pour un point quelconque (x, y), tandis que $\frac{du}{dx}$ dépend non seulement du point (x, y), mais encore de la direction particulière choisie pour atteindre ce point. Par suite,

$\frac{\partial u}{\partial x}$ est appelée fonction relative à un point;

tandis que

$\frac{du}{dx}$ ne porte ce nom que si l'on peut atteindre le point (x, y) en suivant une direction particulière.

Solution. Soit x le rayon de base, y la hauteur;

alors, $$u = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \text{volume}.$$

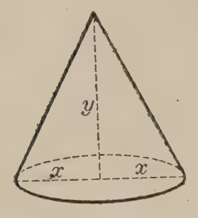


Fig. 107.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3}\pi xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3}\pi x^2.$$

Substituons dans (51),

$$\frac{du}{dt} = \frac{2}{3}\pi xy\frac{dx}{dt} + \frac{1}{3}\pi x^2\frac{dy}{dt}.$$

Mais $$x = 50, \quad y = 100, \quad \frac{dx}{dt} = 5, \quad \frac{dy}{dt} = -10.$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{2}{3}\pi \cdot 5000 \cdot 5 - \frac{1}{3}\pi \cdot 2500 \cdot 10$$

$= 27 \cdot 012{,}500$ mètres cubes d'accroissement par seconde. *Rép.*

126. Différentielles totales. — En multipliant (51) et (52) par dt, nous obtenons

(55) $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

(56) $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz;$$

et ainsi de suite (*).

Les équations (55) et (56) définissent la quantité du, qui est appelée *différentielle totale de u*, ou *différentielle complète*, et $\frac{\partial u}{\partial x}dx, \frac{\partial u}{\partial y}dy, \frac{\partial u}{\partial z}dz$ qui sont appelées *différentielles partielles*. Ces différentielles partielles sont quelquefois désignées par $d_x u$, $d_y u$, $d_z u$, de sorte que (56) s'écrit également

$$du = d_x u + d_y u + d_z u.$$

Exemple I. — Étant donné $u = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$, trouver du.

Solution. $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

En substituant dans (55), il vient

$$du = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}. \qquad \textit{Réponse.}$$

Exemple II. — La base et la hauteur d'un rectangle ont respectivement 5 et

(*) Une interprétation géométrique de ce résultat sera donnée p. 306.

4 mètres. A un certain moment, elles croissent d'une façon continue à raison de 2 mètres et de 1 mètre respectivement. A quelle vitesse la surface du rectangle croît-elle à cet instant ?

Solution. Soit $x =$ base, $y =$ hauteur ;

alors $u = xy =$ surface,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x.$$

En substituant dans (51), il vient

(A) $$\frac{du}{dt} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}.$$

Mais $x = 5$ mètres, $y = 4$ mètres,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ mètres par seconde}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 \text{ mètre par seconde}.$$

$$\frac{du}{dt} = (8 + 5)^{\text{m}^2} \text{ par seconde} = 13^{\text{m}^2} \text{ par seconde}.$$ *Réponse.*

NOTE. — En considérant du comme un accroissement infinitésimal de l'aire dû aux accroissements infinitésimaux dx et dy, du est évidemment la somme de deux petits rectangles ajoutés sur les deux côtés, car, dans $du = ydx + xdy$ [en multipliant (A) par dt],

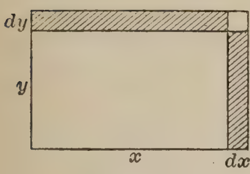


Fig. 108.

$ydx =$ aire du rectangle vertical,

et $xdy =$ aire du rectangle horizontal.

Mais, l'accroissement total Δu produit par les accroissements dx et dy est évidemment

$$\Delta u = ydx + xdy + dxdy.$$

Par suite, le petit rectangle de l'angle supérieur à droite ($dxdy$) est égal à la différence entre Δu et du. La figure 108 montre que l'accroissement total et la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables ne sont pas égaux, en général.

127. Différentiation des fonctions implicites. — L'équation

(A) $$f(x, y) = 0$$

définit l'une des variables soit x, soit y, comme fonction implicite de l'autre (*).

Elle représente une équation quelconque contenant x et y quand tous ses termes ont été transposés dans le premier membre. Soit

(B) $$u = f(x, y);$$

alors $$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$ (53), p. 226.

(*) Nous supposons qu'un petit changement dans la valeur de x détermine seulement un petit changement dans la valeur de y.

Mais d'après (A), $f(x, y) = 0$.

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

En résolvant par rapport à $\frac{dy}{dx}$ (*), nous obtenons la formule ci-après

$$\text{(57)} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0,$$

qui sert pour différentier les fonctions implicites. Cette formule sous la forme (C) est équivalente à la méthode employée au § 63, p. 77, pour différentier les fonctions implicites, et tous les exemples de la p. 78 peuvent être résolus en utilisant la formule (**57**). Puisque

$$\text{(D)} \qquad f(x, y) = 0$$

pour toutes les valeurs admissibles de x et de y, nous pouvons dire que (**57**) donne *la relation entre les coefficients différentiels de x et de y par rapport au temps, pour lesquels $f(x, y)$ ne subit aucun changement.*

Géométriquement ce résultat signifie que le point (x, y) doit se déplacer sur la courbe dont l'équation est (D), et (**57**) détermine la direction de son mouvement à tout instant. Puisque

$$u = f(x, y),$$

nous pouvons écrire (**57**) sous la forme

$$\text{(57 a)} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

EXEMPLE I. — Étant donné $x^2y^4 + \sin y = 0$, trouver $\frac{dy}{dx}$.

(*) On suppose que $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ existent.

Solution. Soit $f(x, y) = x^2y^4 + \sin y.$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y^3 + \cos y;$$

d'après (57 *a*), $$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^4}{4x^2y^3 + \cos y}.$$ *Réponse.*

Exemple II. — Si x croît à raison de 2 centimètres par seconde en passant par la valeur $x = 3$ centimètres, à quelle vitesse y doit-il varier quand $y = 1$ centimètre pour que la fonction $2xy^2 - 3x^2y$ reste constante ?

Solution. Soit $f(x, y) = 2xy^2 - 3x^2y$;

alors $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 - 6xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy - 3x^2.$$

En substituant dans (57 *a*), il vient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y^2 - 6xy}{4xy - 3x^2},$$

ou $$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{2y^2 - 6xy}{4xy - 3x^2}.$$ D'après (33), p. 160.

Mais $x = 3$, $y = 1$, $\frac{dx}{dt} = 2$; $\frac{dy}{dt} = -2\frac{2}{15}$ centimètres par seconde. *Réponse.*

Soit P un point (x, y, z) de la surface donnée par l'équation

(E) $$u = F(x, y, z) = 0$$

et soient PC et AP des sections faites par des plans passant par P parallèlement aux plans YOZ et XOZ (*fig.* 109). Le long de la courbe AP, y est constant. Par conséquent, d'après (E), z est une fonction implicite de x seul, et nous avons, d'après (**57** *a*),

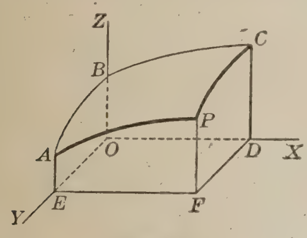


Fig. 109.

(58) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

relation qui donne la pente au point P de la courbe AP, § 124, p. 222. On emploie $\frac{\partial z}{\partial x}$ au lieu de $\frac{dz}{dx}$ dans le premier membre, parce que, d'après (E), z était primitivement une fonction implicite de x et de y; mais la formule (**58**) est déduite dans l'hypothèse que y reste constant.

De même, la pente au point P de la courbe PC est

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{59}$$

EXEMPLES

Trouver les dérivées totales dans les six exemples ci-après, en utilisant les formules (51), (52) ou (53) :

1. $u = z^2 + y^3 + zy,\ z = \sin x,\ y = e^x$.
   Rép. $\frac{du}{dx} = 3e^{3x} + e^x(\sin x + \cos x) + \sin 2x$.

2. $u = \text{arc tg}\,(xy),\ y = e^x$. *Rép.* $\frac{du}{dx} = \frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$.

3. $u = \log(a^2 - \rho^2),\ \rho = a\sin\theta$. $\frac{du}{d\theta} = -2\,\text{tg}\,\theta$.

4. $u = v^2 + vy,\ v = \log s,\ y = e^s$. $\frac{du}{ds} = \frac{2v+y}{s} + ve^s$.

5. $u = \text{arc sin}\,(r - s),\ r = 3t,\ s = 4t^3$. $\frac{du}{dt} = \frac{3}{\sqrt{1-t^2}}$.

6. $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1},\ y = a\sin x,\ z = \cos x$. $\frac{du}{dx} = e^{ax}\sin x$.

Trouver les différentielles totales dans les huit exemples suivants, en utilisant les formules (55) ou (56).

7. $u = by^2x + cx^2 + gy^3 + ex$. *Rép.* $du = (by^2 + 2cx + e)dx + (2byx + 3gy^2)dy$.

8. $u = \log x^y$. $du = \frac{y}{x}dx + \log x dy$.

9. $u = y^{\sin x}$. $du = y^{\sin x}\log y \cos x dx + \frac{\sin x}{y^{\text{covers}\,x}}dy$.

10. $u = x^{\log y}$. $du = u\left(\frac{\log y}{x}dx + \frac{\log x}{y}dy\right)$.

11. $u = \frac{s+t}{s-t}$. $du = \frac{2(sdt - tds)}{(s-t)^2}$.

12. $u = \sin(pq)$. $du = \cos(pq)[qdp + pdq]$.

13. $u = x^{yz}$. $du = x^{yz-1}(yzdx + zx\log xdy + xy\log xdz)$.

14. $u = \text{tg}^2\varphi\,\text{tg}^2\theta\,\text{tg}^2\psi$. $du = 4u\left(\frac{d\varphi}{\sin 2\varphi} + \frac{d\theta}{\sin 2\theta} + \frac{d\psi}{\sin 2\psi}\right)$.

15. En supposant que l'équation caractéristique d'un gaz parfait soit

$$vp = Rt,$$

où v = volume, p = pression, t = température absolue et R une constante, quelle est la relation qui existe entre les différentielles dv, dp, dt?

Réponse : $vdp + pdv = \text{R}dt$.

16. En utilisant le résultat du dernier exemple pour l'appliquer à l'air, supposons que dans un cas donné nous ayons trouvé par une expérience effective que

$$t = 300^\circ \text{ C}, \qquad p = 1\,000^{\text{kg}} \text{ par mètre carré}, \qquad v = 14{,}4 \text{ mètres cubes.}$$

Trouver le changement de p, en supposant qu'il soit uniforme, quand t passe à 301° C et v à 14,5 mètres cubes. R = 96. *Réponse:* — $3^{\text{kg}},25$ par mètre carré.

17. Un côté d'un triangle a $2^{\text{m}},40$ de long et croît de 10 centimètres par seconde ; un autre côté a $1^{\text{m}},50$ et décroît de 5 centimètres par seconde. L'angle qu'ils forment est de 60° et croît de 2° par seconde. A quelle vitesse la surface du triangle varie-t-elle ?

Réponse : La surface du triangle croît de 443 centimètres carrés par seconde.

18. A quelle vitesse croît le côté opposé à l'angle donné dans l'exemple précédent. *Réponse :* $12^{\text{cm}},32$ par seconde.

19. Un côté d'un rectangle a 25 centimètres et croît de 5^{cm} par seconde. L'autre côté a $37^{\text{cm}},5$ et décroît de $2^{\text{cm}},5$ par seconde. Comment la surface varie-t-elle au bout de 2 secondes ?

Réponse : La surface croît de $74^{\text{cm}^2},82$ par seconde.

20. Les trois arêtes d'un parallélépipède rectangle ont $7^{\text{cm}},5$, 10^{cm} et $12^{\text{cm}},5$ et croissent chacune à raison de $0^{\text{cm}},05$ par minute. A quelle vitesse le volume varie-t-il ?

21. Un enfant fait envoler un cerf-volant. Si ce dernier se déplace horizontalement à raison de $0^{\text{m}},60$ par seconde et s'élève à raison de $1^{\text{m}},50$ par seconde, à quelle vitesse se déroule la corde ? *Réponse :* $1^{\text{m}},61$ par seconde.

22. Un homme se tenant sur un dock tire le câble d'un bateau à raison de $0^{\text{m}},60$ par seconde. Ses mains sont à $1^{\text{m}},80$ au-dessus de l'avant du navire. A quelle vitesse le bateau se déplace-t-il quand il est à $2^{\text{m}},40$ du dock ?

Réponse : $0^{\text{m}},75$ par seconde.

23. Le volume et le rayon d'une chaudière cylindrique croissent respectivement à raison de 27 décimètres cubes et de 0,003 décimètre par minute. A quelle vitesse varie la longueur de la chaudière quand elle contient $1^{\text{m}^3},18$ et que son rayon est de $0^{\text{m}},60$? *Réponse :* 0,234 décimètre par minute.

24. De l'eau s'écoule par l'ouverture inférieure d'un filtre conique en verre de 20^{cm} de hauteur et de 15^{cm} de section au sommet, à raison de 0,0125 centimètre cube par heure. A quelle vitesse la surface de l'eau décroît-elle quand la profondeur de l'eau est de 10^{cm} ?

25. Un réservoir à eau couvert est fait d'une feuille de fer en forme de cône renversé de $2^{\text{m}},40$ de hauteur surmonté par un cylindre de $1^{\text{m}},50$ de hauteur. Le diamètre est de $1^{\text{m}},80$. Si la chaleur du soleil fait croître le diamètre à raison de 0,0006 mètre par minute, la hauteur du cylindre à raison de 0,0009 par minute et la hauteur du cône à raison de 0,0005 mètre par minute, à quelle vitesse :

(*a*) le volume croît-il ;

(*b*) la surface totale croît-elle ?

Dans les exemples qui suivent, trouver $\frac{dy}{dx}$ en utilisant la formule (57 *a*) :

26. $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0.$ *Rép.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\cdot\frac{2(x^2+y^2)-a^2}{2(x^2+y^2)+a^2}.$

27. $e^y - e^x + xy = 0.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$

28. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y[\cos(xy) - e^{xy} - 2x]}{x[x + e^{xy} - \cos(xy)]}.$

128. Dérivées partielles successives. — Considérons la fonction

$$u = f(x, y);$$

en général, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont des fonctions de x et de y et peuvent être différentiées de nouveau par rapport à l'une ou l'autre variable indépendante, ce qui donne des *dérivées partielles successives*. En regardant x comme variant seul, nous désignons les résultats par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n u}{\partial x^n},$$

ou, quand y varie seul,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n},$$

la notation étant semblable à celle employée pour les fonctions d'une seule variable.

Si nous différentions u par rapport à x, en regardant y comme constant, et ensuite, ce résultat par rapport à y, en regardant x comme constant, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \text{ que nous désignons par } \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

De même, si nous différentions deux fois par rapport à x et ensuite une fois par rapport à y, nous désignerons le résultat par le symbole

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}.$$

129. L'ordre de différentiation est indifférent. — Considérons la fonction $f(x, y)$. En changeant x en $x + \Delta x$ et en laissant y

constant, nous obtenons, d'après le théorème de la moyenne (**46**), p. 190,

(A) $f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = \Delta x \cdot f'_x(x + \theta \cdot \Delta x, y), \quad 0 < \theta < 1.$

[$a = x$, $\Delta a = \Delta x$ et puisque x varie pendant que y demeure constant, nous obtenons la dérivée partielle par rapport à x.]

Si maintenant, nous changeons y en $y + \Delta y$, en laissant x et Δx constants, l'accroissement total du membre de gauche de (A) est

(B) $[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] - [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)].$

L'accroissement total du membre de droite de (A) trouvé par le théorème de la moyenne, (**46**), p. 190, est

(C) $$\begin{aligned} &\Delta x f'_x(x+\theta\cdot\Delta x, y+\Delta y) - \Delta x f'_x(x+\theta\cdot\Delta x, y) \quad 0<\theta_1<1 \\ &= \Delta y \Delta x f''_{yx}(x+\theta_1\cdot\Delta x, y+\theta_2\cdot\Delta y). \quad 0<\theta_2<1 \end{aligned}$$

[$a = y$, $\Delta a = \Delta y$ et puisque y varie pendant que x et Δx restent constants, nous obtenons la dérivée partielle par rapport à y.]

Puisque les accroissements (B) et (C) doivent être égaux, nous avons

(D) $$\begin{aligned} &[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] - [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)] \\ &= \Delta y \Delta x f''_{yx}(x+\theta_1\cdot\Delta x, y+\theta_2\cdot\Delta y). \end{aligned}$$

Si nous prenons les accroissements dans l'ordre inverse, nous obtenons de la même façon

(E) $$\begin{aligned} &[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)] - [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)] \\ &= \Delta x \Delta y f''_{xy}(x+\theta_3\cdot\Delta x, y+\theta_4\cdot\Delta y), \end{aligned}$$

θ_3 et θ_4 étant également compris entre zéro et l'unité.

Les membres de gauche de (D) et (E) étant identiques, nous avons

(F) $f''_{yx}(x+\theta_1\cdot\Delta x, y+\theta_2\cdot\Delta y) = f''_{xy}(x+\theta_3\cdot\Delta x, y+\theta_4\cdot\Delta y).$

En prenant la limite des deux membres quand Δx et Δy tendent vers zéro, nous avons

(G) $$f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y),$$

puisque ces fonctions sont supposées continues. En posant $u = f(x, y)$, (G) peut s'écrire

(**60**) $$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

c'est-à-dire que *les opérations de différentiation par rapport à x et par rapport à y sont commutatives.*

Ce résultat peut facilement être étendu aux dérivées d'ordre supérieur. Par exemple, puisque (60) est vrai,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}.$$

De même pour des fonctions de trois variables ou plus.

Exemple. — Étant donné $u = x^3y - 3x^2y^3$, vérifier que $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Solution.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - 6xy^3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 3x^2 - 18xy^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 9x^2y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3x^2 - 18xy^2;$$

par suite la vérification est faite.

EXEMPLES

1. $u = \cos(x + y)$; vérifier que $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

2. $u = \frac{y^2 + x^2}{y^2 - x^2}$; vérifier que $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

3. $u = y \log(1 + xy)$; vérifier que $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

4. $u = \text{arc tg}\,\frac{r}{s}$; vérifier que $\frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial s} = \frac{\partial^3 u}{\partial s \partial r^2}$.

5. $u = \sin(\theta^2\varphi)$; vérifier que $\frac{\partial^3 u}{\partial \theta \partial \varphi^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^2 \partial \theta}$.

6. $u = 6e^xy^2z + 3e^yx^2z^2 + 2e^zx^3y - xyz$;

montrer que $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = 12(e^xy + e^yz + e^zx)$.

7. $u = e^{xyz}$; montrer que $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)u$.

8. $u = \frac{x^2y^2}{x + y}$; montrer que $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial x}$.

9. $u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$; montrer que $3x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

10. $u = y^2z^2e^{\frac{x}{2}} + z^2x^2e^{\frac{y}{2}} + x^2y^2e^{\frac{z}{2}}$; montrer que $\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2} = e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{y}{2}} + e^{\frac{z}{2}}$.

11. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$; montrer que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

CHAPITRE XVI

ENVELOPPES

130. Famille de courbes. Paramètre variable. — L'équation d'une courbe comprend généralement, outre les variables x et y, certaines constantes dont dépendent les dimensions, la forme et la position de cette courbe particulière. Par exemple, le lieu d'équation

$$(A) \qquad (x-\alpha)^2+y^2=r^2$$

est un cercle dont le centre se trouve sur l'axe des x, à une distance α de l'origine ; sa grandeur dépend du rayon r. Supposons que α prenne une série de valeurs ; nous aurons alors une série correspondante de cercles différant par leurs distances à l'origine, ainsi que le montre la figure 110.

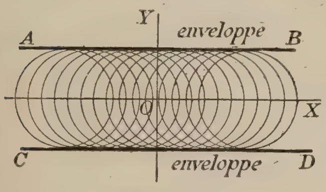


Fig. 110.

Tout système de courbes formé de cette façon est appelé une *famille de courbes*, et la quantité α, qui est constante pour une courbe quelconque, mais change en passant d'une courbe à une autre, est appelée un *paramètre variable*.

Il existe des problèmes qui comprennent deux ou plusieurs paramètres, ainsi que nous le verrons plus tard. On dit que la série de cercles dont il est question ci-dessus est une *famille dépendant d'un seul paramètre*. Pour indiquer que α est un paramètre variable, il est d'usage de l'insérer dans le symbole fonctionnel ; on obtient ainsi

$$f(x, y, \alpha)=0.$$

131. Enveloppe d'une famille de courbes dépendant d'un seul paramètre. — Les courbes d'une famille peuvent être tangentes à la même courbe ou groupe de courbes, comme dans la figure 110. Dans ce cas, on applique le nom d'*enveloppe* à la courbe ou groupe de courbes. Nous allons maintenant exposer une méthode pour trou-

ver l'équation de l'enveloppe d'une famille de courbes. Supposons que la courbe dont les équations paramétriques sont

(A) $$x = \varphi(\alpha), \qquad y = \psi(\alpha)$$

soit tangente à chaque courbe de la famille

(B) $$f(x, y, \alpha) = 0,$$

le paramètre α étant le même dans les deux cas. La pente de (A) en un point quelconque est

(C) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)},$$ (D), p. 90.

et la pente de (B) en un point quelconque est

(D) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y, \alpha)}{f'_y(x, y, \alpha)}.$$ (57 a), p. 230.

Par suite, si les courbes (A) et (B) sont tangentes, les pentes (C) et (D) seront égales (pour la même valeur de α), ce qui donne

$$\frac{\psi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} = -\frac{f'_x(x, y, \alpha)}{f'_y(x, y, \alpha)},$$

ou

(E) $$f'_x(x, y, \alpha)\varphi'(\alpha) + f'_y(x, y, \alpha)\psi'(\alpha) = 0.$$

Par hypothèse (A) et (B) sont tangentes pour toute valeur de α ; par suite, pour toutes les valeurs de α, le point (x, y) donné par (A) doit se trouver sur une courbe de la famille (B). Par conséquent, si nous substituons les valeurs de x et de y tirées de (A) et de (B), le résultat sera vrai pour toutes les valeurs de α, c'est-à-dire que

(F) $$f[\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \alpha] = 0.$$

La dérivée totale de (F) par rapport à α doit donc s'annuler et nous obtenons

(G) $$f'_x(x, y, \alpha)\varphi'(\alpha) + f'_y(x, y, \alpha)\psi'(\alpha) + f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0,$$

relation dans laquelle $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$.

La comparaison de (E) et de (G) donne

(H) $$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

Par conséquent, les équations de l'enveloppe satisfont aux deux équations (B) et (H), savoir :

(I) $$f(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0;$$

c'est-à-dire que les équations paramétriques de l'enveloppe peuvent être trouvées en résolvant les deux équations (I) par rapport à x et à y en fonction du paramètre α.

Directives générales pour trouver l'enveloppe.

1re opération. Différentier par rapport au paramètre variable, en considérant toutes les autres quantités contenues dans l'équation donnée comme constantes.

2e opération. Résoudre l'équation qui en résulte et l'équation donnée de la famille de courbes par rapport à x et à y en fonction du paramètre. Les solutions obtenues seront les équations paramétriques de l'enveloppe.

NOTE. *Dans le cas où l'on cherche l'équation rectangulaire de l'enveloppe, nous pouvons éliminer le paramètre entre les équations paramétriques de l'enveloppe ou bien éliminer le paramètre entre l'équation donnée* (B) *de la famille et la dérivée partielle* (H).

EXEMPLE I. — Trouver l'enveloppe de la famille de lignes droites

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p,$$

α étant le paramètre variable (*fig.* 111).

Solution. (A) $$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

1re opération. En différentiant (A) par rapport à α, il vient

(B) $$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0.$$

2e opération. En multipliant (A) par $\cos \alpha$ et (B) par $\sin \alpha$ et en retranchant, nous obtenons

$$x = p \cos \alpha.$$

De même, en éliminant x entre (A) et (B), nous obtenons

$$y = p \sin \alpha.$$

Les *équations paramétriques de l'enveloppe* sont par conséquent

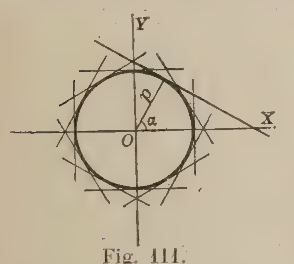


Fig. 111.

(C) $$\begin{cases} x = p \cos \alpha, \\ y = p \sin \alpha, \end{cases}$$

α étant le paramètre. En élevant au carré les équations (C) et en additionnant, nous obtenons

$$x^2 + y^2 = p^2,$$

comme équation rectangulaire de l'enveloppe, laquelle est un cercle.

EXEMPLE II. — Trouver l'enveloppe d'une ligne de longueur constante a, dont les extrémités se déplacent le long de deux axes rectangulaires fixes (*fig.* 112).

Solution. Soit $AB = a$ en longueur et soit

(A) $$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

son équation. Comme AB se déplace toujours en touchant les deux axes, α et p varient tous les deux. Mais p peut être trouvé en fonction de α, car

$$OA = AB \cos \alpha = a \cos \alpha$$

et $p = OA \sin \alpha = a \sin \alpha \cos \alpha$. En substituant dans (A), il vient

(B) $$x \cos \alpha + y \sin \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

relation dans laquelle α est le paramètre variable.

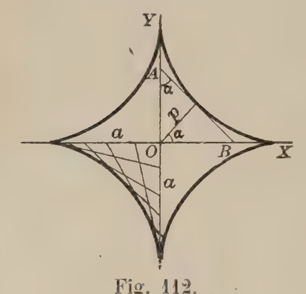


Fig. 112.

Différentions (B) par rapport à α, nous obtenons

(C) $$-x \sin \alpha + y \cos \alpha + a \sin^2\alpha - a \cos^2\alpha = 0.$$

En résolvant (B) et (C) par rapport à x et y en fonction de α, nous obtenons

(D) $$\begin{cases} x = a \sin^3\alpha, \\ y = a \cos^3\alpha. \end{cases}$$

Ce sont les équations paramétriques de l'enveloppe, qui est une hypocycloïde.

L'équation rectangulaire correspondante se trouve en partant des équations (D), et en éliminant α comme il suit :

$$x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \sin^2\alpha,$$

$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos^2\alpha.$$

En additionnant, il vient

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

relation qui est l'équation rectangulaire de l'hypocycloïde.

Exemple III. — Trouver l'équation rectangulaire de l'enveloppe de la ligne droite $y = mx + \frac{p}{m}$, où la pente m (coefficient angulaire) est le paramètre variable (*fig.* 113).

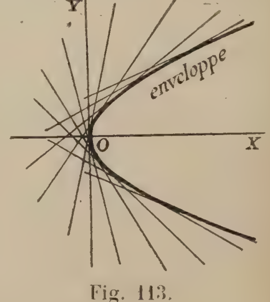


Fig. 113.

Solution. $$y = mx + \frac{p}{m}.$$

1re opération. $$0 = x - \frac{p}{m^2}.$$

En résolvant, il vient

$$m = \pm \sqrt{\frac{p}{x}}.$$

En substituant dans l'équation donnée, on obtient

$$y = \pm \sqrt{\frac{p}{x}} \cdot x \pm \sqrt{\frac{x}{p}} \cdot p = \pm 2\sqrt{px},$$

et, en élevant au carré,

$$y^2 = 4px,$$

telle est l'équation de l'enveloppe (une parabole). La famille de lignes droites obtenue en faisant varier la pente m est représentée par la figure 113. Chaque ligne est tangente à l'enveloppe, car nous savons d'après la géométrie analytique que $y = mx + \frac{p}{m}$ est la tangente à la parabole $y^2 = 4px$, exprimée en fonction de sa pente m (coefficient angulaire).

132. La développée d'une courbe donnée considérée comme l'enveloppe de ses normales. — Puisque les normales à une courbe sont toutes tangentes à la développée, § 118, p. 209, il est évident que *la développée d'une courbe peut également être définie comme étant l'enveloppe de ses normales*, c'est-à-dire comme étant le lieu géométrique des intersections de normales infiniment voisines. Il est également intéressant de noter que si nous trouvons les équations paramétriques de l'enveloppe par la méthode du paragraphe précédent, nous obtenons les coordonnées x et y du centre de courbure; de sorte que nous avons *une seconde méthode pour trouver les coordonnées du centre de courbure*. Si, maintenant, nous éliminons le paramètre variable, nous avons une relation entre x et y qui est l'équation rectangulaire de la développée (enveloppe des normales).

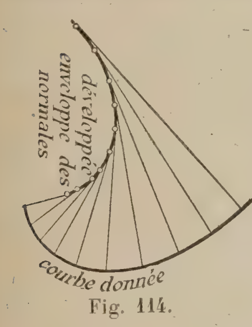


Fig. 114.

Exemple. — Trouver la développée de la parabole $y^2 = 4px$ considérée comme l'enveloppe de ses normales.

Solution. L'équation de la normale en un point quelconque (x', y') est

$$y - y' = -\frac{y'}{2p}(x - x'), \qquad \text{d'après (2), p. 85.}$$

Lorsque nous considérons les normales tout le long de la courbe, x' et y' varient. En éliminant x' au moyen de $y'^2 = 4px'$, nous obtenons l'équation de la normale

$$\text{(A)} \qquad y - y' = \frac{y'^3}{8p^2} - \frac{xy'}{2p}.$$

Considérons y' comme le paramètre variable ; nous voulons trouver l'enveloppe de cette famille de normales.

En différentiant (A) par rapport à y', il vient

$$-1 = \frac{3y'^2}{8p^2} - \frac{x}{2p},$$

et, en résolvant par rapport à x, nous obtenons

(B) $$x = \frac{3y'^2 + 8p^2}{4p}.$$

En substituant cette valeur de x dans (A) et en résolvant par rapport à y, il vient

(C) $$y = -\frac{y'^3}{4p^2}.$$

(B) et (C) sont les coordonnées du centre de courbure de la parabole. Prises ensemble, (B) et (C) sont les équations paramétriques de la développée en fonction du paramètre y'.

L'élimination de y' entre (B) et (C) donne

$$27py^2 = 4(x - 2p)^3,$$

équation rectangulaire de la développée de la parabole. Nous obtenons ainsi le même résultat que dans l'exemple I, p. 241, par la première méthode.

133. Deux paramètres liés par une équation de condition. — Dans un grand nombre de problèmes, il est commode d'employer deux paramètres liés par une équation de condition. Ainsi, l'exemple donné dans le paragraphe précédent contient les deux paramètres x' et y' qui sont liés par l'équation de la courbe. Dans cet exemple, nous avons éliminé x', pour ne conserver que le seul paramètre y'.

Cependant, quand on éprouve des difficultés à effectuer l'élimination, l'équation donnée et l'équation de condition entre les deux paramètres peuvent être différentiées par rapport à l'un des paramètres, chaque paramètre étant considéré comme fonction de l'autre. La méthode sera rendue évidente, en étudiant la solution du problème suivant.

Exemple. — Trouver l'enveloppe de la famille d'ellipses dont les axes coïncident et dont l'aire est constante (*fig.* 115).

Solution. (A) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est l'équation de l'ellipse dans laquelle a et b sont les paramètres variables liés par la relation

(B) $$\pi ab = k,$$

πab étant l'aire d'une ellipse dont les demi-axes sont a et b. Différentions (A) et (B), en regardant a et b comme variables et x et y comme constantes; nous avons, en faisant usage des différentielles,

$$\frac{x^2 da}{a^3} + \frac{y^2 db}{b^3} = 0, \text{ d'après (A),}$$

et $$b da + a db = 0, \text{ d'après (B).}$$

En transposant un terme dans le 2e membre de chacune des équations et en divisant, nous obtenons

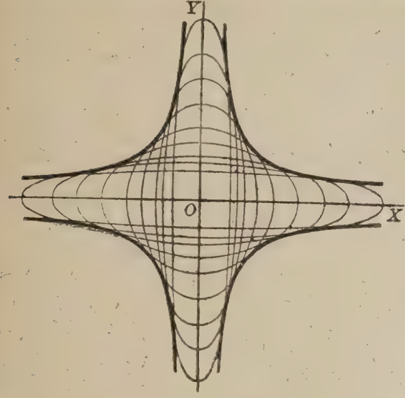


Fig. 115.

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}.$$

Par conséquent, d'après (A),

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2},$$

ce qui donne

$$a=\pm x\sqrt{2} \quad \text{et} \quad b=\pm y\sqrt{2}.$$

En substituant ces valeurs dans (B), nous obtenons l'enveloppe

$$xy=\pm\frac{k}{2\pi},$$

c'est-à-dire une paire d'hyperboles équilatères conjuguées (*fig.* 115).

EXEMPLES

1. Trouver l'enveloppe de la famille de lignes droites $y=2mx+m^4$, m étant le paramètre variable. *Rép.* $x=-2m^3$, $y=-3m^4$; ou $16y^3+27x^4=0$ (*).

2. Trouver l'enveloppe de la famille de paraboles $y^2=a(x-a)$, a étant le paramètre variable. *Rép.* $x=2a$, $y=\pm a$; ou $y=\pm\frac{1}{2}x$.

3. Trouver l'enveloppe de la famille de cercles $x^2+(y-\beta)^2=r^2$, β étant le paramètre variable. *Rép.* $x=\pm r$.

4. Trouver l'équation de la courbe ayant pour tangentes la famille de lignes droites $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$, la pente m étant le paramètre variable. *Rép.* L'ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

5. Trouver l'enveloppe de la famille de cercles dont les diamètres sont le double des ordonnées de la parabole $y^2=4px$. *Rép.* La parabole $y^2=4p(p+x)$.

6. Trouver l'enveloppe de la famille de cercles dont les diamètres sont le double des ordonnées de l'ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

Rép. L'ellipse $\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

7. Le centre d'un cercle se déplace sur la parabole $y^2=4ax$ et sa circonférence passe par le sommet de la parabole. Trouver l'équation de l'enveloppe des cercles. *Rép.* La cissoïde $y^2(x+2a)+x^3=0$.

8. Trouver la courbe dont les tangentes sont $y=lx\pm\sqrt{al^2+bl+c}$, la pente l étant supposée varier. *Rép.* $4(ay^2+bxy+cx^2)=4ac-b^2$.

(*) Quand on donne deux réponses, la première est sous forme paramétrique, la seconde sous forme rectangulaire.

9. Trouver la développée de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, en prenant l'équation de ses normales sous la forme

$$by = ax \operatorname{tg} \varphi - (a^2 - b^2) \sin \varphi,$$

l'angle excentrique φ étant le paramètre.

Rép. $x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \varphi$, $y = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \varphi$, ou $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$.

10. Trouver la développée de l'hypocycloïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, si l'équation de la normale est $y \cos \tau - x \sin \tau = a \cos 2\tau$,
τ étant le paramètre.

Rép $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$.

11. Trouver l'enveloppe des cercles passant par l'origine et ayant leurs centres sur l'hyperbole $x^2 - y^2 = c^2$. *Rép.* La lemniscate $(x^2 + y^2)^2 = 4c^2(x^2 - y^2)$.

12. Trouver l'enveloppe d'une ligne telle que la somme des segments qu'elle intercepte sur les axes soit égale à c.

Rép. La parabole $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}$.

13. Trouver l'équation de l'enveloppe du système de cercles

$$x^2 + y^2 - 2(a + 2)x + a^2 = 0,$$

où a est le paramètre. Tracer une figure illustrant le problème. *Rép.* $y^2 = 4x$.

14. Trouver l'enveloppe de la famille d'ellipses $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ quand la somme de ses demi-axes est égale à c.

Rép. L'hypocycloïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$.

15. Trouver l'enveloppe des ellipses dont les axes coïncident et telles que la distance entre les extrémités du grand et du petit axe soit constante et égale à l.

Rép. Un carré dont les côtés sont $(x \pm y)^2 = l^2$.

16. Des projectiles sortent d'un fusil avec une vitesse initiale v_0. En supposant qu'une élévation quelconque puisse être donnée au fusil et qu'il reste toujours dans le même plan vertical, quelle est l'enveloppe de toutes les trajectoires possibles, la résistance de l'air étant négligée ?

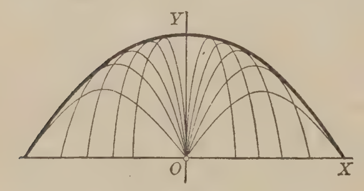


Fig. 116.

NOTE. — L'équation d'une trajectoire quelconque est

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

α étant le paramètre variable.

Rép. La parabole $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$.

17. Trouver l'équation de chacune des familles de courbes ci-après, t étant le paramètre. Tracer la famille de courbes et l'enveloppe :

(a) $(x - t)^2 + y^2 = 1 - t^2$.
(b) $x^2 + (y - t)^2 = 2t$.
(c) $(x - t)^2 + y^2 = \frac{1}{2} t^2 - 1$.
(d) $x^2 + (y - t)^2 = \frac{1}{4} t^2$.
(e) $y = tx + t^2$.
(f) $x = 2ty + t^4$.
(g) $y = tx + \frac{1}{t}$.
(h) $y^2 = t(x + 2t)$.
(i) $(x - t)^2 + y^2 = 4t$.
(j) $x^2 + (y - t)^2 = 4 - t^2$.
(k) $(x - t)^2 + (y - t)^2 = t^2$.
(l) $(x - t)^2 + (y + t)^2 = t^2$.
(m) $y = t^2x + t$.
(n) $y = t(x - 2t)$.
(o) $x = \frac{y}{t} + t$.
(p) $(x - t)^2 + 4y^2 = t$.

CHAPITRE XVII

SÉRIES

134. Introduction. — Une *série* est une suite de nombres séparés qui est formée suivant une certaine règle ou loi. Chaque nombre est appelé un terme de la série. Ainsi

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad \cdots, \quad 2^{n-1}$$

est une série dont la loi de formation est la suivante : chaque terme qui suit le premier est formé en multipliant le terme précédent par 2 ; par suite, nous pouvons écrire autant de termes de la série qu'il nous plaît et un terme quelconque de cette série peut être trouvé en substituant à n dans l'expression 2^{n-1}, *le numéro d'ordre de ce terme dans la série*. L'expression 2^{n-1} est appelée le *terme général* ou n^e *terme* de la série.

EXEMPLES

Dans les six séries suivantes :

(*a*) Découvrir la loi de formation ;

(*b*) Ajouter quelques termes supplémentaires à chacune d'elles ;

(*c*) Trouver le *n^e terme* ou *terme général*.

Séries	*n^e terme*
1. $1, 3, 9, 27, \cdots$.	3^{n-1}.
2. $-a, +a^2, -a^3, +a^4, \cdots$.	$(-a)^n$.
3. $1, 4, 9, 16, \cdots$.	n^2.
4. $x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, \cdots$.	$\frac{x^n}{n}$.
5. $4, -2, +1, -\frac{1}{2}, \cdots$.	$4(-\frac{1}{2})^{n-1}$.
6. $\frac{3y}{2}, \frac{5y^2}{5}, \frac{7y^3}{10}, \cdots$.	$\frac{2n-1}{n^2+1} y^n$.

Écrire les quatre premiers termes de chaque série dont le *n^e terme* ou *terme général* est donné ci-dessous :

n^e terme	*Séries*
7. $n^2 x^n$.	$x, 4x^2, 9x^3, 16x^4$.
8. $\frac{x^n}{1+\sqrt{n}}$.	$\frac{x}{2}, \frac{x^2}{1+\sqrt{2}}, \frac{x^3}{1+\sqrt{3}}, \frac{x^4}{1+\sqrt{4}}$.
9. $\frac{n+2}{n^3+1}$.	$\frac{3}{2}, \frac{4}{9}, \frac{5}{28}, \frac{6}{65}$.

10. $\frac{n}{2^n}$. $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}$.

11. $\frac{(\log a)^n x^n}{n!}$. $\frac{\log a \cdot x}{1}, \frac{\log^2 a \cdot x^2}{2}, \frac{\log^3 a \cdot x^3}{6}, \frac{\log^4 a \cdot x^4}{24}$.

12. $\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-1)!}$. $\frac{1}{1}, -\frac{x^2}{3!}, \frac{x^4}{5!}, -\frac{x^6}{7!}$.

135. Séries illimitées. — Considérons la série de n termes

$$\text{(A)} \qquad 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{8}, \ \ldots, \ \frac{1}{2^{n-1}};$$

et désignons par S_n la somme de la série. Alors

$$\text{(B)} \qquad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Évidemment S_n est une fonction de n, car

si $n=1$, $S_1 = 1 \qquad = 1$,

si $n=2$, $S_2 = 1 + \frac{1}{2} \qquad = 1\frac{1}{2}$,

si $n=3$, $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1\frac{3}{4}$,

si $n=4$, $S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1\frac{7}{8}$,

. . . .

si $n=n$, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \qquad = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ (*).

Marquons des points sur une ligne droite dont les distances à un point fixe O correspondent à ces différentes sommes (*fig.* 117). On voit que le point correspondant à une somme quelconque partage en deux parties égales la distance comprise entre le point précédent et 2. Par suite, il apparaît géométriquement que lorsque n croît sans limite

Fig. 117.

$$\text{limite } S_n = 2.$$

(*) Résultat trouvé d'aprés 6, p. 1, pour la somme d'une progression géométrique.

Nous voyons également qu'il en est ainsi d'après des considérations arithmétiques, car

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2\,(*).$$

[Puisque quand n croît sans limite, $\frac{1}{2^{n-1}}$ tend vers zéro comme limite.]

Jusqu'ici nous n'avons discuté qu'une série particulière (A) quand le nombre de termes croît indéfiniment. Nous considérerons maintenant le problème général, en faisant usage de la série

(C) $u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad \cdots$

dont les termes peuvent être positifs ou négatifs. En désignant par S_n la somme des n premiers termes, nous avons

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n,$$

et S_n est une fonction de n. Si maintenant, nous faisons croître indéfiniment le nombre des termes (n), un des deux cas suivants peut se présenter :

1[er] CAS. **S_n tend vers une limite,** soit u, ce que l'on écrit

$$\lim_{n=\infty} S_n = u;$$

2[e] CAS. **S_n ne tend vers aucune limite.**

Dans les deux cas, (C) est appelé une *série illimitée*. Dans le premier cas, on dit que la série illimitée est *convergente* et qu'elle *converge vers la valeur u*. La progression géométrique illimitée discutée au commencement de ce paragraphe est un exemple de série convergente. Cette série converge vers la valeur 2.

En fait, l'exemple le plus simple d'une série convergente est la progression géométrique illimitée

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \quad ar^4, \quad \cdots,$$

dans laquelle r est numériquement plus petit que l'unité. La somme des n premiers termes de cette série est, d'après 6, p. 1,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

(*) Un tel résultat est quelquefois appelé, pour plus de brièveté, *somme* de la série, mais le lecteur ne doit pas oublier que 2 n'est pas la somme mais la *limite* de la somme quand le nombre de termes croît indéfiniment.

Si maintenant, nous supposons que n croisse indéfiniment, la première fraction du second membre demeure invariable, tandis que la deuxième tend vers zéro comme limite. Par suite

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{a}{1-r},$$

nombre parfaitement défini dans un cas donné quelconque.

Dans le 2[e] cas, la série illimitée est dite *non convergente* (*). Les séries de cette nature peuvent être divisées en deux classes.

Première classe. — Les *séries divergentes*, dans lesquelles la somme de n termes croît indéfiniment en valeur numérique, quand n croît sans limite. Prenons par exemple la série

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Quand n croît indéfiniment, S_n croît sans limite et, par conséquent, la série est *divergente*.

Deuxième classe. — Les *séries oscillantes* dont

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}$$

est un exemple. Ici, S_n est égal à zéro ou à l'unité suivant que n est pair ou impair et bien que la somme S_n ne devienne pas infinie quand n croît indéfiniment, elle ne tend pas vers une limite, elle oscille. Il est évident que si tous les termes d'une série ont le même signe, la série ne peut osciller.

Puisque la somme d'une série convergente est un nombre parfaitement défini, tandis que la somme d'une série non convergente n'existe pas, il s'ensuit immédiatement qu'il est absolument essentiel dans un problème donné quelconque comprenant une série illimitée de déterminer si la série est ou non convergente. C'est là, généralement, un problème d'une grande difficulté et nous ne considérerons que les cas les plus simples.

136. Existence d'une limite. — Quand une série est donnée, nous ne pouvons pas, en général, comme dans le cas d'une progression géométrique, trouver effectivement le nombre qui est la limite de S_n. Mais bien que nous puissions ne pas savoir calculer la valeur

(*) Quelques auteurs emploient *divergente* comme équivalent de *non-convergente*.

numérique de cette limite, il est de première importance de savoir qu'une *limite existe*, car autrement la série pourrait être non convergente.

Les théorèmes suivants que nous énonçons sans les démontrer, sont d'une importance fondamentale pour déterminer si une série est ou non convergente (*).

Théorème I. — *Si* S_n *est une variable qui croît constamment lorsque n croît, mais reste toujours inférieure à un nombre défini fixe* A, *quand n croît indéfiniment,* S_n *tend vers une limite définie qui n'est pas supérieure à* A.

Théorème II. — *Si* S_n *est une variable qui décroît constamment quand n croît, mais reste toujours plus grande qu'un nombre défini fixe* B, *quand n croît indéfiniment,* S_n *tend vers une limite définie qui n'est pas inférieure à* B.

Théorème III. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* S_n *tende vers un nombre défini fixe comme limite, quand n croît indéfiniment, est que*

$$\lim_{n=\infty} (S_{n+p} - S_n) = 0$$

pour toutes les valeurs de l'entier p.

137. Caractère fondamental de convergence. — En sommant d'abord n termes, puis $n+p$ termes d'une série, nous avons

$$\text{(A)} \qquad S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n,$$

$$\text{(B)} \qquad S_{n+p} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}.$$

En retranchant (A) de (B), il vient

$$\text{(C)} \qquad S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}.$$

D'après le théorème III, nous savons que la condition *nécessaire* et *suffisante* pour qu'une série soit convergente est que

$$\lim_{n=\infty} (S_{n+p} - S_n) = 0$$

pour toute valeur de p.

Mais ceci est identique au membre de gauche de (C); par consé-

(*) Voir *Introduction aux séries infinies* d'Osgood, pages 4, 14, 64.

quent, d'après le membre de droite, on peut aussi écrire la condition comme il suit

$$(D) \qquad \lim_{n=\infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots + u_{n+p}) = 0.$$

Puisque (D) est vrai pour toute valeur de p, en faisant $p = 1$, une condition *nécessaire* pour qu'il y ait convergence est que

$$\lim_{n=\infty} (u_{n+1}) = 0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$(E) \qquad \lim_{n=\infty} (u_n) = 0.$$

Par suite, si le terme général (ou n^e terme) d'une série ne tend pas vers zéro quand n tend vers l'infini, nous savons immédiatement que la série n'est pas convergente et il n'est pas nécessaire d'aller plus loin. Néanmoins, (E) n'est pas une condition *suffisante*, c'est-à-dire que même si le n^e terme tend vers zéro, nous ne pouvons affirmer que la série est convergente.

En effet, considérons la série harmonique

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}.$$

Ici, $$\lim_{n=\infty} (u_n) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0;$$

c'est-à-dire que la condition (E) est remplie. Cependant, nous pouvons montrer que la série harmonique n'est pas convergente par la comparaison suivante:

$$(F) \quad 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right] + \cdots.$$

$$(G) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right] + \cdots.$$

Nous remarquons que chaque terme de (G) est égal ou inférieur au terme correspondant de (F), de sorte que la somme d'un nombre quelconque des premiers termes de (F) est plus grande que la somme des termes correspondants de (G). Mais, puisque en (G), la somme des termes groupés dans chaque crochet est égale à $\frac{1}{2}$, la somme de (G) peut être rendue aussi grande qu'il nous plaît en prenant suffisam-

ment de termes. La somme (G) croît indéfiniment quand le nombre des termes croît sans limite ; donc (G) est divergente et par conséquent (F) l'est également.

Nous allons maintenant procéder à l'établissement de règles spéciales qui sont plus faciles à appliquer que les théorèmes qui précèdent.

138. Séries de comparaison. — Dans beaucoup de cas, il est facile de déterminer si une série donnée est ou non convergente en la comparant terme à terme avec une autre série dont le caractère est connu. Il en a été donné un exemple au paragraphe précédent. D'autre part, *soit*

(A) $$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

une série à termes positifs qu'on désire examiner au point de vue de la convergence. Si une série à termes positifs que l'on sait déjà être convergente, savoir

(B) $$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

peut être trouvée dont les termes ne sont jamais inférieurs aux termes correspondants de la série (A) *à examiner,* (A) *est une série convergente et sa somme n'excède pas celle de* (B).

Démonstration. Soit

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n,$$

et

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n;$$

et supposons que

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}} S_n = A.$$

Alors, puisque $S_n < A$ et $s_n \leqslant S_n$, il s'ensuit que $s_n < A$. Par suite, d'après le théorème I, p. 249, s_n tend vers une limite ; par conséquent la série (A) est convergente et la limite de sa somme n'est pas supérieure à A.

Exemple I. — Examiner la série

(C) $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots$$

Solution. Chaque terme qui suit le premier est inférieur au terme correspondant de la progression géométrique

(D) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots,$$

que l'on sait être convergente. Par suite (C) est également convergente.

En suivant un raisonnement semblable à celui qui a été appliqué à (A) et à (B), il est évident que si

(E) $$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

est une série à termes positifs que l'on doit examiner et dont les termes ne sont jamais inférieurs aux termes correspondants de la série à termes positifs

(F) $$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots,$$

que l'on sait être divergente, (E) *est une série divergente.*

Exemple II. — Examiner la série

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots.$$

Solution. Cette série est divergente, puisque ses termes sont plus grands que les termes de la série harmonique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$, que l'on sait être divergente (pp. 250, 251).

Exemple III. — Examiner la série suivante (appelée série p) pour différentes valeurs de p :

(G) $$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots.$$

Solution. En groupant les termes, nous avons, quand $p > 1$,

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}},$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{4}{4^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2,$$

$$\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15^p} < \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} = \frac{8}{8^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3,$$

et ainsi de suite.

Formons la série

(H) $$1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots.$$

Quand $p > 1$, la série (H) est une progression géométrique dont la raison est inférieure à l'unité ; elle est par suite convergente. Mais, la somme de (G) est plus petite que la somme de (H), ainsi que le montrent les inégalités ci-dessus. Par conséquent (G) est également une série convergente.

Quand $p = 1$, la série (G) devient la série harmonique, que nous savons être divergente, et aucune des règles ci-dessus ne s'applique.

Quand $p < 1$, les termes de la série (G) qui suivent le premier sont plus grands que les termes correspondants de la série harmonique. Par suite, la série (G) est divergente.

139. Règle de convergence du rapport de Cauchy. — Soit à

examiner au point de vue de la convergence la série à termes positifs ci-après :

(A) $$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

Divisons un terme général quelconque par celui qui le précède immédiatement, c'est-à dire formons le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Quand n croît sans limite, posons

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho.$$

I. Quand $\rho < 1$. D'après la définition d'une limite (§ 13, p. 11), nous pouvons choisir n suffisamment grand, soit $n = m$, pour que quand $n \geqslant m$ le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ diffère de ρ d'une quantité aussi petite que nous voulons et, par conséquent, inférieure à une fraction proprement dite r. Par suite,

$$u_{m+1} < u_m r; \qquad u_{m+2} < u_{m+1} r < u_m r^2; \qquad u_{m+3} < u_m r^3;$$

et ainsi de suite. Par conséquent, après le terme u_m, chaque terme de la série (A) est inférieur au terme correspondant de la progression géométrique

(B) $$u_m r + u_m r^2 + u_m r^3 + \cdots$$

Mais, puisque $r < 1$, la série (B) et par suite aussi la série (A) est convergente (*).

II. Quand $\rho > 1$ (ou $\rho = \infty$). En suivant le même raisonnement que dans I, on montrerait que la série (A) est divergente.

III. Quand $\rho = 1$, la série peut être convergente ou divergente, c'est-à-dire qu'on ne peut rien affirmer. Car, considérons la série p ci-après :

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \cdots.$$

Le rapport à examiner est le suivant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p;$$

(*) Quand on examine une série pour déterminer si elle est convergente, on peut négliger un nombre fini quelconque de termes. En opérant ainsi, on affecte la *valeur*, mais non l'*existence* de la limite.

et $$\lim_{n=\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^p = (1)^p = 1 (= \rho).$$

Par suite $\rho = 1$, quelle que soit la valeur de p. Mais, p. 252, nous avons montré que :

quand $p > 1$, la série est convergente,

et quand $p \leqslant 1$, la série est divergente.

Il apparaît ainsi que ρ peut être égal à l'unité pour les séries convergentes et pour les séries divergentes, et que dans ces conditions, la règle du *rapport de Cauchy est en défaut*. Dans des cas semblables, il y a d'autres règles à appliquer, mais le niveau de cet ouvrage ne permet pas de les exposer.

Les résultats qui précèdent peuvent être énoncés comme il suit :

Etant donnée la série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots,$$

trouver la limite pour $n = \infty$ du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$.

I. Quand $\rho < 1$ (*), la série est convergente.

II. Quand $\rho > 1$, la série est divergente.

III. Quand $\rho = 1$, on ne peut rien affirmer.

140. Séries alternées. — On donne ce nom à des séries dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. Des séries de cette nature se présentent fréquemment dans la pratique ; elles ont une importance considérable.

Si $$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

est une série alternée dont les termes ne croissent jamais en valeur numérique et si

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0,$$

la série est convergente.

(*) Il n'est pas suffisant que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ devienne et reste inférieur à l'unité pour toutes les valeurs de n ; il faut encore que la *limite* de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit inférieure à l'unité. Par exemple, dans le cas de la série harmonique, ce rapport est toujours plus petit que 1 et cependant la série est divergente, comme nous l'avons vu. La *limite*, en effet, n'est pas inférieure à l'unité, mais égale à l'unité.

Démonstration. — La somme de $2n$ termes (nombre pair) peut s'écrire sous les deux formes suivantes :

$$\text{(A)}\qquad S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}),$$

ou

$$\text{(B)}\qquad S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - u_{2n}.$$

Puisque chaque différence est positive (si elle n'est pas nulle) et que l'hypothèse $\underset{n=\infty}{\text{limite}}\, u_n = 0$ exclut l'égalité des termes de la série, la série (A) montre que S_{2n} est positive et croît avec n, tandis que la série (B) montre que S_{2n} est toujours inférieure à u_1 ; par conséquent, d'après le théorème I, p. 249, S_{2n} doit tendre vers une limite inférieure à u_1 quand n croît et la série est convergente.

Exemple IV. — Examiner au point de vue de la convergence, la série alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Solution. Puisque chaque terme est inférieur en valeur numérique à celui qui le précède et que

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}}\,(u_n) = \underset{n=\infty}{\text{limite}}\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

la série est convergente.

141. Convergence absolue. — On dit qu'une série est *absolument convergente* ou *sans condition* quand la série formée en faisant tous ses termes positifs est convergente. D'autres séries convergentes sont dites *convergentes d'une façon non absolue* ou *convergentes conditionnellement* (*). A cette dernière classe appartiennent quelques séries alternées convergentes. Par exemple, la série

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots$$

est *absolument convergente*, puisque la série (C), p. 251, savoir

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots,$$

est convergente.

La série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

(*) Ou encore *semi-convergentes*.

est *semi-convergente,* puisque la série harmonique

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

est divergente.

Une série dont les termes sont de signes différents est convergente si la série obtenue en faisant tous ses termes positifs est convergente.

Nous admettrons ce théorème sans démonstration. En supposant que la règle du rapport de Cauchy, p. 252, soit valable sans faire aucune restriction pour les signes des termes d'une série, nous pouvons résumer comme il suit les résultats qui précédent.

Directives générales pour examiner les séries

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots$$

au point de vue de la convergence. — *Quand il s'agit d'une série alternée dont les termes ne croissent jamais en valeur numérique et que*

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0,$$

la série est convergente.

Pour toute série dans laquelle les conditions ci-dessus ne sont pas satisfaites, on détermine la forme de u_n et de u_{n+1} et l'on calcule la limite pour $n=\infty$, du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$.

I. *Quand $|\rho|<1$, la série est absolument convergente.*

II. *Quand $|\rho|>1$, la série est divergente.*

III. *Quand $|\rho|=1$, on ne peut rien affirmer et nous devons comparer la série à une autre série que nous savons être convergente, telle que*

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots; \quad r<1 \quad (\textit{progression géométrique});$$

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots; \quad p>1 \quad (\textit{série } p);$$

ou comparer la série donnée avec une autre que nous savons être divergente, telle que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots; \quad (\textit{série harmonique})$$

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots; \quad p<1; \quad (\textit{série } p).$$

Exemple I. — Examiner au point de vue de la convergence la série

$$1+\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\frac{1}{4\,!}+\cdots.$$

Solution. Ici $u_n=\dfrac{1}{(n-1)\,!}$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{n\,!}$.

$$\operatorname*{limite}_{n=\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\operatorname*{limite}_{n=\infty}\left(\frac{\dfrac{1}{n\,!}}{\dfrac{1}{(n-1)!}}\right)=\operatorname*{limite}_{n=\infty}\left(\frac{(n-1)\,!}{n\,!}\right)=\operatorname*{limite}_{n=\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0\,(=\rho),$$

et, d'après I, p. 256, la série est convergente.

Exemple II. — Examiner la série

$$\frac{1\,!}{10}+\frac{2\,!}{10^2}+\frac{3\,!}{10^3}+\cdots.$$

Solution. Ici $u_n=\dfrac{n!}{10^n}$, $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)\,!}{10^{n+1}}$.

$$\operatorname*{limite}_{n=\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\operatorname*{limite}_{n=\infty}\frac{(n+1)\,!}{10^{n+1}}\times\frac{10^n}{n\,!}=\operatorname*{limite}_{n=\infty}\left(\frac{n+1}{10}\right)=\infty\ (=\rho),$$

et, d'après II, p. 256, la série est divergente.

Exemple III. — Examiner la série

(C) $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots.$$

Solution. Ici, $u_n=\dfrac{1}{(2n-1)2n}$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

$$\operatorname*{limite}_{n=\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\operatorname*{limite}_{n=\infty}\left[\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)}\right]=\frac{\infty}{\infty}.$$

Cette expression étant de forme indéterminée, nous l'évaluons en faisant usage de la règle p. 199.

En différentiant, il vient

$$\operatorname*{limite}_{n=\infty}\left(\frac{8n-2}{8n+6}\right)=\frac{\infty}{\infty}.$$

En différentiant à nouveau, on obtient

$$\operatorname*{limite}_{n=\infty}\left(\frac{8}{8}\right)=1\ (=\rho).$$

Ce résultat ne permet pas de se prononcer (III, p. 256). Mais si nous comparons la série (C) avec (G), p. 252, en faisant $p=2$, savoir :

(D) $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots,$$

nous voyons que (C) doit être convergente, puisque ses termes sont inférieurs aux termes correspondants de (D), dont nous avons démontré la convergence.

EXEMPLES

Montrer que les dix séries suivantes sont convergentes :

1. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$.

2. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$.

3. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$.

4. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}+\cdots$.

5. $\frac{1}{3\,!}+\frac{1}{5\,!}+\frac{1}{7\,!}+\cdots$.

6. $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots$.

7. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\cdots$.

8. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$.

9. $\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 4}-\cdots$.

10. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$.

Montrer que les quatre séries suivantes sont divergentes :

11. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots$.

12. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\cdots$.

13. $\frac{2\,!}{10}+\frac{3\,!}{10^2}+\frac{4\,!}{10^3}+\cdots$.

14. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$.

142. Séries entières. — Une série composée des puissances entières croissantes d'une variable, soit x, de la forme

$$\text{(A)} \qquad a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$

dans laquelle les coefficients a_0, a_1, a_2, $\cdots$ sont indépendants de x, est appelée une *série entière en* x. Les séries de cette nature sont d'une importance capitale pour une étude plus approfondie de l'Analyse. Nous examinerons (A) seulement dans le cas où les coefficients sont tels que

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\text{L},$$

L étant un nombre défini. Dans (A)

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\underset{n=\infty}{\text{limite}}\left(\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right)=\underset{n=\infty}{\text{limite}}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)x=\text{L}x.$$

En se référant aux règles I, II, III, p. 256, nous avons dans ce cas $\rho=\text{L}x$, et, par suite, la série (A) est :

I. Absolument convergente quand $|\text{L}x|<1$, ou $|x|<\left|\frac{1}{\text{L}}\right|$;

II. Divergente quand $|\text{L}x|>1$, ou $|x|>\left|\frac{1}{\text{L}}\right|$.

III. Quand $|\text{L}x|=1$, ou $|x|=\left|\frac{1}{\text{L}}\right|$, on ne peut rien affirmer.

Nous pouvons alors formuler les *directives générales* ci-après :

Directives générales pour trouver l'intervalle de convergence de la série entière

(A) $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

1re opération. Écrire la série formée par les coefficients, savoir :

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots.$$

2e opération. Calculer la limite

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \mathrm{L}.$$

3e opération. La série entière (A) *est alors :*

I. *Absolument convergente pour toutes les valeurs de x se trouvant comprises entre*

$$-\left|\frac{1}{\mathrm{L}}\right| \quad et \quad +\left|\frac{1}{\mathrm{L}}\right|.$$

II. *Divergente pour toutes les valeurs de x inférieures à $-\left|\frac{1}{\mathrm{L}}\right|$ ou supérieures à $+\left|\frac{1}{\mathrm{L}}\right|$.*

III. *On ne peut rien affirmer quand $x = \pm\left|\frac{1}{\mathrm{L}}\right|$; mais alors on substitue ces deux valeurs de x dans la série entière* (A) *et on leur applique les directives générales de la p. 256.*

Note. *Quand $\mathrm{L} = 0$, $\pm\left|\frac{1}{\mathrm{L}}\right| = \pm\infty$ et la série entière est absolument convergente pour toutes les valeurs de x.*

Exemple I. — Trouver l'intervalle de convergence de la série

(B) $$x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots.$$

Solution. 1re opération. La série formée par les coefficients est

(C) $$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots.$$

2e opération. $$\lim_{n=\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n=\infty}\left[-\frac{n^2}{(n+1)^2}\right] = \frac{\infty}{\infty}.$$

En différentiant, il vient

$$\lim_{n=\infty}\left(-\frac{2n}{2(n+1)}\right) = \frac{\infty}{\infty}.$$

En différentiant de nouveau, on obtient

$$\lim_{n=\infty}\left(-\frac{2}{2}\right) = -1 \,(= L).$$

3e opération.
$$\left|\frac{1}{L}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1.$$

D'après I, la série est absolument convergente quand x se trouve compris entre -1 et $+1$.

D'après II, la série est divergente quand x est inférieure à -1 ou supérieure à $+1$.

D'après III, on ne peut rien affirmer quand $x = \pm 1$.

En substituant $x = 1$ dans (B), nous obtenons

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

qui est une série alternée convergente.

En substituant $x = -1$ dans (B), il vient

$$-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \cdots,$$

qui est une série convergente par comparaison avec la série $p (p > 1)$.

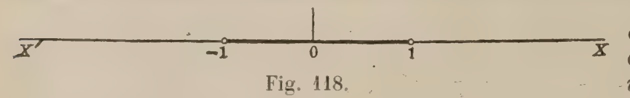


Fig. 118.

On dit que la série de l'exemple qui précède a $[-1, 1]$ comme *intervalle de convergence*, ce qu'on écrit $-1 \leqslant x \leqslant 1$, ou qu'on indique graphiquement comme ci-dessus (*fig.* 118).

EXEMPLES

Pour quelles valeurs de la variable les séries ci-après sont-elles convergentes ?

Représentations graphiques de l'intervalle de convergence (*).

15. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$ *Rép.* $-1 < x < 1$. Fig. 119. (−1, 0, +1)

16. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$ *Rép.* $-1 < x \leqslant 1$. Fig. 120. (−1, 0, +1)

17. $x + x^4 + x^9 + x^{16} + \cdots.$ *Rép.* $-1 < x < 1$. Fig. 121. (−1, 0, +1)

18. $x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \cdots.$ *Rép.* $-1 \leqslant x < 1$. Fig. 122. (−1, 0, +1)

(*) Les valeurs limites qui ne sont pas comprises dans l'intervalle de convergence sont indiquées par des cercles sur les figures.

Représentations graphiques de l'intervalle de convergence.

19. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$

Fig. 123.

Rép. Toutes les valeurs de x.

20. $1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots.$

Fig. 124.

Rép. Toutes les valeurs de θ.

21. $\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots.$

Fig. 125.

Rép. Toutes les valeurs de φ.

22. $\frac{\sin\alpha}{1^2} - \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \frac{\sin 5\alpha}{5^2} - \cdots.$

Fig. 126.

Rép. Toutes les valeurs de α.

23. $\frac{\cos x}{e^x} + \frac{\cos 2x}{e^{2x}} + \frac{\cos 3x}{e^{3x}} + \cdots.$ *Rép.* $x > 0$.



Fig. 127.

[NOTE. — Le sinus et le cosinus ne peuvent dépasser 1 en valeur absolue.]

24. $1 + x\log a + \frac{x^2\log^2 a}{2!} + \frac{x^3\log^3 a}{3!} + \cdots.$

Fig. 128.

Rép. Toutes les valeurs de x.

25. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^3} + \cdots.$ *Rép.* $x > 1$.

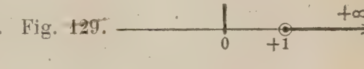


Fig. 129.

26. $x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots,$

Fig. 130.

Rép. $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

27. $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots.$

28. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$

29. $10x + 100x^2 + 1000x^3 + \cdots.$

30. $1 + x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \cdots.$

CHAPITRE XVIII

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS

143. Introduction. — Le lecteur est déjà familiarisé avec quelques méthodes permettant de développer certaines fonctions en série. Ainsi, d'après le théorème du binome,

$$\text{(A)} \qquad (a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4,$$

ce qui donne une série entière finie d'après laquelle la valeur exacte de $(a+x)^4$ peut être calculée pour une valeur quelconque de x. Nous avons également par division

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \left(\frac{1}{1-x}\right)x^n.$$

Le deuxième membre représente une série équivalente au premier, dont tous les coefficients excepté celui de x^n sont constants, n étant un nombre entier positif.

Supposons que nous voulions calculer la valeur de cette fonction quand $x = 0,5$, non par substitution directe dans $\frac{1}{1-x}$, mais en substituant $x = 0,5$ dans la série équivalente

$$\text{(C)} \qquad (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}) + \left(\frac{1}{1-x}\right)x^n.$$

En prenant $n = 8$, (C) donne pour $x = 0,5$

$$\text{(D)} \qquad \frac{1}{1-x} = 1,9921875 + 0,0078125.$$

Si nous supposons maintenant que la valeur de la fonction est la somme des huit premiers termes de la série (C), l'erreur que nous faisons est de 0,0078125. Cependant, au cas où nous aurions besoin de la valeur de la fonction avec 2 décimales seulement, le nombre 1,99 est une approximation très grande de la vraie valeur, puisque l'erreur est inférieure à 0,01. Il est évident que si nous désirions un

plus grand degré d'exactitude, nous n'aurions qu'à utiliser un plus grand nombre de termes de la série entière

$$\text{(E)} \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

Au surplus, puisque nous voyons immédiatement que

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]_{x=0,5} = 2.$$

la discussion ci-dessus n'est pas nécessaire, si ce n'est en vue d'une illustration de la méthode.

En fait, la méthode qui consiste à calculer la valeur d'une fonction d'après une série équivalente qui en est le développement est de la plus grande importance pratique, les valeurs des fonctions transcendantes élémentaires telles que sinus, cosinus, logarithme, etc., étant calculées beaucoup plus simplement de cette façon.

Jusqu'à présent, nous avons appris à développer en série quelques formes particulières seulement. Nous allons maintenant examiner une méthode de développement applicable à une classe étendue et importante de fonctions. Cette méthode fait l'objet du *théorème de Taylor*.

144. Théorème (*) de Taylor et série de Taylor. — En remplaçant b par x dans (E), p. 191, le *développement du théorème de la moyenne* prend la forme

$$(61) \qquad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x_1),$$

expression dans laquelle x_1 se trouve compris entre a et x.

La formule (61), qui est une des plus importantes de l'analyse, est appelée *théorème de Taylor* ou *formule de Taylor*. Nous voyons qu'elle exprime $f(x)$ comme la somme d'une série finie en $(x-a)$.

Le dernier terme de la formule (61), savoir $\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x_1)$, est quelquefois appelé le *reste dans la formule de Taylor après n termes*. Si ce reste tend vers zéro quand le nombre des termes croît sans

(*) Connu également sous le nom de *formule de Taylor*.

limite, le membre de droite de (61) devient une série entière infinie appelée *série de Taylor* (*). Dans ce cas, la formule (61) s'écrit sous la forme :

$$(62) \qquad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \cdots,$$

et nous disons que *la fonction a été développée en une série de Taylor.*

Pour toutes les valeurs de x pour lesquelles le reste tend vers zéro quand n croît indéfiniment, cette série est convergente et sa somme donne la valeur exacte de $f(x)$, parce que la différence (= le reste) entre la fonction et la somme de n termes de la série tend vers la limite zéro (§ 15, p. 14).

Si la série est convergente pour des valeurs de x pour lesquelles le reste ne tend pas vers zéro quand n croît indéfiniment, la limite de la somme de la série n'est pas égale dans ce cas à la fonction $f(x)$.

La série illimitée (62) *représente la fonction pour les valeurs de x et celles-là seulement, pour lesquelles le reste tend vers zéro quand le nombre des termes croît indéfiniment.*

Il est généralement plus facile de déterminer l'intervalle de convergence d'une série que celui pour lequel le reste tend vers zéro ; *dans les cas simples les deux intervalles sont identiques.*

Quand les valeurs d'une fonction et de ses dérivées successives sont connues pour une certaine valeur de la variable, telle que $x = a$, la formule (62) est alors employée pour trouver la valeur de la fonction pour des valeurs de x voisines de a. Cette formule porte également le nom de *développement de $f(x)$ dans le voisinage de $x = a$.*

Exemple. — Développer $\log x$ suivant les puissances de $(x - 1)$.

Solution.

$$f(x) = \log x, \qquad f(1) = 0;$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(1) = 1;$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(1) = -1;$$
$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f'''(1) = 2.$$

. . . .

(*) Publiée par le Dr Brook Taylor (1685-1731) dans sa *Methodus Incrementorum*, Londres, 1715.

En substituant dans (62), il vient

$$\log x = x - 1 - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots. \qquad \textit{Réponse.}$$

Cette série est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 2 et elle représente le *développement de* $\log x$ *dans le voisinage de* $x = 1$, le reste tendant vers zéro.

Quand une fonction de la somme de deux nombres a et x est donnée, soit $f(a + x)$, il est souvent nécessaire de développer la fonction en une série entière par rapport à l'un d'eux, x par exemple.

A cet effet, nous utiliserons une autre forme de la série de Taylor, obtenue en remplaçant x par $a + x$ dans la formule (62), savoir

$$(63) \quad f(a+x) = f(a) + \frac{x}{1!}f'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \frac{x^3}{3!}f'''(a) + \cdots$$

Exemple. — Développer $\sin(a + x)$ suivant les puissances de x.

Solution. Ici, $f(a + x) = \sin(a + x)$.

Par suite, en posant $x = 0$,

$$f(a) = \sin a,$$
$$f'(a) = \cos a,$$
$$f''(a) = -\sin a,$$
$$f'''(a) = -\cos a,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

En substituant dans (63), il vient

$$\sin(a+x) = \sin a + \frac{x}{1}\cos a - \frac{x^2}{2!}\sin a - \frac{x^3}{3!}\cos a + \cdots. \qquad \textit{Réponse.}$$

EXEMPLES (*)

1. Développer e^x suivant les puissances de $x - 2$.
Rép. $e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \cdots$.

2. Développer $x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ suivant les puissances de $x - 1$.
Rép. $-3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3$.

3. Développer $3y^2 - 14y + 7$ suivant les puissances de $y - 3$.
Rép. $-8 + 4(y-3) + 3(y-3)^2$.

4. Développer $5z^2 + 7z + 3$ suivant les puissances de $z - 2$.
Rép. $37 + 27(z-2) + 5(z-2)^2$.

5. Développer $4x^3 - 17x^2 + 11x + 2$ suivant les puissances de $x - 4$.

6. Développer $5y^4 + 6y^3 - 17y^2 + 18y - 20$ suivant les puissances de $y + 4$.

7. Développer e^x suivant les puissances de $x + 1$.

(*) Dans ces exemples, nous supposons que les fonctions peuvent être développées en séries entières.

8. Développer $\sin x$ suivant les puissances de $x - \alpha$.

9. Développer $\cos x$ suivant les puissances de $x - \alpha$.

10. Développer $\cos(a + x)$ suivant les puissances de x.

Rép. $\cos(a + x) = \cos a - x \sin a - \frac{x^2}{2!} \cos a + \frac{x^3}{3!} \sin a + \cdots$.

11. Développer $\log(x + h)$ suivant les puissances de x.

Rép. $\log(x + h) = \log h + \frac{x}{h} - \frac{x^2}{2h^2} + \frac{x^3}{3h^3} + \cdots$.

12. Développer $\operatorname{tg}(x + h)$ suivant les puissances de h.

Rép. $\operatorname{tg}(x + h) = \operatorname{tg} x + h \sec^2 x + h^2 \sec^2 x \operatorname{tg} x + \cdots$.

13. Développer les fonctions ci-après suivant les puissances de h.

(*a*) $(x + h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3}h^3 + \cdots$.

(*b*) $e^{x+h} = e^x\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots\right)$.

145. Théorème de Maclaurin et série de Maclaurin. — On obtient un cas particulier du théorème de Taylor en posant $a = 0$ dans la formule (**61**), p. 263, ce qui donne

$$(64) \qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x_1),$$

formule dans laquelle x_1 se trouve compris entre 0 et x.

La formule (**64**) est appelée *théorème de Maclaurin*.

Le membre de droite est évidemment une série en x dans le même sens que (**61**), p. 263, est une série en $x - a$.

En faisant $a = 0$ dans (**62**), p. 264, nous obtenons la *série de Maclaurin* (*)

$$(65) \qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots,$$

qui est un cas particulier très utile de la série de Taylor.

Ce qui a été dit au sujet du reste et de la convergence de la série de Taylor s'applique à la série de Maclaurin, cette dernière n'étant qu'un cas spécial de la première.

Le lecteur ne devra pas manquer de noter l'importance d'un déve-

(*) Ainsi nommée d'après Colin Maclaurin (1698-1746) qui le premier l'énonça dans son *Traité des fluxions*, Edimbourg, 1742. En réalité, la série est due à Stirling (1692-1770).

loppement tel que (65). Dans toutes les évaluations pratiques, on cherche des résultats exacts à un certain nombre de décimales, et puisque la méthode en question remplace une fonction, qui peut être difficile à calculer, par *un polynome ordinaire à coefficients constants*, elle est très utile pour simplifier de tels calculs. Naturellement, nous devons utiliser suffisamment de termes pour obtenir le degré d'exactitude désiré.

Dans le cas d'une série alternée (§ 140, p. 254), l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque est numériquement inférieure à ce terme, puisque la somme de la série qui suit ce terme est numériquement plus petite que ce terme.

Exemple I. — Développer $\cos x$ en une série entière illimitée et déterminer pour quelles valeurs de x elle est convergente.

Solution. En différentiant d'abord et en posant ensuite $x = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= -\sin x, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -1, \\ f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= 0, \\ f^{IV}(x) &= \cos x, & f^{IV}(0) &= 1, \\ f^{V}(x) &= -\sin x, & f^{V}(0) &= 0, \\ f^{VI}(x) &= -\cos x, & f^{VI}(0) &= -1, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

En substituant dans (65), il vient

$$\text{(A)} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

En comparant avec l'exercice 20, p. 261, nous voyons que la série est convergente pour toutes les valeurs de x.

On a de même pour $\sin x$:

$$\text{(B)} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

série qui est convergente pour toutes les valeurs de x (ex. 21, p. 261) (*).

(*) Puisque ici $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ et $f^{(n)}(x_1) = \sin\left(x_1 + \frac{n\pi}{2}\right)$, nous avons, en substituant dans le dernier terme de (64), p. 266,

$$\text{Reste} = \frac{x^n}{n!}\sin\left(x_1 + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad 0 < x_1 < x.$$

Mais, $\sin\left(x_1 + \frac{n\pi}{2}\right)$ ne peut jamais dépasser l'unité et, d'après l'ex. 19, p. 261,

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}} \frac{x^n}{n!} = 0$$

pour toutes les valeurs de x. Par suite,

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}} \frac{x^n}{n!}\sin\left(x_1 + \frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

pour toutes les valeurs de x, c'est-à-dire que dans ce cas *la limite du reste est zéro pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la série est convergente.* C'est également le cas pour toutes les fonctions considérées dans cet ouvrage.

Exemple II. — En utilisant la série (B) trouvée dans le dernier exemple, calculer sin 1 avec quatre décimales exactes.

Solution. Ici $x = 1$ radian, c'est-à-dire que l'angle est exprimé en mesure circulaire. Par conséquent, en substituant $x = 1$ dans la série (B) du dernier exemple, il vient

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots.$$

En additionnant séparément les termes positifs et les termes négatifs, on obtient

$$1 = 1{,}00000\cdots \qquad \frac{1}{3!} = 0{,}16667\cdots$$

$$\frac{1}{5!} = 0{,}00833\cdots \qquad \frac{1}{7!} = 0{,}00019\cdots$$

$$\overline{1{,}00833\cdots} \qquad \overline{0{,}16686\cdots}$$

Par suite, $\sin 1 = 1{,}00833 - 0{,}16686 = 0{,}84147\cdots,$

résultat exact jusqu'à la cinquième décimale, puisque l'erreur commise doit être inférieure à $\frac{1}{9!}$, c'est-à-dire plus petite que 0,000003. Évidemment, la valeur de sin 1 peut être calculée avec une approximation aussi grande que l'on veut en prenant simplement un nombre suffisant de termes additionnels.

EXEMPLES

Vérifier les développements de fonctions ci-après en séries entières au moyen de la série de Maclaurin et déterminer pour quelles valeurs de la variable ils sont convergents :

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$

Convergente pour toutes les valeurs de x.

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots.$

Convergente pour toutes les valeurs de x.

3. $a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2 \log^2 a}{2!} + \frac{x^3 \log^3 a}{3!} + \cdots.$

Convergente pour toutes les valeurs de x.

4. $\sin kx = kx - \frac{k^3x^3}{3!} + \frac{k^5x^5}{5!} - \frac{k^7x^7}{7!} + \cdots.$

Convergente pour toutes les valeurs de x, k étant une constante.

5. $e^{-kx} = 1 - kx + \frac{k^2x^2}{2!} - \frac{k^3x^3}{3!} + \frac{k^4x^4}{4!} - \cdots.$

Convergente pour toutes les valeurs de x, k étant une constante.

6. $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots.$

Convergente si $-1 < x \leqq 1$.

7. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots$.

Convergente si $-1 \leqslant x < 1$.

8. $\text{arc} \sin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$.

Convergente si $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

9. $\text{arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$.

Convergente si $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

10. $\sin^2 x = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + \frac{32x^6}{6!} + \cdots$.

Convergente pour toutes les valeurs de x.

11. $e^{\sin \varphi} = 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{8} + \cdots$.

Convergente pour toutes les valeurs de φ.

12. $e^\theta \sin \theta = \theta + \theta^2 + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{4\theta^5}{5!} - \frac{8\theta^6}{6!} - \cdots$.

Convergente pour toutes les valeurs de θ.

13. Trouver trois termes du développement de chacune des fonctions suivantes : (*a*) $\operatorname{tg} x$, (*b*) $\sec x$, (*c*) $e^{\cos x}$, (*d*) $\cos 2x$, (*e*) $\text{arc} \cos x$, (*f*) a^{-x}.

14. Montrer que $\log x$ ne peut être développé d'après le théorème de Maclaurin.

Calculer les valeurs des fonctions suivantes en substituant directement dans la série entière équivalente et en prenant suffisamment de termes pour que les résultats concordent avec ceux donnés ci-dessous.

15. $e = 2,7182 \cdots$.

Solution. Soit $x = 1$ dans la série de l'ex. 1. Il vient alors

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots.$$

1er terme $= 1,00000$	
2e terme $= 1,00000$	
3e terme $= 0,50000$	
4e terme $= 0,16667 \cdots$	(En divisant le 3e terme par 3.)
5e terme $= 0,04167 \cdots$	(En divisant le 4e terme par 4.)
6e terme $= 0,00833 \cdots$	(En divisant le 5e terme par 5.)
7e terme $= 0,00139 \cdots$	(En divisant le 6e terme par 6.)
8e terme $= 0,00019 \cdots$, etc.	(En divisant le 7e terme par 7.)

En additionnant $e = 2,71825 \cdots$ *Réponse.*

16. $\text{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{5}\right) = 0,1973 \cdots$; utiliser la série de l'exemple 9.

17. $\cos 1 = 0,5403 \cdots$; utiliser la série de l'ex. 2.

18. $\cos 10^\circ = 0,9848 \cdots$; utiliser la série de l'ex. 2.

19. $\sin 1 = 0,0998 \cdots$; utiliser la série $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$.

20. $\text{arc} \sin 1 = 1,5708 \cdots$; utiliser la serie de l'ex. 8.

21. $\sin\frac{\pi}{4} = 0,7071 \cdots$; utiliser la série (B), p. 267.

22. $\sin 0,5 = 0,4794 \cdots$; utiliser la série (B), p. 267.

23. $e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots = 7,3891.$

24. $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + \frac{1}{2^3 3!} + \cdots = 1,6487.$

Dans des traités plus avancés, on montre que pour des valeurs de x comprises dans l'intervalle de convergence, la somme d'une série entière est différentiable et que sa dérivée est obtenue en différentiant la série terme par terme comme dans une somme ordinaire. Ainsi, d'après (B), p. 267,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

En différentiant les deux membres, nous obtenons

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

qui est la série de l'ex. 2, p. 268.

Ce qui précède illustre comment *nous pouvons obtenir par différentiation une nouvelle série entière d'une série entière donnée.*

En différentiant la série entière de l'ex. 6, p. 268, nous obtenons

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots.$$

On obtient de la même façon, en partant de l'ex. 8, p. 269:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots.$$

146. Calcul au moyen des séries. — I. *Séries alternées.* Les exemples 15 à 24 du dernier exercice montrent comment on peut utiliser les séries pour calculer. Il est évident qu'il est très important de connaître le pourcentage d'erreur du résultat, puisque le calcul doit nécessairement s'arrêter à un terme de la série, la somme des termes subséquents étant de ce fait négligée. L'*erreur absolue* commise est naturellement égale à la limite de la somme de tous les termes négligés. Dans certaines séries, cette erreur est difficile à

calculer, mais dans le cas des séries alternées, on a montré au § 140, p. 254, que cette somme est inférieure au premier de ces termes. Par suite, l'erreur absolue commise est *inférieure* au premier terme négligé. Une forte proportion des séries utilisées pour les calculs sont, heureusement, des séries alternées et, par suite, cette méthode facile pour trouver la limite supérieure de l'erreur absolue et le pourcentage de l'erreur est très utile. Nous allons illustrer ce qui précède au moyen d'un exemple.

Exemple. — Déterminer la plus grande erreur possible et le pourcentage de l'erreur commise en calculant la valeur numérique du sinus d'un radian en partant de la série

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

(*a*) quand tous les termes après le second sont négligés ;
(*b*) quand tous les termes après le troisième sont négligés.

Solution. Faisons $x = 1$ dans la série ; il vient alors

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots.$$

(*a*) En utilisant seulement les deux premiers termes, on a

$$\sin 1 = 1 - \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{6} = 0{,}8333 ;$$

l'erreur absolue est inférieure à $\frac{1}{5!}$, c'est-à-dire $< \frac{1}{120}$ ($= 0{,}0083$) et le pourcentage d'erreur est inférieur à 1 pour cent (*).

(*b*) En utilisant seulement les trois premiers termes, on a

$$\sin 1 = 1 - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{120} = 0{,}841666 ;$$

l'erreur absolue est inférieure à $\frac{1}{7!}$, c'est-à-dire $< \frac{1}{5040}$ ($= 0{,}000198$) et le pourcentage d'erreur est inférieur à $\frac{1}{40}$ de 1 pour cent (**).

De plus, la *valeur exacte* de sin 1 se trouve comprise entre 0,8333 et 0,841666, puisque pour une série alternée, S_n est alternativement plus grande et plus petite que $\lim_{n=\infty} S_n$.

EXEMPLES

Déterminer la plus grande erreur possible et le pourcentage de l'erreur commise en calculant la valeur numérique de chacune des fonctions suivantes, d'après les séries correspondantes :

(*a*) quand tous les termes après le second sont négligés ;
(*b*) quand tous les termes après le 3e sont négligés.

(*) Puisque 0,0083 : 0,8333 = 0,01.
(**) Puisque 0,000198 : 0,841666 = 0,00023.

1. cos 1.	4. arc tg 1.	7. $e^{-\frac{1}{2}}$.
2. sin 2.	5. e^{-2}.	8. arc tg 2.
3. cos $\frac{1}{2}$.	6. sin $\frac{\pi}{3}$.	9. sin 15°.

II. — *Calcul de π au moyen des séries.* — D'après l'ex. 8, p. 269, nous avons

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3\, x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5\, x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots.$$

Puisque cette série est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, nous pouvons poser $x = \frac{1}{2}$, ce qui donne

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots$$

ou
$$\pi = 3{,}1415 \cdots.$$

Evidemment, nous aurions pu utiliser à la place de cette série, celle de l'ex. 9, p. 269. Ces deux séries convergent lentement, mais il y a d'autres séries trouvées par des méthodes plus compliquées, au moyen desquelles la valeur de π peut être facilement calculée avec un grand nombre de décimales exactes.

III. — *Calcul des logarithmes au moyen des séries.* — Les séries jouent un rôle très important dans les calculs nécessaires à la construction des tables de logarithmes.

D'après l'ex. 6, p. 268, nous avons

$$\text{(A)} \qquad \log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots.$$

Cette série est convergente pour $x = 1$ et nous pouvons trouver log 2 en faisant $x = 1$ dans (A), ce qui donne

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

Mais cette série ne se prête pas bien à un calcul numérique parce qu'elle converge si lentement qu'il serait nécessaire de prendre 2 000 termes pour obtenir la valeur de log 2 avec 3 décimales exactes. En vue du calcul des logarithmes, nous allons établir une série convergeant rapidement.

D'après la théorie des logarithmes,

$$\text{(B)} \qquad \log \frac{1 + x}{1 - x} = \log(1 + x) - \log(1 - x). \qquad \text{D'après 8, p. 1.}$$

En substituant dans (B) les séries équivalentes à $\log(1+x)$ et $\log(1-x)$ trouvées dans les ex. 6 et 7, p. 268, nous obtenons (*)

$$\text{(C)} \qquad \log\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right],$$

série qui est convergente quand x est numériquement inférieur à l'unité. Posons

$$\text{(D)} \qquad \frac{1+x}{1-x}=\frac{M}{N}, \qquad \text{d'où} \qquad x=\frac{M-N}{M+N};$$

nous voyons que x sera toujours numériquement inférieur à l'unité pour toutes les valeurs positives de M et de N. En portant dans (C) la valeur de x donnée par (D), nous obtenons

$$\text{(E)} \quad \log\frac{M}{N}=\log M-\log N$$
$$=2\left[\frac{M-N}{M+N}+\frac{1}{3}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^5+\cdots\right],$$

série qui est convergente pour toutes les valeurs positives de M et de N ; et il est toujours possible de choisir M et N de façon qu'elle converge rapidement.

En faisant dans (E) $M=2$ et $N=1$, nous obtenons

$$\log 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right]$$
$$=0,69314718\cdots.$$

$$\left[\text{Puisque } \log N=\log 1=0 \text{ et } \frac{M-N}{M+N}=\frac{1}{3}.\right]$$

En faisant dans (E), $M=3$ et $N=2$, nous obtenons

$$\log 3=\log 2+2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\cdots\right]$$
$$=1,09861229\cdots.$$

Il est seulement nécessaire de calculer les logarithmes des nombres premiers de cette façon, les logarithmes des nombres composés étant trouvés en utilisant les théorèmes 7-10, p. 1. Ainsi,

$$\log 8=\log 2^3=3\log 2=2,07944154\cdots,$$
$$\log 6=\log 3+\log 2=1,79175947\cdots.$$

(*) Le lecteur devra observer que nous avons traité les séries comme si elles étaient des sommes ordinaires, mais elles n'en sont pas ; ce sont des *limites* de sommes. La justification de cette façon de faire est au-dessus du niveau de cet ouvrage.

Tous les logarithmes qui précèdent sont des *logarithmes népériens* ou *logarithmes naturels*, c'est-à-dire que leur base est $e = 2{,}7182818$. Si nous voulons obtenir les logarithmes de Briggs ou *logarithmes vulgaires*, à base 10, nous n'avons qu'à changer la base au moyen de la formule

$$\log_{10} n = \frac{\log_e n}{\log_e 10}.$$

Ainsi.

$$\log_{10} 2 = \frac{\log_e 2}{\log_e 10} = \frac{0{,}693\cdots}{2{,}302\cdots} = 0{,}301\cdots.$$

Dans le calcul réel d'une table de logarithmes, quelques-unes seulement des valeurs qui y sont inscrites sont calculées au moyen des séries, toutes les autres étant trouvées en employant des théorèmes de la théorie des logarithmes et des procédés ingénieux et variés destinés à abréger le travail.

EXEMPLES

Calculer par les méthodes de ce paragraphe les logarithmes ci-après :

1. $\log_e 5 = 1{,}6094\cdots$
2. $\log_e 10 = 2{,}3025\cdots$
3. $\log_e 24 = 3{,}1781\cdots$
4. $\log_{10} 5 = 0{,}6990\cdots$

147. Formules approchées dérivées des séries. Interpolation. — Dans les deux précédents paragraphes nous avons évalué une fonction d'après sa série entière équivalente en substituant la valeur donnée de x dans un certain nombre des premiers termes de cette série, le nombre des termes utilisés dépendant du degré d'exactitude demandé. Il est d'une importance capitale de noter que cette opération signifie en réalité que *nous considérons la fonction comme approximativement égale à un polynome ordinaire à coefficients constants*.

Par exemple, considérons la série

$$\text{(A)} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

qui est une série alternée pour les valeurs positives et négatives de x. L'erreur commise, si nous supposons $\sin x$ approximativement égal à la somme des n premiers termes, est numériquement plus

petite que le $(n+1)^e$ terme (§ 140, p. 254). Par exemple, supposons

$$\text{(B)} \qquad \sin x = x,$$

et cherchons pour quelles valeurs de x cette relation est exacte jusqu'à la 3e décimale. A cet effet, posons

$$\text{(C)} \qquad \left|\frac{x^3}{3!}\right| < 0{,}001,$$

ce qui donne x numériquement plus petit que $\sqrt[3]{0{,}006}$ $(= 0{,}1817)$, c'est-à-dire qu'on obtient pour (B) trois décimales exactes quand x se trouve compris entre $+10°{,}4$ et $-10°{,}4$.

L'erreur commise en négligeant dans (A) tous les termes qui suivent celui en x^{n-1} est donnée par le reste [voir (64), p. 266]

$$\text{(D)} \qquad \mathrm{R} = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x_1)\,;$$

par suite, nous pouvons trouver pour quelles valeurs de x un polynome représente les fonctions avec un degré quelconque d'exactitude désiré en écrivant l'inégalité

$$\text{(E)} \qquad |\mathrm{R}| < \textit{limite d'erreur}$$

et en résolvant par rapport à x, pourvu que nous connaissions la valeur maximum de $f^{(n)}(x_1)$. Par exemple, si nous voulons trouver pour quelles valeurs de x la formule

$$\text{(F)} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6}$$

donne deux décimales exactes (c'est-à-dire une erreur $< 0{,}01$) sachant que $|f^{(v)}(x_1)| \leqslant 1$, nous avons, d'après (D) et (E),

$$\frac{|x^5|}{120} < 0{,}01, \text{ c'est-à-dire } |x| < \sqrt[5]{1 \cdot 2}\,;$$

ou

$$|x| \leqslant 1.$$

Par conséquent $x - \dfrac{x^3}{6}$ donne la valeur de $\sin x$ avec deux décimales exactes si $|x| \leqslant 1$, c'est-à-dire si x se trouve compris entre $+57°$ et $-57°$. Ce résultat concorde avec la discussion de (A) en tant que série alternée.

Puisque dans un grand nombre de problèmes pratiques, on de-

mande des résultats avec deux ou trois décimales exactes, l'utilité des formules d'approximation telles que (B) et (F) est évident.

Si nous développons à nouveau $\sin x$ par la série de Taylor (**62**), p. 264, suivant les puissances de $x-a$, nous obtenons

$$\sin x = \sin a + \cos a(x-a) - \frac{\sin a}{2!}(x-a)^2 + \cdots.$$

Par suite, pour toutes les valeurs de x *voisines d'une valeur fixe* a, nous avons la formule d'approximation

$$\text{(G)} \qquad \sin x = \sin a + \cos a(x-a).$$

En transposant $\sin a$ et en divisant par $x-a$, nous obtenons

$$\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \cos a.$$

Puisque $\cos a$ est constant, cette relation signifie que :

Le changement de valeur du sinus est proportionnel au changement de valeur de l'angle pour des valeurs de l'angle voisines de a.

Par exemple, soit $a = 30° = 0{,}5236$ radian et supposons qu'on demande de calculer les sinus de 31° et de 32° par la formule d'approximation (G). Alors,

$$\begin{aligned}\sin 31° &= \sin 30° + \cos 30°(0{,}01745)(*)\\ &= 0{,}5000 + 0{,}8660 \times 0{,}01745\\ &= 0{,}5000 + 0{,}0151\\ &= 0{,}5151.\end{aligned}$$

De même,

$$\sin 32° = \sin 30° + \cos 30°(0{,}03490) = 0{,}5302.$$

Cette discussion illustre le principe connu sous le nom d'**interpolation au moyen des différences premières.** D'une façon générale, d'après la série de Taylor, nous avons la formule d'approximation

$$\text{(H)} \qquad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Si la constante $f'(a) \neq 0$, cette formule signifie que *le rapport des accroissements de la fonction et de la variable pour toutes les valeurs de cette dernière différant peu de la valeur fixe a, est constant.*

(*) $x - a = 1° = 0{,}01745$ radian.

Cependant, il convient de n'appliquer la formule (H) qu'avec précaution, car tandis que l'erreur absolue commise en utilisant (H) dans un cas donné peut être petite, le pourcentage d'erreur peut être si grand que les résultats soient sans valeur.

L'interpolation au moyen des différences secondes est alors nécessaire. Dans ce cas, nous utilisons un terme de plus dans la série de Taylor, ce qui donne la formule d'approximation

$$\text{(I)} \qquad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2.$$

Les valeurs de sin 31° et de sin 32° calculées d'après (G), p. 276, ont seulement trois décimales exactes. Si l'on veut une plus grande exactitude, on peut utiliser (I), qui donne pour $f(x) = \sin x$

$$\text{(J)} \qquad \sin x = \sin a + \cos a(x-a) - \frac{\sin a}{2!}(x-a)^2.$$

Soit $a = 30° = 0{,}5236$ radian.

Alors,

$$\sin 31° = \sin 30° + \cos 30°(0{,}01745) - \frac{\sin 30°}{2}(0{,}01745)^2$$
$$= 0{,}50000 + 0{,}01511 - 0{,}00008$$
$$= 0{,}51503.$$
$$\sin 32° = \sin 30° + \cos 30°(0{,}03490) - \frac{\sin 30°}{2}(0{,}03490)^2$$
$$= 0{,}50000 + 0{,}03022 - 0{,}00030$$
$$= 0{,}52992.$$

Ces résultats donnent quatre décimales exactes.

EXEMPLES

1. En utilisant la formule (H) pour l'interpolation au moyen des différences premières, calculer les fonctions suivantes :

(*a*) cos 61°, en prenant $a = 60°$.
(*b*) tg 46°, en prenant $a = 45°$.
(*c*) sin 85°,1, en prenant $a = 85°$.
(*d*) cotg 70°,3, en prenant $a = 70°$.

2. En utilisant la formule (I) pour l'interpolation au moyen des différences secondes, calculer les fonctions suivantes :

(*a*) sin 11°, en prenant $a = 10°$.
(*b*) cos 86°, en prenant $a = 85°$.

(*c*) cotg 15°,2, en prenant $a=15°$.
(*d*) tg 69°, en prenant $a=70°$.

3. Tracer les graphiques respectifs des fonctions x, $x-\frac{x^3}{3!}$, $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ et les comparer avec le graphique de sin x.

148. Théorème de Taylor pour les fonctions de deux ou plusieurs variables. — Le niveau de cet ouvrage nous permet seulement de traiter d'une façon élémentaire le développement des fonctions comprenant plus d'une variable, d'après le théorème de Taylor. Les expressions du reste sont compliquées ; nous ne les écrirons pas.

Étant donnée la fonction

$$\text{(A)} \qquad f(x, y),$$

on demande de développer la fonction

$$\text{(B)} \qquad f(x+h, y+k)$$

suivant les puissances de h et de k.

Considérons la fonction

$$\text{(C)} \qquad f(x+ht, y+kt).$$

Évidemment, (B) est la valeur de (C) quand $t=1$. En considérant (C) comme une fonction de t, nous pouvons écrire

$$\text{(D)} \qquad f(x+ht, y+kt)=\text{F}(t),$$

fonction qui peut être développée suivant les puissances de t, d'après le théorème de Maclaurin (**64**), p. 266, ce qui donne

$$\text{(E)} \qquad \text{F}(t)=\text{F}(0)+t\text{F}'(0)+\frac{t^2}{2!}\text{F}''(0)+\frac{t^3}{3!}\text{F}'''(0)+\cdots$$

Exprimons maintenant les dérivées successives de F(t) par rapport à t, en fonction des dérivées partielles de F(t) par rapport à x et y. Soit

$$\text{(F)} \qquad \alpha=x+ht, \qquad \beta=y+kt;$$

alors, d'après (**51**), p. 226, nous avons

$$\text{(G)} \qquad \text{F}'(t)=\frac{\partial\text{F}}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial\text{F}}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt}.$$

Mais d'après (F),

$$\text{(H)} \qquad \frac{d\alpha}{dt} = h \quad \text{et} \quad \frac{d\beta}{dt} = k;$$

et puisque F(t) est une fonction de x et de y par l'intermédiaire de α et de β, nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y};$$

ou, puisque d'après (F), $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 1$ et $\frac{\partial \beta}{\partial y} = 1$,

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \beta}.$$

En substituant dans (G) d'après (I) et (H), il vient

$$\text{(J)} \qquad F'(t) = h\frac{\partial F}{\partial x} + k\frac{\partial F}{\partial y}.$$

En remplaçant F(t) par F'(t) dans (J), nous obtenons

$$F''(t) = h\frac{\partial F'}{\partial x} + k\frac{\partial F'}{\partial y} = h\left\{h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right\} + k\left\{h\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + k\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right\}.$$

$$\text{(K)} \qquad F''(t) = h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

On obtient de la même façon la dérivée troisième, qui s'écrit

$$\text{(L)} \qquad F'''(t) = h^3\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 F}{\partial y^3},$$

et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre supérieur.

Quand $t = 0$, nous avons d'après (D), (G), (J), (K), (L), $F(0) = f(x, y)$, c'est-à-dire que F(t) est remplacé par $f(x, y)$,

$$F'(0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$F''(0) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$F'''(0) = h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3},$$

et ainsi de suite.

En substituant ces résultats dans (E), nous obtenons

$$(66)\qquad f(x+ht,\ y+kt)=f(x,y)+t\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{t^2}{2\,!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\cdots.$$

Pour obtenir $f(x+h,\ y+k)$ on remplace t par 1 dans (66), ce qui donne le *théorème de Taylor pour une fonction de deux variables indépendantes*.

$$(67)\qquad f(x+h,\ y+k)=f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$+\frac{1}{2\,!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\cdots,$$

formule qui donne le développement demandé suivant les puissances de h et de k.

Évidemment, la formule (67) s'adapte également au développement de $f(x+h,\ y+k)$ suivant les puissances de x et de y en échangeant simplement x avec h et y avec k. Ainsi

$$(67\ a)\qquad f(x+h,\ y+k)=f(h,k)+x\frac{\partial f}{\partial h}+y\frac{\partial f}{\partial k}$$
$$+\frac{1}{2\,!}\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial h\partial k}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial k^2}\right)+\cdots.$$

De même, pour trois variables, nous trouverions

$$(68)\qquad f(x+h,\ y+k,\ z+l)=f(x,y,z)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$+\frac{1}{2\,!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+l^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right.$$
$$\left.+2lh\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}+2kl\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)+\cdots,$$

et ainsi de suite pour un nombre quelconque de variables.

EXEMPLES

1. Étant donné $f(x,y)\equiv Ax^2+Bxy+Cy^2$, développer $f(x+h,\ y+k)$ suivant les puissances de h et de k.

Solution. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + By, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Bx + 2Cy;$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2C.$$

La dérivée partielle troisième et les dérivées partielles des ordres supérieurs sont toutes nulles.

En substituant dans (67), il vient

$$f(x+h, y+k) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + (2Ax + By)h + (Bx + 2Cy)k$$
$$+ Ah^2 + Bhk + Ck^2. \text{ Rép.}$$

2. Étant donné $f(x, y, z) \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2$, développer $f(x+l, y+m, z+n)$ suivant les puissances de l, m, n.

Solution. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2By, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2Cz;$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2B, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2C, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0.$$

La dérivée partielle troisième et les dérivées partielles des ordres supérieurs sont toutes nulles. En substituant dans (68), on a

$$f(x+l, y+m, z+n) \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Axl + 2Bym + 2Czn$$
$$+ Al^2 + Bm^2 + Cn^2. \text{ Rép.}$$

3. Étant donné $f(x, y) \equiv \sqrt{x} \operatorname{tg} y$, développer $f(x+h, y+k)$ suivant les puissances de h et de k.

4. Étant donné $f(x, y, z) \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx$, développer $f(x+h, y+k, z+l)$ suivant les puissances de h, k, l.

149. Maxima et minima des fonctions de deux variables indépendantes. — On dit que la fonction $f(x, y)$ passe par un *maximum* pour $x = a$, $y = b$ quand $f(a, b)$ est plus grand que $f(x, y)$ pour toutes les valeurs de x et de y dans le voisinage de a et de b. De même, on dit que $f(a, b)$ est un *minimum* pour $x = a$, $y = b$, quand $f(a, b)$ est plus petit que $f(x, y)$ pour toutes les valeurs de x et de y dans le voisinage de a et de b. Ces définitions peuvent être énoncées comme il suit sous forme analytique :

Si, pour toutes les valeurs de h et de k numériquement inférieures à une petite quantité positive,

(A) $f(a+h, b+k) - f(a, b) =$ *un nombre négatif*, $f(a, b)$ est une valeur *maximum* de $f(x, y)$.

Si

(B) $f(a+h, b+k) - f(a, b) =$ *un nombre positif*, $f(a, b)$ est une valeur *minimum* de $f(x, y)$.

Ces propositions peuvent être interprétées géométriquement comme il suit :

Un point P de la surface

$$z = f(x, y)$$

est un point maximum quand il est « plus élevé » que *tous* les autres points de la surface dans son voisinage, le plan de coordonnées XOY étant supposé horizontal (*fig.* 131).

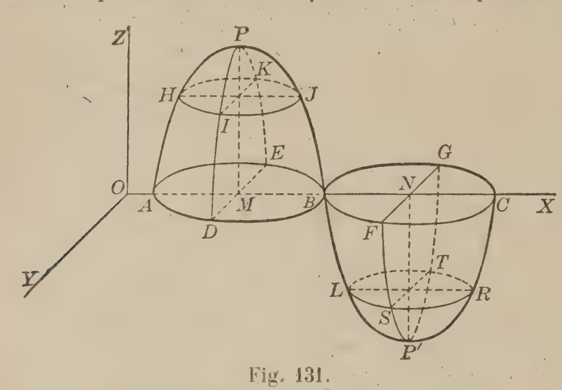


Fig. 131.

De même, P′ est un point minimum de la surface quand il est « plus bas » que *tous* les autres points de la surface dans son voisinage. Il est évident, par suite, que tous les plans verticaux passant par P coupent la surface suivant des courbes telles que APB ou DPE dans la figure 131, chacune d'elles ayant une ordonnée maximum $z(= MP)$ en P.

De même, tous les plans verticaux passant par P′ coupent la surface suivant des courbes telles que BP′C ou FP′G, chacune d'elles ayant une ordonnée minimum $z(= NP')$ en P′. De plus, un contour quelconque, tel que HIJK, découpé sur la surface par un plan horizontal mené dans le voisinage immédiat de P, doit être une petite courbe fermée. De même, nous avons le contour LSRT près du point minimum P′. On a montré aux §§ 81, 82, pp. 121, 122, qu'une condition *nécessaire* pour qu'une fonction d'une variable passe par un maximum ou par un minimum pour une valeur donnée de la variable est que sa dérivée première s'annule pour la valeur donnée de la variable. De même, pour une fonction de deux variables indépendantes, une condition *nécessaire* pour que $f(a, b)$ soit un maximum ou un minimum (c'est-à-dire une valeur critique) est que pour $x = a$, $y = b$,

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Démonstration. — Evidemment les relations (A) et (B) doivent rester vraies quand $k=0$, c'est-à-dire que la différence

$$f(a+h, b)-f(a, b)$$

est toujours négative ou toujours positive pour toutes les valeurs de h suffisamment petites numériquement. D'après les §§ 81, 82, une condition nécessaire pour que ce résultat soit obtenu est que $\frac{d}{dx}f(x, b)$ s'annule pour $x=a$, ou, ce qui revient au même, que $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)$ s'annule pour $x=a$, $y=b$.

De même les relations (A) et (B) doivent rester vraies quand $h=0$, ce qui donne comme seconde condition nécessaire que $\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)$ s'annule pour $x=a$, $y=b$.

Pour déterminer les conditions *suffisantes* pour que $f(a, b)$ soit un maximum ou un minimum, il est nécessaire de recourir aux dérivées d'ordre supérieur. L'établissement des conditions suffisantes pour tous les cas est au-dessus de la portée de cet ouvrage (*). Néanmoins, la discussion suivante suffira pour tous les problèmes donnés dans ce livre.

En développant $f(a+h, b+k)$ d'après le théorème de Taylor, (67), p. 280, où l'on remplace x par a et y par b, nous obtenons

$$\text{(D)} \quad f(a+h, b+k)=f(a, b)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+R,$$

formule dans laquelle les dérivées partielles sont calculées pour $x=a$, $y=b$, et où R désigne la somme de tous les termes non écrits. Tous ces termes sont d'un degré supérieur au second en h et k.

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, d'après (C), p. 282, nous obtenons, après avoir transposé $f(a, b)$,

$$\text{(E)} \quad f(a+h, b+k)-f(a, b)=\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+R.$$

(*) Voir le *Cours d'analyse*, t. I, de C. Jordan.

Si $f(a, b)$ est une valeur critique, l'expression du membre droit de (E) doit garder le même signe pour toutes les valeurs de h et de k suffisamment petites en valeur numérique — le signe négatif pour une valeur maximum [voir (A), p. 281] et le signe positif pour une valeur minimum [voir (B), p. 281] — c'est-à-dire que $f(a, b)$ sera un maximum ou un minimum suivant que le membre de droite de (E) sera négatif ou positif. Or, R est d'un degré supérieur au second en h et en k. Par suite, quand h et k diminuent en valeur numérique, il semble plausible de conclure que *la valeur numérique de* R *deviendra éventuellement et restera plus petite que la valeur numérique de la somme des trois termes du second degré figurant dans le membre droit de* (E) (*). Donc, le signe de ce membre droit (et, par suite, celui du membre gauche également) sera le même que le signe de l'expression

$$\text{(F)} \qquad h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Mais, nous avons vu en Algèbre que l'expression du second degré

$$h^2\mathrm{A} + 2hk\mathrm{C} + k^2\mathrm{B}$$

a toujours le même signe que A (ou B) quand $\mathrm{AB} - \mathrm{C}^2 > 0$.

En appliquant ce résultat à (F),

$$\mathrm{A} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad \mathrm{C} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

et nous voyons que (F), et, par suite, le membre de gauche de (E) également, a le même signe que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\text{ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ quand

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0.$$

D'où la règle suivante **pour trouver les valeurs maxima et minima d'une fonction** $f(x, y)$.

1re opération. Résoudre les équations simultanées

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

(*) Peano a montré que cette conclusion n'est pas toujours valable. Voir l'article sur les *Maxima et minima des Fonctions de plusieurs variables*, par le professeur James Pierpont dans le *Bulletin de la Société américaine de Mathématiques*, t. IV.

2e opération. Calculer, pour ces valeurs de x et de y, la valeur de

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

3e opération. La fonction aura un

maximum si $\Delta > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\text{ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0$;

minimum si $\Delta > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\text{ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) > 0$;

ni maximum ni minimum si $\Delta < 0$.

La question est douteuse si $\Delta = 0$ (*).

Le lecteur devra observer que cette *règle* ne donne pas nécessairement *toutes* les valeurs maxima et minima, car une paire de valeurs de x et de y déterminées d'après la première opération peut annuler Δ et conduire soit à un maximum, soit à un minimum, soit à aucun des deux. Pour des valeurs de ce genre, une discussion plus approfondie est nécessaire. Néanmoins, la règle est suffisante pour résoudre un grand nombre d'exemples importants. La question des maxima et des minima de trois variables indépendantes ou davantage doit être réservée pour des traités plus avancés.

Exemple I. — Examiner la fonction $3axy - x^3 - y^3$ en ce qui concerne ses valeurs maxima et minima.

Solution. $f(x, y) = 3axy - x^3 - y^3$.

1re opération. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3ay - 3x^2 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3ax - 3y^2 = 0$.

En résolvant ces deux équations simultanées, nous obtenons

$$x = 0, \quad x = a,$$
$$y = 0, \quad y = a.$$

2e opération. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3a$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y$.

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 36xy - 9a^2.$$

3e opération. Quand $x = 0$ et $y = 0$, $\Delta = -9a^2$ et il ne peut y avoir ni maximum ni minimum au point (0, 0).

Quand $x = a$ et $y = a$, $\Delta = +27a^2$; et puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6a$, les conditions

(*) La discussion du texte rend simplement plausible la règle donnée. Le lecteur devra observer que le cas de $\Delta = 0$ est omis dans la discussion.

pour qu'il y ait une valeur maximum de la fonction sont remplies en (a, a). En substituant $x = a$ et $y = a$ dans la fonction donnée, nous obtenons a^3 comme valeur maximum.

EXEMPLE II. — Diviser a en trois parties telles que leur produit soit maximum.

Solution. Soit $x =$ la première partie, $y =$ la deuxième partie.

Alors, $a - (x + y) = a - x - y =$ la troisième partie et la fonction à examiner est

$$f(x, y) = x \cdot y \cdot (a - x - y).$$

1re opération. $\frac{\partial f}{\partial x} = ay - 2xy - y^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ax - 2xy - x^2 = 0.$

En résolvant simultanément, nous obtenons comme paire de valeurs $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$ (*).

2e opération. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x;$

$$\Delta = 4xy - (a - 2x - 2y)^2.$$

3e opération. Quand $x = \frac{a}{3}$ et $y = \frac{a}{3}$, $\Delta = \frac{a^2}{3}$ et puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2a}{3}$, on voit que le produit est maximum quand $x = \frac{a}{3}$ et $y = \frac{a}{3}$. Par suite, la troisième partie est également $\frac{a}{3}$ et la valeur maximum du produit est $\frac{a^3}{27}$.

EXEMPLES

1. Trouver la valeur minimum de

$$x^2 + xy + y^2 - ax - by. \qquad \textit{Rép.}\ \frac{1}{3}(ab - a^2 - b^2).$$

2. Montrer que $\sin x + \sin y + \cos(x + y)$ est minimum quand $x = y = \frac{3\pi}{2}$, et maximum quand $x = y = \frac{\pi}{6}$.

3. Montrer que $xe^{y + x \sin y}$ n'a ni maximum ni minimum.

4. Montrer que la valeur maximum de

$$\frac{(ax + by + c)^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

est $a^2 + b^2 + c^2$.

5. Trouver le plus grand parallélépipède rectangle qui puisse être inscrit dans un ellipsoïde, c'est-à-dire trouver la valeur maximum de $8xyz$ (volume) soumis à la condition

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad \textit{Rép.}\ \frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

(*) $x = 0$, $y = 0$ ne sont pas considérés, puisque d'après la nature du problème nous aurions alors un minimum.

NOTE. — Poser $u = xyz$ et substituer la valeur de z tirée de l'équation de l'ellipsoïde. On obtient ainsi

$$u^2 = x^2y^2c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

relation dans laquelle u est une fonction de deux variables seulement.

6. Montrer que la surface d'un parallélépipède rectangle de volume donné est minimum quand le solide est un cube.

7. Examiner $x^4 + y^4 - x^2 + xy - y^2$ en ce qui concerne ses valeurs maxima et minima.

Rép. Maximum quand $x = 0$, $y = 0$;
minimum quand $x = y = \pm \frac{1}{2}$ et quand $x = -y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

8. Montrer que les dimensions les plus économiques pour un réservoir rectangulaire devant contenir un volume donné sont une base carrée et une hauteur égale à la moitié du côté de la base.

9. La constante électrique par rapport au temps d'un rouleau cylindrique de fil de fer est

$$u = \frac{mxyz}{ax + by + cz},$$

formule dans laquelle x est le rayon moyen, y la différence entre les rayons interne et externe, z la longueur axiale et m, a, b, c des constantes connues. Le volume du rouleau est $nxyz = g$. Trouver les valeurs de x, y, z qui rendent u minimum si le volume du rouleau est fixe.

Rép. $ax = by = cz = \sqrt[3]{\frac{abcg}{n}}$.

CHAPITRE XIX

ASYMPTOTES. POINTS SINGULIERS

150. Asymptotes rectilignes. — Une *asymptote* à une courbe est la position limite (*) d'une tangente dont le point de contact est rejeté à une distance infinie de l'origine (**). Ainsi, dans l'hyperbole (*fig.* 132), l'asymptote AB est la position limite de la tangente PT quand le point de contact P se déplace vers la droite à une distance infinie. Dans le cas des courbes algébriques, la définition suivante est utile : une asymptote est la position limite d'une sécante lorsque deux points d'intersection de cette sécante avec une branche de la courbe se déplacent dans la même direction le long de cette branche, à une distance infinie. Par exemple, l'asymptote AB est la position limite de la sécante PQ quand P et Q se déplacent vers le haut à une distance infinie (*fig.* 132).

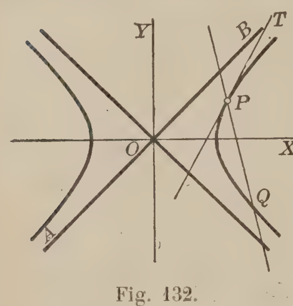


Fig. 132.

151. Asymptotes trouvées par la méthode des limites des portions interceptées sur les axes. — L'équation de la tangente à une courbe en (x_1, y_1), est, d'après (1), p. 85,

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1).$$

En posant d'abord $y = 0$ et en résolvant par rapport à x, en posant ensuite $x = 0$ et en résolvant par rapport à y, en désignant

(*) Une ligne qui tend vers une ligne droite fixe comme position limite ne peut pas être entièrement à l'infini ; d'où il suit qu'une asymptote doit passer à une distance finie de l'origine. Il est évident qu'une courbe qui n'a aucune branche infinie ne peut avoir d'asymptote réelle.

(**) Ou, d'une façon moins précise, une asymptote à une courbe est quelquefois définie comme une tangente dont le point de contact est à une distance infinie.

enfin les portions interceptées sur OX et sur OY respectivement par x_i et y_i, nous obtenons

$$x_i = x_1 - y_1 \frac{dx_1}{dy_1} = \textit{portion interceptée sur } \mathrm{OX}\,;$$

$$y_i = y_1 - x_1 \frac{dy_1}{dx_1} = \textit{portion interceptée sur } \mathrm{OY}.$$

Puisqu'une asymptote doit passer à une distance finie de l'origine, une de ces portions interceptées ou toutes les deux à la fois doivent tendre vers des valeurs finies comme limites quand le point de contact (x_1, y_1) s'éloigne à une distance infinie. Si

$$\text{limite}\,(x_i) = a \qquad \text{et} \qquad \text{limite}\,(y_i) = b,$$

on trouve alors l'équation de l'asymptote en substituant les valeurs limites a et b dans l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Si une de ces limites existe seulement, et que

$$\text{limite}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right) = m,$$

nous avons alors une seule portion interceptée avec la pente donnée, de sorte que l'équation de l'asymptote est

$$y = mx + b, \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{y}{m} + a.$$

Exemple. — Trouver les asymptotes de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solution.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y} = \pm \frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}},$$

et
$$m = \underset{x=\infty}{\text{limite}} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \pm \frac{b}{a}.$$

On a aussi

$$x_i = \frac{a^2}{x} \qquad \text{et} \qquad y_i = -\frac{b^2}{y};$$

par suite, ces portions interceptées sont nulles quand $x = y = \infty$. Par conséquent, les asymptotes passent par l'origine (voir figure 132) et leurs équations sont

$$y - 0 = \pm \frac{b}{a}(x - 0x), \qquad \text{ou} \qquad ay = \pm bx. \qquad \textit{Réponse.}$$

Cette méthode est souvent trop compliquée pour être d'un usage pratique. La méthode la plus commode pour déterminer les asymptotes aux courbes algébriques sera exposée dans le paragraphe suivant.

152. Méthode pour déterminer les asymptotes aux courbes algébriques. — Soit une équation algébrique entre deux variables,

$$\text{(A)} \qquad f(x, y) = 0.$$

Si après avoir chassé les dénominateurs et fait disparaître les radicaux, cette équation est de degré n, elle peut être ordonnée suivant les puissances décroissantes de l'une des variables, soit y, sous la forme

$$\text{(B)} \qquad ay^n + (bx + c)y^{n-1} + (dx^2 + ex + f)y^{n-2} + \cdots = 0 \text{ (*)}.$$

Pour une valeur donnée de x, cette équation détermine en général n valeurs de y.

1[er] CAS. **Détermination des asymptotes à la courbe (B), parallèles aux axes de coordonnées.** — Cherchons d'abord les asymptotes parallèles à OY. L'équation d'une de ces asymptotes est de la forme

$$\text{(C)} \qquad x = k,$$

et il doit y avoir deux points d'intersection avec (B) ayant des ordonnées infinies.

1° Supposons que a ne soit pas nul dans (B), c'est-à-dire que le terme en y^n existe. Alors, pour une valeur finie quelconque de x, (B) donne n valeurs de y, *toutes finies*. Par suite, toutes les lignes telles que (C) couperont (B) en des points ayant des ordonnées finies, et *il n'y aura aucune asymptote parallèle à* OY.

2° Supposons ensuite $a = 0$, mais b et c non nuls. Nous avons vu en algèbre que dans ce cas, une seule racine ($= y$) de (B) est infinie pour toute valeur finie de x, c'est-à-dire que toute ligne arbitraire

(*) Pour se servir de ce paragraphe, l'attention du lecteur est appelée sur le théorème d'Algèbre suivant :

Étant donnée une équation algébrique de degré n,

$$Ay^n + By^{n-1} + Cy^{n-2} + Dy^{n-3} + \cdots = 0,$$

quand A tend vers zéro, une racine (valeur de y) tend vers l'∞ ;
quand A et B tendent vers zéro, deux racines tendent vers l'∞ ;
quand A, B et C tendent vers zéro, trois racines tendent vers l'∞, etc.

quelconque (C) coupe (B) en un point seulement ayant une ordonnée infinie. Si, de plus,

$$bx + c = 0,$$

ou (D) $$x = -\frac{c}{b},$$

alors les deux premiers termes de (B) disparaissent et, par suite, deux de ses racines sont infinies, c'est-à-dire que (D) et (B) se coupent en deux points ayant des ordonnées infinies. Par conséquent (D) *est l'équation d'une asymptote à* (B) *qui est parallèle à* OY.

3° Si $a = b = c = 0$, il y a deux valeurs de x qui rendent, dans (B), y infinie, savoir, celles qui satisfont à l'équation

(E) $$dx^2 + ex + f = 0.$$

En résolvant (E) *par rapport à* x, *nous obtenons deux asymptotes parallèles à* OY et ainsi de suite, en général.

De même, en ordonnant $f(x, y)$ suivant les puissances décroissantes de x, nous pouvons trouver les asymptotes parallèles à OX. D'où la **règle** suivante **pour trouver les asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.**

1re opération. Égaler à zéro le coefficient de la plus haute puissance de x dans l'équation. On obtient ainsi toutes les asymptotes parallèles à OX.

2e opération. Égaler à zéro le coefficient de la plus haute puissance de y dans l'équation. On obtient ainsi toutes les asymptotes parallèles à OY.

Note. *Naturellement, si un de ces coefficients ou tous les deux à la fois ne contiennent pas x (ou y) ils ne peuvent s'annuler et il n'y a pas d'asymptote correspondante.*

Exemple I. — Trouver les asymptotes à la courbe $a^2x = y(x - a)^2$.

Solution. En ordonnant les termes suivant les puissances décroissantes de x, il vient

$$yx^2 - (2ay + a^2)x + a^2y = 0.$$

En égalant à 0 le coefficient de la plus haute puissance de x, nous obtenons $y = 0$ comme asymptote parallèle à OX. En fait, l'asymptote coïncide avec l'axe des x. En ordonnant les termes suivant les puissances décroissantes de y, il vient

$$(x - a)^2y - a^2x = 0.$$

En égalant à zéro le coefficient de y, nous obtenons $x = a$ deux fois, ce qui

montre que AB (*fig.* 133) est une asymptote double parallèle à OY. Si on examinait cette courbe en ce qui concerne les asymptotes obliques aux axes, par la méthode expliquée ci-dessous, on verrait qu'il n'y en a pas. Par suite, $y=0$ et $x=a$ sont les seules asymptotes de la courbe donnée.

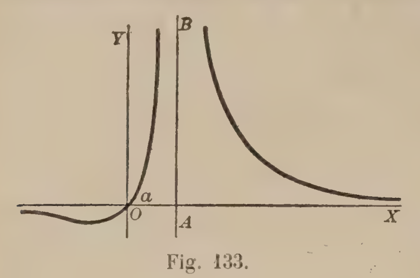


Fig. 133.

2ᵉ cas. **Détermination des asymptotes obliques aux axes de coordonnées.** — Étant donnée l'équation algébrique

$$\text{(F)} \qquad f(x, y) = 0$$

et la ligne droite

$$\text{(G)} \qquad y = mx + k,$$

on demande de déterminer m et k de telle sorte que la ligne (G) soit asymptote à la courbe (F).

Puisqu'une asymptote est la position limite d'une sécante lorsque deux points d'intersection sur la même branche de la courbe sont rejetés à une distance infinie, si nous éliminons y entre (F) et (G), l'équation résultante en x, savoir

$$\text{(H)} \qquad f(x, mx + k) = 0,$$

doit avoir deux racines infinies, ce qui exige que les coefficients des deux plus hautes puissances de x s'annulent. En égalant à zéro ces coefficients, nous obtenons deux équations qui permettent de déterminer les valeurs cherchées de m et de k. La substitution de ces valeurs dans (G) donne l'équation d'une asymptote. D'où la **règle** suivante **pour trouver les asymptotes obliques aux axes de coordonnées :**

1ʳᵉ opération. Remplacer y par $mx+k$ dans l'équation donnée et développer.

2ᵉ opération. Ordonner les termes suivant les puissances décroissantes de x.

3ᵉ opération. Égaler à zéro les coefficients des deux plus hautes puissances (*) de x et résoudre par rapport à m et à k.

(*) Si le terme contenant x^{n-1} manque ou si la valeur de m obtenue en égalant à zéro le premier coefficient annule le second coefficient, en égalant à zéro les coefficients de x^n et de x^{n-2}, nous obtenons deux équations qui permettent de trouver les valeurs de m et de k. Dans ce cas, nous

4e opération. Substituer ces valeurs de m et de k dans

$$y = mx + k,$$

ce qui donne les asymptotes cherchées.

EXEMPLE II. — Examiner $y^3 = 2ax^2 - x^3$ en ce qui concerne les asymptotes.

Solution. Puisque aucun des termes ne renferme à la fois x et y, il est évident qu'il n'y a pas d'asymptotes parallèles aux axes de coordonnées. Pour trouver les asymptotes obliques, éliminons y entre l'équation donnée et $y = mx + k$. On obtient ainsi

$$(mx + k)^3 = 2ax^2 - x^3$$

et, en ordonnant les termes suivant les puissances décroissantes de x, il vient

$$(1 + m^3)x^3 + (3m^2k - 2a)x^2 + 3k^2mx + k^3 = 0.$$

En égalant à zéro les deux premiers coefficients, nous avons

$$1 + m^3 = 0 \quad \text{et} \quad 3m^2k - 2a = 0.$$

En résolvant, nous obtenons

$$m = -1, \quad k = \frac{2a}{3}.$$

En substituant dans $y = mx + k$, nous avons

$$y = -x + \frac{2a}{3},$$

qui est l'équation de l'asymptote AB (*fig.* 134).

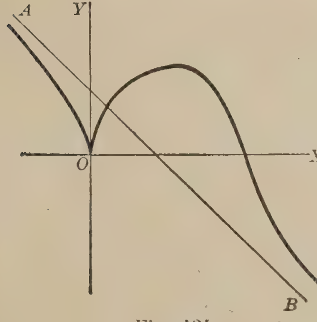


Fig. 134.

EXEMPLES

Examiner les huit premières courbes au point de vue des asymptotes par la méthode du § 150 et les suivantes par la méthode du § 151 :

1. $y = e^x$. *Rép.* $y = 0$.
2. $y = e^{-x^2}$. $y = 0$.
3. $y = \log x$. $x = 0$.
4. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. $y = e$, $x = -1$.
5. $y = \operatorname{tg} x$. n étant un nombre entier impair quelconque, $x = \frac{n\pi}{2}$.
6. $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$. $x = 0$, $y = 0$.
7. $y^3 = 6x^2 + x^3$. $y = x + 2$.
8. Montrer que la parabole n'a pas d'asymptotes.
9. $y^3 = a^3 - x^3$. $y + x = 0$.

---

obtiendrons, en général, deux valeurs de k pour chaque valeur de m, c'est-à-dire des paires d'asymptotes obliques parallèles. De même, si le terme en x^{n-2} manque également, chaque valeur de m fournira trois asymptotes obliques parallèles, et ainsi de suite.

10. La cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$. *Rép.* $x = 2r$.
11. $y^2 a = y^2 x + x^3$. $x = a$.
12. $y^2(x^2 + 1) = x^2(x^2 - 1)$. $y = \pm x$.
13. $y^2(x - 2a) = x^3 - a^3$. $x = 2a,\ y = \pm (x + a)$.
14. $x^2 y^2 = a^2(x^2 + y^2)$. $x = \pm a,\ y = \pm a$.
15. $y(x^2 - 3bx + 2b^2) = x^3 - 3ax^2 + a^3$. $x = b,\ x = 2b,\ y + 3a = x + 3b$.
16. $y = c + \frac{a^3}{(x - b)^2}$. $y = c,\ x = b$.
17. Le folium $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. $y + x + a = 0$.
18. La cubique d'Agnesi $x^2 y = 4a^2(2a - y)$. $y = 0$.
19. $xy^2 + x^2 y = a^3$. $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 0$.
20. $x^3 + 2x^2 y - xy^2 - 2y^3 + 4y^2 + 2xy + y = 1$. $x + 2y = 0,\ x + y = 1,\ x - y = -1$.

153. Asymptotes en coordonnées polaires. — Soit $f(\rho, \theta) = 0$ l'équation de la courbe PQ ayant pour asymptote CD (*fig.* 135). Comme l'asymptote doit passer à une distance finie (telle que OE) de l'origine et que le point de contact est à une distance infinie, il est évident que le rayon vecteur OF mené par le point de contact est parallèle à l'asymptote et que la sous-tangente OE lui est perpendiculaire ; d'une façon plus précise, la distance de l'asymptote à l'origine est la valeur limite de la sous-tangente polaire quand le point de contact est rejeté à l'infini.

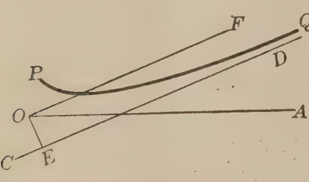


Fig. 135.

Pour déterminer les asymptotes à une courbe en coordonnées polaires, on procède comme il suit :

1re *opération. Trouver en partant de l'équation de la courbe les valeurs de θ qui donnent $\rho = \infty$ (*). Ces valeurs de θ donnent les directions des asymptotes.*

2e *opération. Trouver la limite de la sous-tangente polaire*

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}, \qquad \text{d'après (7), p. 96,}$$

quand θ tend vers chacune de ces valeurs, en se rappelant que ρ tend vers l'∞ en même temps.

(*) Si l'équation peut être écrite sous la forme d'un polynome en ρ, ces valeurs de θ peuvent être trouvées en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de ρ.

3e opération. Si la valeur limite de la sous-tangente polaire est finie, il y a une asymptote correspondante à cette distance de l'origine et parallèle au rayon vecteur mené par le point de contact. Quand cette limite est positive, l'asymptote est à droite de l'origine, et quand elle est négative, l'asymptote est à gauche, quand on regarde dans la direction du rayon vecteur infini.

EXEMPLES

1. Examiner la spirale hyperbolique $\rho = \frac{a}{\theta}$ au point de vue des asymptotes (*fig.* 136).

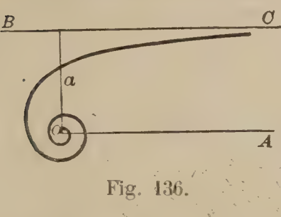


Fig. 136.

Solution. Quand $\theta = 0$, $\rho = \infty$.

On a également $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2}$.

Par suite,

$$\text{sous-tangente} = \rho^2\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{a^2}{\theta^2}\left(-\frac{\theta^2}{a}\right) = -a\,;$$

$$\underset{\theta=0}{\text{limite}}\left[\rho^2\frac{d\theta}{d\rho}\right] = -a = \text{quantité finie.}$$

Il arrive dans ce cas que la sous-tangente est la même pour toutes les valeurs de θ. La courbe a, par conséquent, une asymptote BC parallèle à l'axe polaire OA et à une distance a au-dessus de lui.

Examiner les courbes suivantes au point de vue des asymptotes :

2. $\rho \cos\theta = a \cos 2\theta$.

Réponse. Il y a une asymptote perpendiculaire à l'axe polaire et à une distance a à gauche de l'origine.

3. $\rho = a \operatorname{tg}\theta$.

Réponse. Il y a deux asymptotes perpendiculaires à l'axe polaire et à une distance a de chaque côté de l'origine.

4. Le lituus $\rho\theta^{\frac{1}{2}} = a$. *Rép.* L'axe polaire.

5. $\rho = a \sec 2\theta$.

Rép. Il y a quatre asymptotes à la même distance $\frac{a}{2}$ de l'origine et inclinées à 45° sur l'axe polaire.

6. $(\rho - a)\sin\theta = b$.

Rép. Il y a une asymptote parallèle à l'axe polaire à la distance b au-dessus de lui.

7. $\rho = a(\sec 2\theta + \operatorname{tg} 2\theta)$.

Rép. Deux asymptotes parallèles à $\theta = \frac{\pi}{4}$, à la distance a de chaque côté de l'origine.

8. Montrer que l'axe polaire est asymptote aux deux branches de la courbe $\rho^2 \sin\theta = a^2 \cos 2\theta$.

9. La parabole $\rho = \frac{a}{1 - \cos\theta}$. *Rép.* Il n'y a aucune asymptote.

154. Points singuliers. — Soit une courbe dont l'équation est

$$f(x, y)=0.$$

Tout point de la courbe pour lequel

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

est appelé un *point singulier*. Tous les autres points sont appelés des *points ordinaires*. Puisque d'après (57 *a*), p. 230, nous avons

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

il est évident qu'en un point singulier la direction de la courbe (ou de la tangente) est indéterminée, car la pente prend la forme $\frac{0}{0}$. Dans le prochain paragraphe nous montrerons comment on peut trouver les tangentes en ces points.

155. Détermination de la tangente à une courbe algébrique en un point donné par simple examen. — Si nous transformons l'équation donnée en prenant de nouveaux axes de coordonnées parallèles aux premiers et ayant pour origine le point en question de la courbe, nous savons que la nouvelle équation n'aura pas de terme constant. Par suite, on peut l'écrire sous la forme

$$\text{(A)} \quad \begin{aligned} f(x, y) &= ax+by+(cx^2+dxy+ey^2) \\ &+(fx^3+gx^2y+hxy^2+iy^3)+\cdots=0. \end{aligned}$$

L'équation d'une tangente à la courbe au point donné (maintenant l'origine) est

$$\text{(B)} \qquad y=\left(\frac{dy}{dx}\right)x, \qquad \text{d'après (1), p. 85.}$$

Soit $y=mx$ l'équation d'une ligne passant par l'origine et un second point P du lieu de (A). Quand P tend vers O en se déplaçant le long de la courbe, nous avons, d'après (B),

$$\text{(C)} \qquad \text{limite } m=\frac{dy}{dx}.$$

Soit O un point ordinaire. Alors, d'après le § 155, a et b ne s'annulent pas à la fois puisque au point (0, 0), d'après (A), p. 296,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=b.$$

Remplaçons y dans (A) par mx, divisons par le facteur x et faisons tendre x vers zéro. Alors (A) deviendra (*)

$$a+bm=0.$$

Par suite, nous avons d'après (B) et (C),

$$ax+by=0,$$

qui est l'équation de la tangente. On voit que le membre de gauche se compose des termes du 1er degré de l'équation (A).

Quand O n'est pas un point ordinaire, nous avons $a=b=0$. Supposons que c, d, e ne s'annulent pas tous. Alors, en opérant comme ci-dessus (excepté que nous divisons par le facteur x^2), nous trouvons, en faisant tendre x vers zéro, que (A) devient

$$c+dm+em^2=0,$$

ou, d'après (C),

$$\text{(D)} \qquad c+d\left(\frac{dy}{dx}\right)+e\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

En substituant d'après (B), nous voyons que

$$\text{(E)} \qquad cx^2+dxy+ey^2=0$$

est l'équation du couple des tangentes à l'origine. On remarque que le membre de gauche se compose des termes du second degré de l'équation (A). Un tel point singulier de la courbe est appelé un *point double*, du fait qu'il y a deux tangentes à la courbe en ce point.

Puisqu'au point (0, 0), d'après (A),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2c, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=d, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2e,$$

(*) Après avoir divisé par x il reste une équation algébrique en m dont les coefficients sont des fonctions de x. Si maintenant x tend vers 0 comme limite, le théorème d'après lequel une racine de cette équation en m tend vers la limite $-\frac{a}{b}$ est valable.

il est évident que (D) peut s'écrire sous la forme

$$(F) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

De même, si

$$a = b = c = d = e = 0,$$

il y a un *point triple* à l'origine, l'équation des trois tangentes étant

$$fx^3 + gx^2y + hxy^2 + iy^3 = 0,$$

et ainsi de suite, en général.

Si nous voulons examiner l'aspect d'une courbe en un point donné, il est d'une importance fondamentale de résoudre le problème de la tangente par rapport à ce point. Les résultats qui précèdent montrent qu'on peut le faire *par simple examen,* après avoir transporté l'origine en ce point.

Par suite, nous avons la **règle** suivante **pour trouver les tangentes en un point donné.**

1re opération. Transporter l'origine au point en question.

2e opération. Ordonner les termes de l'équation résultante suivant les puissances ascendantes de x et de y.

3e opération. Égaler à zéro les termes de moindre degré. On obtient ainsi l'équation des tangentes en ce point (l'origine).

Exemple I. — Trouver l'équation de la tangente à l'ellipse

$$5x^2 + 5y^2 + 2xy - 12x - 12y = 0$$

à l'origine (*fig.* 137).

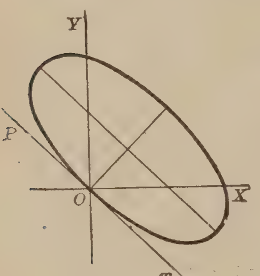


Fig. 137.

Solution. Égalons à zéro les termes de moindre degré (premier); nous obtenons

$$-12x - 12y = 0,$$

ou $\quad x + y = 0,$

qui est l'équation de la tangente PT à l'origine.

Exemple II. — Examiner la courbe

$$3x^2 - xy - 2y^2 + x^3 - 8y^3 = 0$$

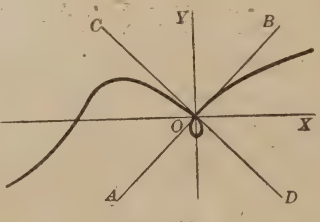


Fig. 138.

au point de vue des tangentes à l'origine (*fig.* 138).

Solution. Égalons à zéro les termes de moindre degré (second), nous obtenons

$$3x^2 - xy - 2y^2 = 0,$$

ou

$$(x - y)(3x + 2y) = 0,$$

$x - y = 0$ étant l'équation de la tangente AB et $3x + 2y = 0$ l'équation de la tangente CD. L'origine est donc un point double de la courbe.

Puisque les racines de l'équation du second degré (F), p. 298, savoir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

peuvent être réelles et inégales, réelles et égales, ou imaginaires, il y a trois cas à considérer pour les points doubles, suivant que

$$\text{(G)} \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

est positif, nul ou négatif (voir 3, p. 1).

156. Nœuds. $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0.$

Dans ce cas, il y a deux valeurs réelles et inégales de la pente $\left(= \frac{dy}{dx}\right)$ tirées de (F), de sorte que nous avons deux tangentes réelles distinctes à la courbe au point singulier en question, ce qui signifie que la courbe passe par le point suivant deux directions différentes, ou, en d'autres termes, que deux branches de la courbe se croisent en ce point. Un point singulier de cette nature est appelé un *point double réel* de la courbe, ou *nœud*.

Par suite, les conditions satisfaisant à un nœud sont:

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0.$$

EXEMPLE. — Examiner la lemniscate

$$y^2 = x^2 - x^4$$

en ce qui concerne les points singuliers (*fig.* 139).

Fig. 139.

Solution. Ici $f(x, y) = y^2 - x^2 + x^4 = 0.$

On a également

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 4x^3 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0.$$

Le point (0, 0) est un point singulier, puisque ses coordonnées satisfont aux trois équations ci-dessus.

Nous avons en (0, 0)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

d'où
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4,$$

et l'origine est un point double (nœud) par lequel passent deux branches de la courbe dans des directions différentes. En égalant à zéro les termes de moindre degré (second), nous obtenons $y^2 - x^2 = 0$ ou $y = x$ et $y = -x$, relations qui sont les équations des deux tangentes AB et CD au point singulier ou nœud (0, 0).

157. Points de rebroussement. $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

Dans ce cas, il y a deux valeurs réelles et égales de la pente tirées de (F). Par suite, les deux tangentes coïncident, ce qui signifie que les deux branches de la courbe qui passent par le point sont tangentes. Quand la courbe s'éloigne de la tangente dans les deux directions à partir du point de tangence, le point singulier est appelé *point d'osculation* (*fig.* 140) ; si elle s'éloigne du point de tangence dans une seule direction, on appelle le point singulier un *point de rebroussement*. Il y a deux espèces de points de rebroussement.

Première espèce. Quand les deux branches sont de part et d'autre de la tangente commune (*fig.* 141).

Seconde espèce. Quand les deux branches sont du même côté de la tangente commune (*) (*fig.* 142).

Les exemples suivants montrent comment nous pouvons déterminer la nature des points singuliers visés dans ce paragraphe.

EXEMPLE 1. — Examiner $a^4y^2 = a^2x^4 - x^6$ au point de vue des points singuliers (*fig.* 140).

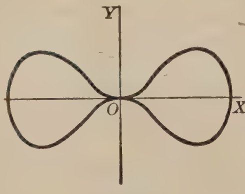


Fig. 140.

Solution. Ici $f(x, y) = a^4y^2 - a^2x^4 + x^6 = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4a^2x^3 + 6x^5 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a^4y = 0,$$

et (0, 0) est un point singulier puisqu'il satisfait aux trois équations ci-dessus. Nous avons également au point (0, 0)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a^4;$$

d'où
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0;$$

et puisque la courbe est symétrique par rapport à OY, l'origine est un point

(*) Dans le voisinage du point singulier.

d'osculation. En égalant à zéro les termes de moindre degré (second), nous obtenons $y^2=0$, ce qui montre que les deux tangentes communes coïncident avec OX.

Exemple II. — Examiner $y^2=x^3$ en ce qui concerne les points singuliers (*fig.* 141).

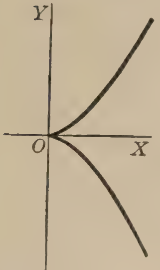


Fig. 141.

Solution. Ici $f(x, y) = y^2 - x^3 = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0,$$

ce qui montre que (0, 0) est un point singulier.

Au point (0, 0), nous avons également

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Cependant, l'origine n'est pas un point d'osculation, car si nous résolvons l'équation donnée par rapport à y, nous obtenons

$$y = \pm\sqrt{x^3},$$

ce qui montre que la courbe s'étend à droite de OY seulement, car des valeurs négatives de x rendent y imaginaire.

L'origine est, par conséquent, un point de rebroussement, et puisque les branches se trouvent de chaque côté de la tangente commune, c'est un point de rebroussement de première espèce. En égalant à zéro les termes de moindre degré (second), nous obtenons $y^2=0$, ce qui montre que les deux tangentes communes coïncident avec OX.

Exemple III. — Examiner $(y - x^2)^2 = x^5$ en ce qui concerne les points singuliers.

Solution. En procédant comme dans le dernier exemple, nous trouvons un point de rebroussement au point (0, 0); les tangentes communes aux deux branches coïncident avec OX. En résolvant par rapport à y, il vient

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}.$$

Fig. 142.

Si nous donnons à x une valeur quelconque entre 0 et 1, y prend deux valeurs positives différentes, ce qui montre que dans le voisinage de l'origine les deux branches sont au-dessus de la tangente commune. Par suite, le point singulier (0, 0) est un point de rebroussement de seconde espèce.

158. Points conjugués ou isolés. $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0.$

Dans ce cas, les valeurs de la pente sont imaginaires. Par suite, il n'y a pas de tangentes réelles. Le point singulier est l'intersection réelle des branches imaginaires de la courbe et les coordonnées d'aucun

autre point réel dans le voisinage immédiat ne satisfont à l'équation de la courbe. Un tel point est appelé *point conjugué* ou *isolé*.

EXEMPLE. — Examiner la courbe $y^2 = x^3 - x^2$ en ce qui concerne les points singuliers.

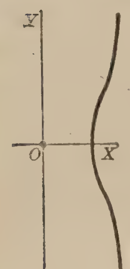


Fig. 143.

Solution. Ici (0, 0) est un point singulier de la courbe pour lequel

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-1}.$$

Par suite, l'origine est un point isolé. En résolvant l'équation par rapport à y, il vient

$$y = \pm x\sqrt{x-1},$$

ce qui montre clairement que l'origine est un point isolé de la courbe, car aucune valeur de x comprise entre 0 et 1 ne donne de valeurs réelles pour y.

159. Singularités transcendantes. — Une courbe dont l'équation comprend des fonctions transcendantes est appelée une courbe transcendante. Une telle courbe peut avoir un *point d'arrêt* où elle se termine brusquement, cet arrêt brusque étant dû à une discontinuité de la fonction (*fig.* 144) ; ou un *point anguleux* auquel se terminent les deux branches de la courbe sans avoir de tangente commune, ce point étant dû à une discontinuité de la dérivée (*fig.* 145).

EXEMPLE I. — Montrer que $y = x \log x$ a un point d'arrêt à l'origine.

Solution. x ne peut être négatif, puisque les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes. Par suite, la courbe s'étend seulement à droite de OY (*fig.* 144). Quand $x = 0$, $y = 0$. Comme il n'y a qu'une valeur de y pour chaque valeur positive de x, la courbe se compose d'une seule branche se terminant à l'origine, laquelle est par suite un point d'arrêt.

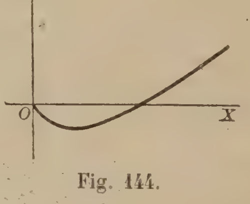
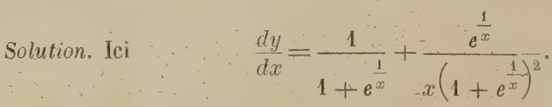


Fig. 144.

EXEMPLE II. — Montrer que $y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ a un point anguleux à l'origine (*fig.* 145).



Solution. Ici
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}.$$

Si x est positif et tend vers zéro comme limite, nous obtenons finalement

$$y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Si x est négatif et tend vers zéro comme limite, nous obtenons finalement

$$y=0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx}=1.$$

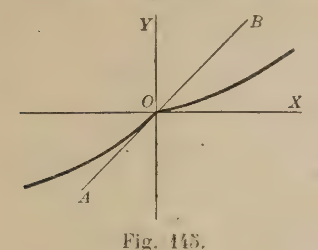


Fig. 145.

Par suite, les deux branches se rencontrent à l'origine, l'une ayant OX comme tangente et l'autre AB, cette dernière faisant un angle de 45° avec OX.

EXEMPLES

1. Montrer que $y^2=2x^2+x^3$ a un nœud à l'origine, les pentes des tangentes étant $\pm\sqrt{2}$.

2. Montrer que l'origine est un nœud de $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$ et que les tangentes sont bissectrices des angles formés par les axes.

3. Démontrer que $(a, 0)$ est un nœud de $y^2=x(x-a)^2$ et que les pentes des tangentes sont $\pm\sqrt{a}$.

4. Démontrer que $a^3y^2-2abx^2y-x^5=0$ a un point d'osculation à l'origine.

5. Montrer que la courbe $y^2=x^5+x^4$ a un point d'osculation à l'origine.

6. Montrer que la cissoïde $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ a un point de rebroussement de première espèce à l'origine.

7. Montrer que $y^3=2ax^2-x^3$ a un point de rebroussement de première espèce à l'origine.

8. Dans la courbe $(y-x^2)^2=x^n$, montrer que l'origine est un point de rebroussement de première ou de seconde espèce suivant que n est $<$ ou $>$ 4.

9. Démontrer que la courbe $x^4-2ax^2y-axy^2+a^2y^2=0$ a un point de rebroussement de seconde espèce à l'origine.

10. Montrer que l'origine est un point isolé de la courbe $y^2(x^2-a^2)=x^2$.

11. Montrer que la courbe $y^2=x(a+x)^2$ a un point isolé en $(-a, 0)$.

12. Montrer que l'origine est un point isolé de la courbe $ay^2-x^3+bx^2=0$ quand a et b ont le même signe, et un nœud quand ils ont des signes opposés.

13. Montrer que la courbe $x^4+2ax^2y-ay^3=0$ a un point triple à l'origine et que les pentes des tangentes sont 0, $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

14. Montrer que les points d'intersection de la courbe $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ avec les axes sont des points de rebroussement de première espèce.

15. Montrer qu'il n'y a aucune courbe du second ou du troisième degré en x et y ayant un point de rebroussement de seconde espèce.

16. Montrer que $y=e^{-\frac{1}{x}}$ a un point d'arrêt à l'origine.

17. Montrer que $y=x \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ a un point anguleux à l'origine, les pentes des tangentes étant $\pm\frac{\pi}{2}$.

CHAPITRE XX

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

160. Tangente et plan normal à une courbe gauche dont les équations sont données sous forme paramétrique. — Le lecteur est déjà familiarisé avec la représentation paramétrique d'une courbe plane. Pour étendre cette notion aux courbes dans l'espace, supposons que les coordonnées d'un point quelconque P(x, y, z) d'une courbe gauche (*fig.* 146) soient données comme fonction d'une quatrième variable que nous désignerons par t; ainsi

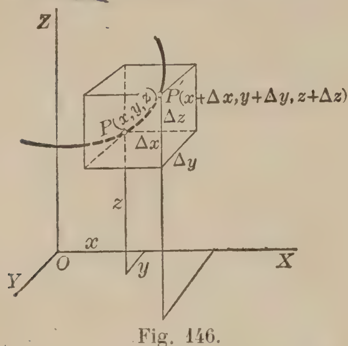


Fig. 146.

$$\text{(A)} \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad z = \chi(t).$$

L'élimination du paramètre t entre ces équations deux à deux nous donnera les équations des cylindres de projection de la courbe sur les plans de coordonnées.

Soit le point P(x, y, z) correspondant à la valeur t du paramètre et le point P'($x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$) correspondant à la valeur $t+\Delta t$, Δx, Δy, Δz étant les accroissements de x, y, z dus à l'accroissement Δt trouvés d'après les équations (A). D'après la géométrie analytique à trois dimensions nous savons que les cosinus directeurs de la sécante (diagonale) PP' sont proportionnels à

$$\Delta x, \qquad \Delta y, \qquad \Delta z;$$

ou, en divisant par Δt et en désignant les angles de direction de la sécante par α', β', γ',

$$\frac{\cos\alpha'}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\cos\beta'}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{\cos\gamma'}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Maintenant, faisons tendre P' vers P le long de la courbe. Alors Δt et par suite Δx, Δy, Δz tendront vers zéro comme limite, la sécante

PP′ tendra vers la tangente à la courbe au point P comme position limite et nous aurons

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos\beta}{\frac{dy}{dt}}=\frac{\cos\gamma}{\frac{dz}{dt}},$$

relation dans laquelle α, β, γ sont les angles de direction de la tangente (ou de la courbe) au point P. Par suite, *les équations de la tangente à la courbe*

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t),\qquad z=\chi(t)$$

au point (x, y, z) *sont données par*

$$\text{(69)}\qquad \frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}},$$

et l'équation du plan normal, c'est-à-dire du plan passant par (x, y, z) *perpendiculairement à la tangente est*

$$\text{(70)}\qquad \frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0,$$

X, Y, Z *étant les coordonnées variables.*

Exemple. — Trouver les équations de la tangente et l'équation du plan normal à l'hélice (*) (θ étant le paramètre)

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=b\theta, \end{cases}$$

(*a*) en un point quelconque ; (*b*) quand $\theta=2\pi$ (*fig.* 147).

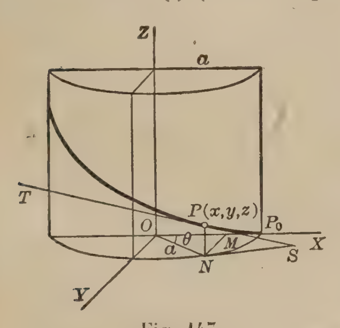


Fig. 147.

Solution. $\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta=-y,$

$$\frac{dy}{d\theta}=a\cos\theta=x,\qquad \frac{dz}{d\theta}=b.$$

En substituant dans (69) et dans (70), nous obtenons pour le point (x, y, z)

$$\frac{X-x}{-y}=\frac{Y-y}{x}=\frac{Z-z}{b},\text{ pour la tangente,}$$

et $-y(X-x)+x(Y-y)+b(Z-z)=0$, pour le plan normal.

(*) L'hélice peut être définie comme étant une courbe tracée sur un cylindre circulaire droit de façon à couper toutes les génératrices sous le même angle.

Prenons OZ comme axe du cylindre et le point de départ sur OX en P_0. Soit a le rayon de base du cylindre et θ l'angle de rotation. Par définition,

$$\frac{PN}{SN}=\frac{PN}{\text{arc } P_0N}=\frac{z}{a\theta}=k\text{ (constante)},\quad\text{ou}\quad z=ak\theta.$$

Soit $ak=b$; alors $z=b\theta$. On a également $y=MN=a\sin\theta$, $x=OM=a\cos\theta$.

Quand $\theta = 2\pi$, le point de contact est $(a, 0, 2b\pi)$, ce qui donne

$$\frac{X-a}{0} = \frac{Y-0}{a} = \frac{Z-2b\pi}{b},$$

ou $$X = a, \quad bY = aZ - 2ab\pi$$

comme équations de la tangente, et

$$aY + bZ - 2b^2\pi = 0$$

comme équation du plan normal.

EXEMPLES

Trouver les équations de la tangente et l'équation du plan normal à chacune des courbes gauches ci-après, au point indiqué :

1. $x = 2t,\ y = t^2,\ z = 4t^4;\ t = 1.$ *Rép.* $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{16};$ $x + y + 8z - 35 = 0.$

2. $x = t^2 - 1,\ y = t + 1,\ z = t^3;\ t = 2.$ *Rép.* $\frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-8}{12};$ $4x + y + 12z - 111 = 0.$

3. $x = t^3 - 1,\ y = t + t^2,\ z = 4t^3 - 3t + 1;\ t = 1.$ *Rép.* $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{9};$ $x + y + 3z - 8 = 0.$

4. $x = t,\ y = \sin t,\ z = \cos t;\ t = \frac{\pi}{4}.$ *Rép.* $\frac{4x-\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}y-1}{1} = \frac{\sqrt{2}z-1}{-1};$ $16x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z - 4\pi = 0.$

5. $x = at,\ y = bt^2,\ z = ct^3;\ t = 1.$

6. $x = t,\ y = 1 - t^2,\ z = 3t^2 + 4t;\ t = -2.$

7. $x = t,\ y = e^t;\ z = e^{-t}:\ t = 0.$

8. $x = a\sin t,\ y = b\cos t,\ z = t;\ t = \frac{\pi}{6}.$

9. Trouver les cosinus directeurs de la tangente à la courbe $x = t^2,\ y = t^3,\ z = t^4$ au point $x = 1$.

161. Plan tangent à une surface. — On dit qu'une ligne droite est *tangente à une surface* en un point P, lorsqu'elle est la position limite d'une sécante passant par P et un point voisin P' de la surface, quand P' tend vers P le long de la surface. Nous allons maintenant établir un théorème d'une importance fondamentale.

Théorème. — *Toutes les tangentes à une surface en un point donné* (*) *se trouvent généralement dans un plan appelé plan tangent en ce point.*

(*) Le point en question est supposé être un point ordinaire de la surface (et non un point singulier), par conséquent les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ ne sont pas toutes nulles en ce point.

Démonstration. — Soit

$$(A) \qquad F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface donnée et soit $P(x, y, z)$ le point donné de cette surface.

Si on fait tendre P' vers P le long d'une courbe C de la surface et passant par P et P', la sécante PP' tendra évidemment vers la position d'une tangente à la courbe C au point P. Soient, maintenant

$$(B) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t)$$

les équations de la courbe C.

Alors, l'équation (A) doit être satisfaite identiquement par ces valeurs, et puisque la différentielle totale de (A) quand x, y, z sont définies par (B) doit s'annuler, nous avons

$$(C) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0, \qquad \text{d'après (52), p. 226.}$$

Cette équation montre que la tangente à C, dont les cosinus directeurs sont proportionnels à

$$\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt},$$

est perpendiculaire (*) à une ligne dont les cosinus directeurs sont déterminés par les rapports

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F}{\partial z};$$

et puisque C est une courbe quelconque de la surface passant par P, il s'ensuit immédiatement que si nous remplaçons le point $P(x, y, z)$ par $P_1(x_1, y_1, z_1)$, toutes les tangentes à la surface en P_1 sont dans le plan (**)

(*) D'après la géométrie analytique dans l'espace, nous savons que si deux lignes ayant pour cosinus directeurs $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ et $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$ sont perpendiculaires, on a la relation $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0$.

(**) Les cosinus directeurs de la normale au plan (71) sont proportionnels à

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z_1}.$$

Par suite, nous voyons d'après la géométrie analytique que (C) est la condition pour que les tangentes dont les cosinus directeurs sont $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ soient perpendiculaires à la normale, c'est-à-dire pour que les tangentes se trouvent dans le plan.

$$(71) \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(y - y_1) + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}(z - z_1) = 0 \text{(*)},$$

formule permettant de trouver l'équation d'un plan tangent en (x_1, y_1, z_1) *à une surface dont l'équation est donnée sous la forme*

$$F(x, y, z) = 0.$$

Dans le cas où l'équation de la surface est donnée sous la forme $z = f(x, y)$, soit

$$(D) \qquad F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0,$$

alors,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

Si nous évaluons ces relations pour le point (x_1, y_1, z_1) et que nous substituions dans (71), nous obtenons

$$(72) \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial z_1}{\partial y_1}(y - y_1) - (z - z_1) = 0,$$

formule permettant de trouver l'équation d'un plan tangent en (x_1, y_1, z_1) *à une surface dont l'équation est donnée sous la forme* $z = f(x, y)$.

Au § 126, p. 228, nous avons trouvé (55) la différentielle totale d'une fonction u (ou z) de x et de y, savoir

$$(E) \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Nous avons maintenant un moyen d'interpréter ce résultat géométriquement, car le plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ en (x, y, z) est d'après (72),

$$(F) \qquad Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y),$$

X, Y, Z désignant les coordonnées variables en un point quelconque du plan Si nous substituons $X = x + dx$ et $Y = y + dy$ dans (F), nous obtenons

$$(G) \qquad Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

En comparant (E) et (G), nous obtenons

$$(H) \qquad dz = Z - z.$$

(*) Pour s'accorder avec les notations déjà employées,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y_1}$$

désignent les valeurs des dérivées partielles au point (x_1, y_1, z_1).

D'où :

Théorème. — *La différentielle totale d'une fonction $f(x, y)$ correspondant aux accroissements dx et dy est égale à l'accroissement correspondant de la coordonnée z du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$.*

Ainsi dans la figure 148, PP′ est le plan tangent à la surface PQ en $P(x, y, z)$.

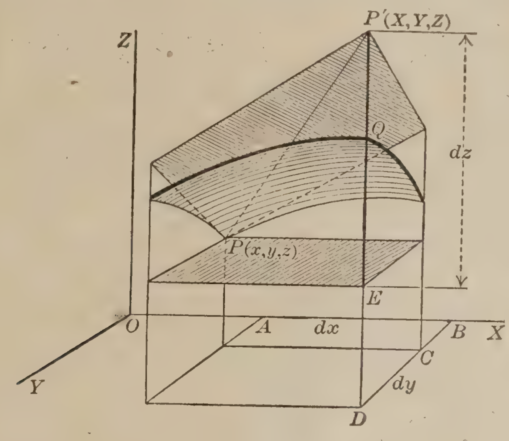


Fig. 148.

Soit $AB = dx$ et $CD = dy$;

alors $dz = Z - z = DP' - DE = EP'$.

162. Normale à une surface. — La normale à une surface en un point donné est la ligne passant par ce point perpendiculairement au plan tangent à la surface en ce point.

Les cosinus directeurs d'une ligne quelconque perpendiculaire au plan tangent (**71**) sont proportionnels à

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z_1};$$

(73) $$\frac{x - x_1}{\frac{\partial F_1}{\partial x_1}} = \frac{y - y_1}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}} = \frac{z - z_1}{\frac{\partial F_1}{\partial z_1}},$$

sont les équations de la normale (*) *à la surface* $F(x, y, z) = 0$ *au point* (x_1, y_1, z_1).

De même, d'après (**72**),

(*) Voir la seconde note de la page 307.

$$(74) \qquad \frac{x - x_1}{\frac{\partial z_1}{\partial x_1}} = \frac{y - y_1}{\frac{\partial z_1}{\partial y_1}} = \frac{z - z_1}{-1}$$

sont les équations de la normale à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_1, y_1, z_1).

EXEMPLES

1. Trouver l'équation du plan tangent et les équations de la normale à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ au point $(1, 2, 3)$.

Solution. Posons $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$.

Alors
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$
$$x_1 = 1, \ y_1 = 2, \ z_1 = 3,$$
d'où
$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 2, \ \frac{\partial F_1}{\partial y_1} = 4, \ \frac{\partial F_1}{\partial z_1} = 6.$$

En substituant dans (71), il vient

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 3) = 0,$$
$$x + 2y + 3z = 14$$

pour le plan tangent.

En substituant dans (73), on a

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 3}{6},$$

ce qui donne $z = 3x$ et $2z = 3y$ pour les équations de la normale.

2. Trouver l'équation du plan tangent et les équations de la normale à l'ellipsoïde $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ au point de contact où $x = 2$, $y = 1$ et $z > 0$.

Réponse. Plan tangent, $8(x - 2) + 9(y - 1) + 6\sqrt{11}\left(z - \frac{1}{6}\sqrt{11}\right) = 0$;

normale, $\dfrac{x - 2}{8} = \dfrac{y - 1}{9} = \dfrac{z - \frac{1}{6}\sqrt{11}}{6\sqrt{11}}$.

3. Trouver l'équation du plan tangent au paraboloïde elliptique $z = 2x^2 + 4y^2$ au point $(2, 1, 12)$. *Rép.* $8x + 8y - z = 12$.

4. Trouver les équations de la normale à l'hyperboloïde à une seule nappe $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ au point $(2, 2, 3)$. *Rép.* $y + 4x = 10$, $3x - z = 3$.

5. Trouver l'équation du plan tangent à l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

au point (x_1, y_1, z_1). *Rép.* $\dfrac{x_1x}{a^2} - \dfrac{y_1y}{b^2} - \dfrac{z_1z}{c^2} = 1$.

6. Trouver l'équation du plan tangent au point (x_1, y_1, z_1) de la surface $ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$. *Rép.* $ax_1x + by_1y + cz_1z + d = 0$.

7. Montrer que l'équation du plan tangent à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Lx + 2My + 2Nz + D = 0$$

au point (x_1, y_1, z_1) est

$$x_1x + y_1y + z_1z + L(x + x_1) + M(y + y_1) + N(z + z_1) + D = 0.$$

8. Trouver l'équation du plan tangent en un point quelconque de la surface $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ et montrer que la somme des carrés des segments interceptés sur les axes par le plan tangent est constante.

9. Démontrer que le tétraèdre formé par les plans de coordonnées et un plan tangent quelconque à la surface $xyz = a^3$ a un volume constant.

10. Trouver l'équation du plan tangent et les équations de la normale aux surfaces suivantes, aux points indiqués :

(*a*) $2x^2 + 4y^2 - z = 0$; (2, 1, 12). (*d*) $3x^2 + y^2 - 2z = 0$; $x = 1$, $y = 1$.
(*b*) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 16$; (1, 2, —1). (*e*) $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$; $x = 2$, $y = 1$.
(*c*) $x^2 + y^2 + z^2 = 11$; (3, 1, 1). (*f*) $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$; $y = 1$, $z = 1$.

163. Autre forme des équations de la tangente à une courbe gauche (*fig.* 149). — Si la courbe en question est la courbe d'intersection AB de deux surfaces $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$, la tangente PT en $P(x_1, y_1, z_1)$ est l'intersection des plans tangents CD et CE en ce point, car elle est également tangente aux deux surfaces et, par suite, elle doit se trouver dans les deux plans tangents.

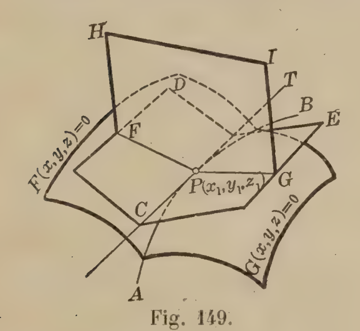


Fig. 149.

Les équations des deux plans tangents en P sont, d'après (71),

$$(75)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x - x_1) + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(y - y_1) + \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1}(z - z_1) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial G_1}{\partial x_1}(x - x_1) + \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}(y - y_1) + \dfrac{\partial G_1}{\partial z_1}(z - z_1) = 0. \end{cases}$$

Prises simultanément, les équations (75) sont les équations de la tangente PT à la courbe gauche AB. Les équations (75) peuvent s'écrire sous une forme plus condensée

$$(76)\quad \frac{x - x_1}{\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial z_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}} = \frac{y - y_1}{\dfrac{\partial F_1}{\partial z_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial z_1}} = \frac{z - z_1}{\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial y_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial x_1}},$$

ou

(77)
$$\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\\ \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial z_1}\end{vmatrix}}=\frac{y-y_1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\\ \frac{\partial G_1}{\partial z_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_1}\end{vmatrix}}=\frac{z-z_1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\\ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial y_1}\end{vmatrix}},$$

en utilisant la notation des déterminants.

164. Autre forme de l'équation du plan normal à une courbe gauche. — Le *plan normal* à une courbe gauche en un point donné a déjà été défini comme étant le plan passant par ce point perpendiculairement à la tangente à la courbe en ce point. Ainsi dans la figure 149, PHI est le plan normal à la courbe AB en P. Puisque ce plan est perpendiculaire à (77), nous avons immédiatement

(78)
$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\\ \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial z_1}\end{vmatrix}(x-x_1)+\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\\ \frac{\partial G_1}{\partial z_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_1}\end{vmatrix}(y-y_1)+\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\\ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial y_1}\end{vmatrix}(z-z_1)=0,$$

qui est *l'équation du plan normal à une courbe gauche.*

EXEMPLES

1. Trouver les équations de la tangente et l'équation du plan normal en $(r, r, r\sqrt{2})$ à la courbe d'intersection de la sphère et du cylindre dont les équations sont respectivement

$$x^2+y^2+z^2=4r^2, \quad x^2+y^2=2rx.$$

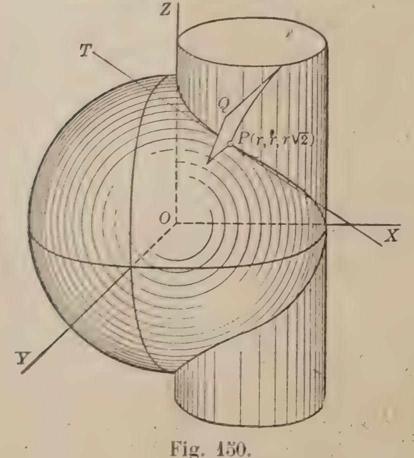


Fig. 150.

Solution. Soit

$$F=x^2+y^2+z^2-4r^2$$

et $$G=x^2+y^2-2rx.$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}=2r, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_1}=2r, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z_1}=2\sqrt{2}\,r;$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial y_1}=2r, \quad \frac{\partial G_1}{\partial z_1}=0.$$

En substituant dans (77), il vient

$$\frac{x-r}{-\sqrt{2}}=\frac{y-r}{0}=\frac{z-r\sqrt{2}}{1};$$

ou $$y=r, \quad x+\sqrt{2}z=3r,$$

pour les équations de la tangente PT en P à la courbe d'intersection.

En substituant dans (78), nous obtenons l'équation du plan normal

$$-\sqrt{2}(x-r)+0(y-r)+(z-r\sqrt{2})=0,$$

ou

$$\sqrt{2}x-z=0.$$

2. Trouver les équations de la tangente au cercle

$$x^2+y^2+z^2=25, \quad x+z=5,$$

au point $(2, 2\sqrt{3}, 3)$.

Rép. $2x+2\sqrt{3}y+3z=25, \; x+z=5.$

3. Trouver l'équation du plan normal à la courbe

$$x^2+y^2+z^2=r^2, \quad x^2-rx+y^2=0$$

au point (x_1, y_1, z_1). *Rép.* $2y_1z_1x-(2x_1-r)z_1y-ry_1z=0.$

4. Trouver les équations de la tangente et du plan normal à la courbe

$$2x^2+3y^2+z^2=9, \quad z^2=3x^2+y^2$$

au point $(1, -1, 2)$.

5. Trouver la direction de la courbe

$$xyz=1, \quad y^2=x$$

au point $(1, 1, 1)$.

6. Quelle est la direction de la tangente à la courbe $y=x^2$, $z^2=1-y$ au point $(0, 0, 1)$?

7. Les équations d'une hélice (spirale) sont

$$x^2+y^2=r^2, \quad y=x \operatorname{tg} \frac{z}{c}.$$

Montrer qu'au point (x_1, y_1, z_1) les équations de la tangente sont

$$c(x-x_1)+y_1(z-z_1)=0,$$
$$c(y-y_1)-x_1(z-z_1)=0;$$

et que l'équation du plan normal est

$$y_1x-x_1y-c(z-z_1)=0.$$

8. Une courbe gauche est formée par l'intersection du cône $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ et de la sphère $x^2+y^2+z^2=r^2$. Montrer qu'au point (x_1, y_1, z_1) les équations de la tangente à la courbe sont

$$c^2(a^2-b^2)x_1(x-x_1)=-a^2(b^2+c^2)z_1(z-z_1),$$
$$c^2(a^2-b^2)y_1(y-y_1)=+b^2(c^2+a^2)z_1(z-z_1);$$

et que l'équation du plan normal est

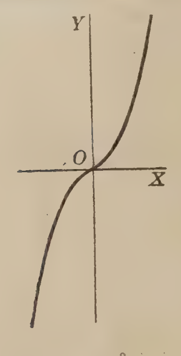
$$a^2(b^2+c^2)y_1z_1x-b^2(c^2+a^2)z_1x_1y-c^2(a^2-b^2)x_1y_1z=0.$$

CHAPITRE XXI

COURBES DE RÉFÉRENCE

Pour la commodité du lecteur, un certain nombre des courbes les plus communément employées dans le texte ont été réunies ici.

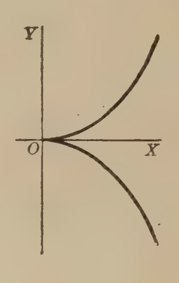
Parabole cubique.



$$y = ax^3.$$

Fig. 151.

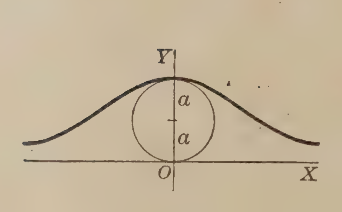
Parabole semi-cubique.



$$y^2 = ax^3.$$

Fig. 152.

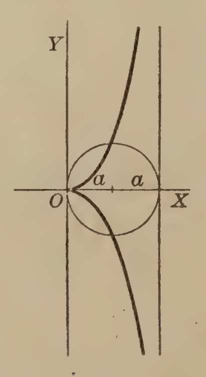
La cubique d'Agnési.



$$x^2y = 4a^2(2a - y).$$

Fig. 153.

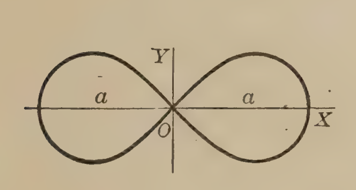
La cissoïde de Dioclès.



$$y^2(2a - x) = x^3.$$

Fig. 154.

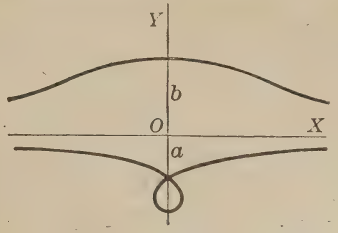
La lemniscate de Bernoulli.



$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$
$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Fig. 155.

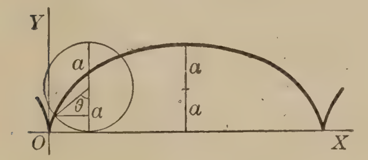

La conchoïde de Nicomède.



$$x^2y^2 = (y+a)^2(b^2-y^2).$$
$$\rho = a \operatorname{cosec} \theta + b.$$

Fig. 156.

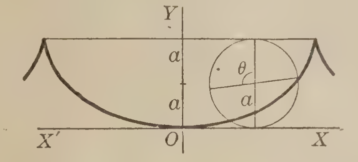
La cycloïde, cas ordinaire.



$$x = a \operatorname{arc\,sin\,vers} \frac{y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}.$$
$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1-\cos\theta). \end{cases}$$

Fig. 157.

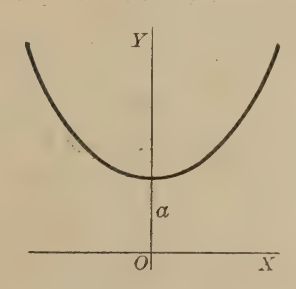
La cycloïde, sommet a l'origine.



$$x = a \operatorname{arc\,sin\,vers} \frac{y}{a} + \sqrt{2ay-y^2}.$$
$$\begin{cases} x = a(\theta + \sin\theta). \\ y = a(1-\cos\theta). \end{cases}$$

Fig. 158.

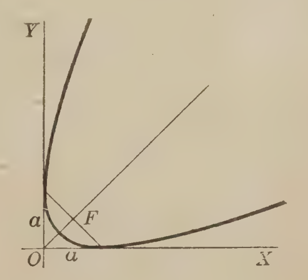
Chainette.



$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Fig. 159.

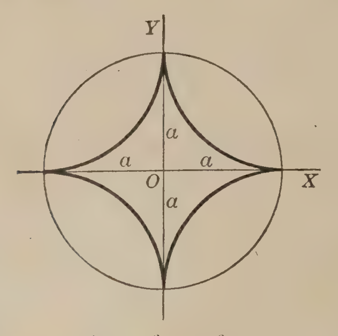
Parabole.



$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

Fig. 160.

HYPOCYCLOÏDE A QUATRE REBROUSSEMENTS.

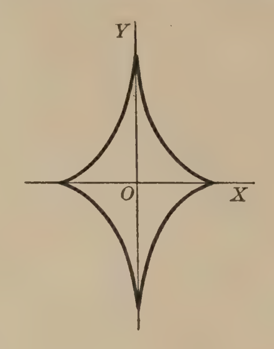


$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta, \\ y = a\sin^3\theta. \end{cases}$$

Fig. 161.

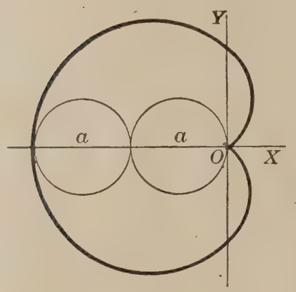
DÉVELOPPÉE DE L'ELLIPSE.



$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Fig. 162.

CARDIOÏDE.

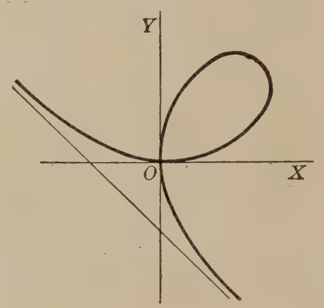


$$x^2 + y^2 + ax = a^2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\rho = a(1 - \cos\theta).$$

Fig. 163.

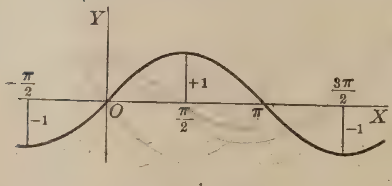
FOLIUM DE DESCARTES.



$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Fig. 164.

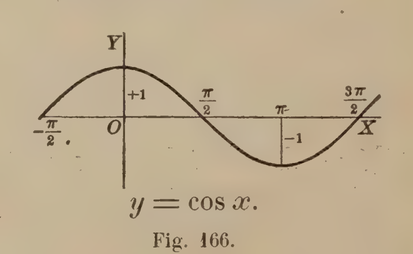
COURBE DES SINUS.



$$y = \sin x.$$

Fig. 165.

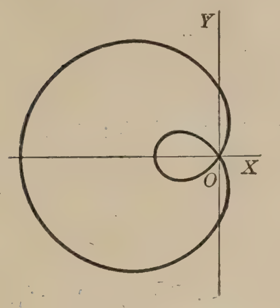
COURBE DES COSINUS.



$$y = \cos x.$$

Fig. 166.

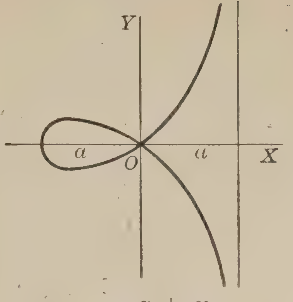
Limaçon de Pascal.



$$\rho = b - a \cos \theta.$$

Fig. 167.

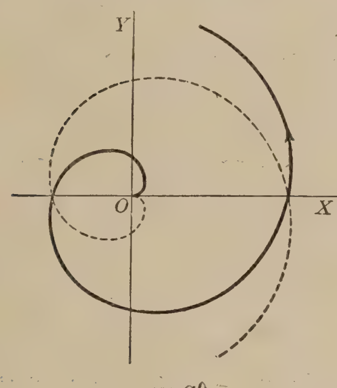
Strophoïde.



$$y^2 = x^2 \frac{a + x}{a - x}.$$

Fig. 168.

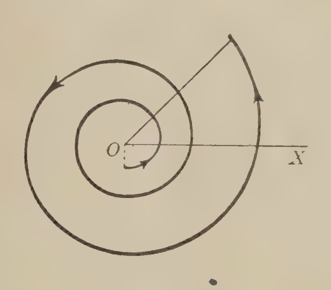
Spirale d'Archimède.



$$\rho = a\theta.$$

Fig. 169.

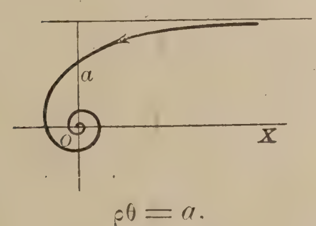
Spirale logarithmique ou équiangle.



$$\rho = e^{a\theta}, \quad \text{ou} \quad \log \rho = a\theta.$$

Fig. 170.

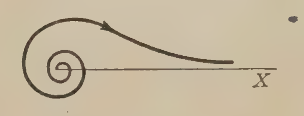
Spirale hyperbolique ou réciproque.



$$\rho\theta = a.$$

Fig. 171.

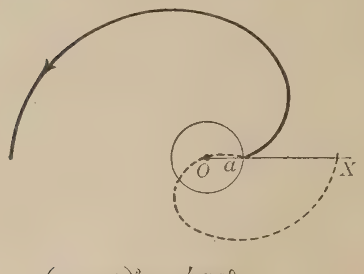
Lituus.



$$\rho^2\theta = a^2.$$

Fig. 172.

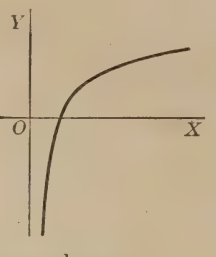
SPIRALE PARABOLIQUE.



$(\rho - a)^2 = 4ac\theta.$

Fig. 173.

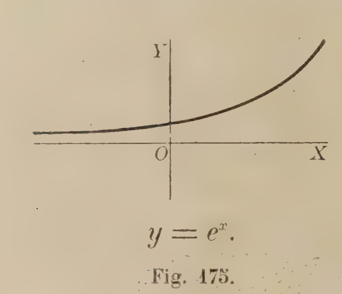
COURBE LOGARITHMIQUE.



$y = \log x.$

Fig. 174.

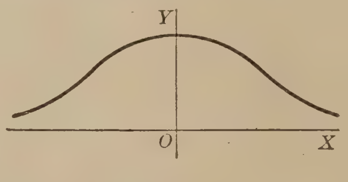
COURBE EXPONENTIELLE.



$y = e^x.$

Fig. 175.

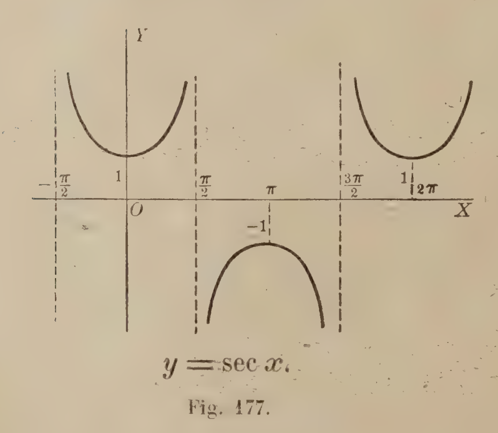
COURBE DES PROBABILITÉS.



$y = e^{-x^2}.$

Fig. 176.

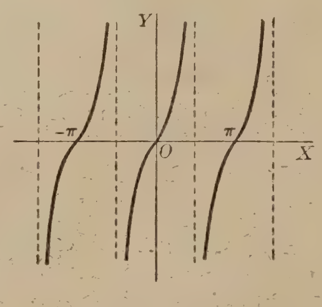
COURBE DES SÉCANTES.



$y = \sec x.$

Fig. 177.

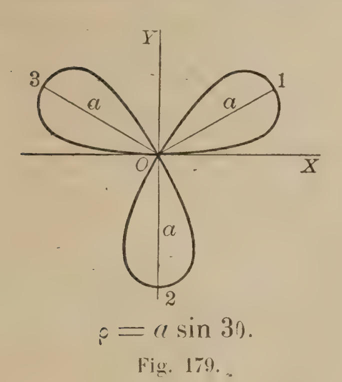
COURBE DES TANGENTES.



$y = \operatorname{tg} x.$

Fig. 178.

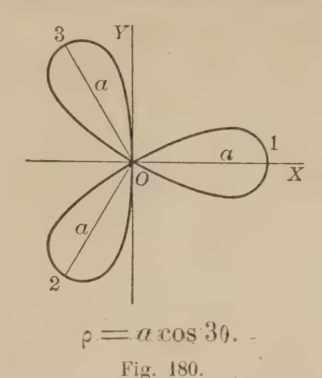
ROSACE A TROIS FEUILLES.



$\rho = a \sin 3\theta$.

Fig. 179.

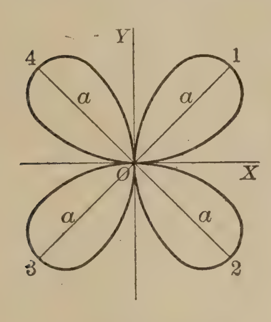
ROSACE A TROIS FEUILLES.



$\rho = a \cos 3\theta$.

Fig. 180.

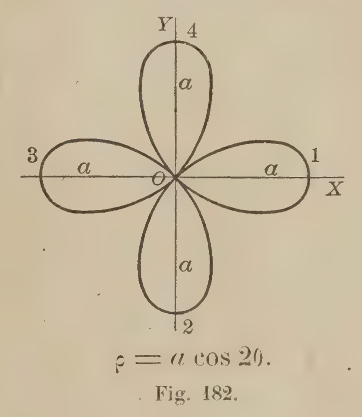
ROSACE A QUATRE FEUILLES.



$\rho = a \sin 2\theta$.

Fig. 181.

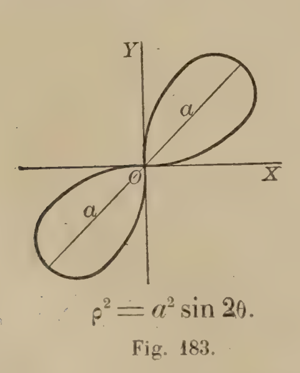
ROSACE A QUATRE FEUILLES.



$\rho = a \cos 2\theta$.

Fig. 182.

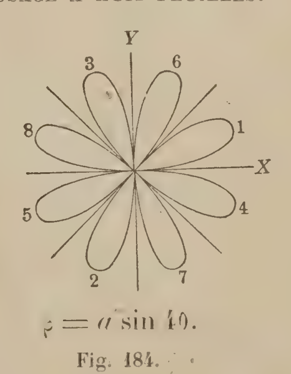
ROSACE LEMNISCATE A DEUX FEUILLES.



$\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$.

Fig. 183.

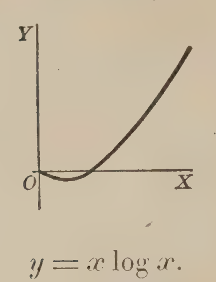
ROSACE A HUIT FEUILLES.



$\rho = a \sin 4\theta$.

Fig. 184.

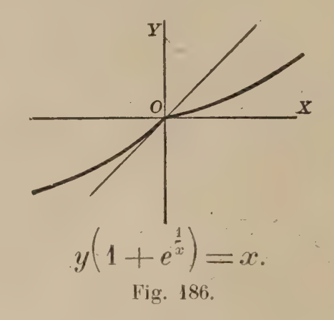
COURBE AVEC POINT D'ARRÊT A L'ORIGINE.



$$y = x \log x.$$

Fig. 185.

COURBE AVEC POINT ANGULEUX A L'ORIGINE.



$$y\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right) = x.$$

Fig. 186.

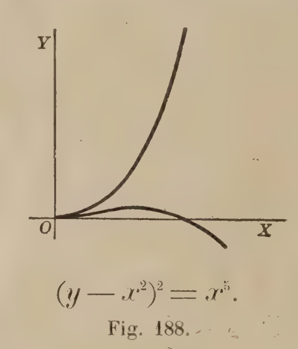
COURBE AVEC POINT CONJUGUÉ (ISOLÉ) A L'ORIGINE.



$$y^2 = x^3 - x^2.$$

Fig. 187.

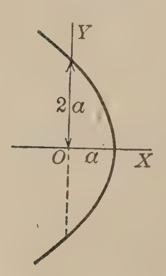
COURBE AVEC POINT DE REBROUSSEMENT DE SECONDE ESPÈCE A L'ORIGINE.



$$(y - x^2)^2 = x^5.$$

Fig. 188.

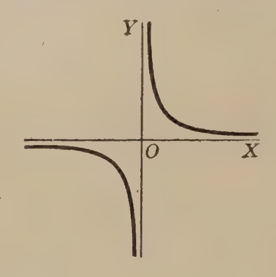
PARABOLE.



$$\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}.$$

Fig. 189.

HYPERBOLE ÉQUILATÈRE.



$$xy = a.$$

Fig. 190.

CALCUL INTÉGRAL

CHAPITRE XXII

INTÉGRATION. — RÈGLES POUR INTÉGRER LES FORMES ÉLÉMENTAIRES CLASSIQUES

165. Intégration. — Le lecteur est déjà familiarisé avec les opérations mutuellement inverses d'addition et de soustraction, de multiplication et de division, d'élévation à une puissance et d'extraction de racine. Dans les exemples qui suivent, les seconds membres d'une colonne sont respectivement les inverses des seconds membres de l'autre colonne :

$$y = x^2 + 1, \qquad x = \pm\sqrt{y-1};$$
$$y = a^x, \qquad x = \log_a y;$$
$$y = \sin x, \qquad x = \arcsin y.$$

Le calcul différentiel nous a appris à calculer la dérivée $f'(x)$ d'une fonction donnée $f(x)$, opération indiquée par le symbole

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x),$$

ou, en faisant usage des différentielles, par

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Les problèmes du calcul intégral dépendent de l'*opération inverse*, savoir :

Trouver une fonction $f(x)$ dont la dérivée

(A) $$f'(x) = \varphi(x)$$

est donnée,

ou, puisqu'on utilise habituellement les différentielles dans le calcul intégral, nous pouvons écrire

(B) $$df(x) = f'(x)dx = \varphi(x)dx,$$

et énoncer le problème comme il suit :

Étant donnée la différentielle d'une fonction, trouver cette fonction elle-même.

La fonction $f(x)$ ainsi trouvée est appelée une *intégrale* (*) de l'expression différentielle donnée et l'opération effectuée pour la trouver est appelée *intégration*. Cette opération est indiquée en écrivant le signe (**) $\int$ devant l'expression différentielle donnée. Ainsi,

$$\text{(C)} \qquad \int f'(x)dx = f(x), \text{(***)}$$

se lit *somme de $f'(x)dx$ égale $f(x)$* et signifie qu'*une intégrale de $f'(x)dx$ égale $f(x)$*.

La différentielle dx indique que x est la *variable d'intégration*. Par exemple

(a) si $f(x) = x^3$, $f'(x)dx = 3x^2dx$ et

$$\int 3x^2dx = x^3;$$

(b) si $f(x) = \sin x$, $f'(x)dx = \cos x dx$, et

$$\int \cos x dx = \sin x;$$

(c) si $f(x) = \text{arc tg}\, x$, $f'(x)dx = \frac{dx}{1+x^2}$, et

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x.$$

Nous allons maintenant développer ce qui ressort des explications qui précèdent, savoir, que :

la différentiation et l'intégration sont des opérations inverses.

La différentiation de (C) donne

$$\text{(D)} \qquad d\int f'(x)dx = f'(x)dx.$$

(*) Appelée *anti-différentielle* par quelques auteurs.

(**) Historiquement le signe $\int$ est un S déformé, la lettre initiale du mot *somme*. Au lieu de définir l'intégration comme étant l'opération inverse de la différentiation, nous pouvons la définir comme une opération de sommation, notion très importante qui sera considérée au chapitre XXVIII.

(***) Quelques auteurs écrivent cette expression $D_x^{-1}f(x)$ quand ils veulent insister sur le fait que l'intégration est l'opération inverse de la différentiation.

En substituant dans (C) la valeur de $f'(x)dx[=df(x)]$ donnée par (B), nous obtenons

$$\text{(E)} \qquad \int df(x) = f(x).$$

Par conséquent, $\frac{d}{dx}$ et $\int \cdots dx$, considérés comme symboles d'opération, sont *inverses*, ou, si nous utilisons les différentielles, d et $\int$ sont inverses. Quand d est suivi de $\int$, ces symboles s'annulent l'un l'autre, comme en (D), mais quand $\int$ est suivi de d, comme en (E), ce ne sera pas le cas en général, à moins que nous ignorions la *constante d'intégration.*

La raison de ceci nous apparaîtra immédiatement dans le prochain paragraphe, dès que nous aurons défini la constante d'intégration.

166. Constante d'intégration. Intégrale indéfinie. — Il résulte du paragraphe précédent que :

puisque $d(x)^3 = 3x^2dx$, nous avons $\int 3x^2dx = x^3$;

puisque $d(x^3 + 2) = 3x^2dx$, nous avons $\int 3x^2dx = x^3 + 2$;

puisque $d(x^3 - 7) = 3x^2dx$, nous avons $\int 3x^2dx = x^3 - 7$.

En effet, puisque $d(x^3 + C) = 3x^2dx$, où C est une constante arbitraire quelconque, nous avons

$$\int 3x^2dx = x^3 + C.$$

Une constante telle que C est appelée *constante d'intégration* (*).

Puisque nous pouvons donner à C toutes les valeurs qu'il nous plaît, il s'ensuit que si une expression différentielle donnée a une intégrale, elle en a une infinité différant seulement par des constantes. Par suite,

$$\int f'(x)dx = f(x) + C ;$$

(*) Ici constante signifie quantité indépendante de la *variable d'intégration.*

et puisque la constante C est inconnue et *indéfinie*, l'expression

$$f(x)+C$$

est appelée l'*intégrale indéfinie de* $f'(x)dx$.

Il est évident que si $\varphi(x)$ est une fonction dont la dérivée est $f(x)$, $\varphi(x)+C$, où C est une constante quelconque, est également une fonction dont la dérivée est $f(x)$. D'où le théorème suivant :

Théorème. — *Si deux fonctions diffèrent par une constante, elles ont la même dérivée.*

Cependant, il n'est pas évident que si $\varphi(x)$ est une fonction dont la dérivée est $f(x)$, *toutes* les fonctions ayant la même dérivée $f(x)$ sont de la forme $\varphi(x)+C$, où C est une constante quelconque. En d'autres termes, il reste à démontrer le *théorème réciproque*, savoir :

Théorème réciproque. — *Si deux fonctions ont la même dérivée, leur différence est une constante.*

Démonstration. — Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions ayant la même dérivée $f(x)$.

Posons $F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$; alors

$$\text{(A)} \qquad F'(x)=\frac{d}{dx}[\varphi(x)-\psi(x)]=f(x)-f(x)=0,$$

par hypothèse.

Mais d'après le théorème de la moyenne (46), p. 190, nous avons

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\Delta x F'(x+\theta\cdot\Delta x). \qquad 0<\theta<1.$$

$$F(x+\Delta x)-F(x)=0,$$

[Puisque d'aprés (A) la dérivée de $F(x)$ est nulle pour toutes les valeurs de x]

et

$$F(x+\Delta x)=F(x),$$

ce qui signifie que la fonction

$$F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$$

ne change pas du tout de valeur quand on donne à x l'accroissement Δx, c'est-à-dire que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ diffèrent seulement par une constante.

Dans un cas donné quelconque, on peut trouver la valeur de C quand on connaît la valeur de l'intégrale pour une certaine valeur de la variable, ce que nous illustrerons par de nombreux exemples dans le

chapitre suivant. Pour le moment, nous nous contenterons d'apprendre à trouver les intégrales indéfinies d'expressions différentielles données. Dans ce qui suit, nous supposons que *toute fonction continue a une intégrale indéfinie,* proposition dont la démonstration rigoureuse est au-dessus de la portée de cet ouvrage.

Pour toutes les fonctions élémentaires, cependant, la vérité de cette proposition apparaîtra dans les chapitres qui suivent. Dans tous les cas d'intégration indéfinie, la règle à appliquer pour vérifier les résultats est la suivante : *la différentielle de l'intégrale doit être égale à l'expression différentielle donnée.*

167. Règles pour intégrer les formes élémentaires classiques. — Le calcul différentiel nous a fourni une *règle générale* pour différentier (p. 33). Le calcul intégral ne nous donne pas de règle générale correspondante qui puisse être appliquée sûrement dans la pratique, pour effectuer l'opération inverse d'intégration (*) ; chaque cas demande à être traité spécialement et nous arrivons à l'intégrale d'une expression différentielle donnée par notre connaissance préalable des résultats connus de la différentiation, c'est-à-dire que nous devons pouvoir résoudre la question suivante : *quelle fonction, quand elle est différentiée, reproduit l'expression différentielle donnée ?*

L'intégration est donc essentiellement une méthode d'essais et pour faciliter le travail on a dressé des tables d'intégrales connues appelées *formes types ou classiques.*

Pour effectuer une intégration quelconque, on compare l'expression différentielle donnée avec ces formes, et si elle se trouve être identique à l'une d'elles, l'intégrale est connue. Dans le cas contraire, on essaie de la ramener à l'une des formes types par diverses méthodes dont beaucoup emploient des artifices qui ne peuvent être suggérés que par la pratique. C'est pourquoi une grande partie de notre traité sur le calcul intégral sera consacrée à l'exposition des méthodes d'intégration des fonctions qui se présentent fréquemment dans la résolution des problèmes pratiques.

On peut toujours dériver une formule d'intégration d'un résultat quelconque de différentiation. Les deux règles ci-après sont utiles pour

(*) Bien que l'on sache souvent que l'intégrale d'une expression différentielle donnée existe, il peut, cependant, nous être impossible de la trouver en termes de fonctions connues, parce qu'il y a d'autres fonctions que les fonctions élémentaires, dont les dérivées sont des fonctions élémentaires.

ramener des expressions différentielles à des formes classiques d'intégration :

(a) *L'intégrale d'une somme algébrique quelconque d'expressions différentielles est égale à la somme algébrique des intégrales de ces expressions prises séparément.*

Démonstration. — En différentiant l'expression

$$\int du + \int dv - \int dw,$$

u, v, w étant des fonctions d'une seule variable, nous obtenons

$$du + dv - dw. \qquad \text{D'après III, p. 38.}$$

$$(1) \qquad \int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw.$$

(b) *Un facteur constant peut s'écrire soit avant, soit après le signe d'intégration.*

Démonstration. — La différentiation de l'expression

$$a \int dv$$

donne

$$adv. \qquad \text{D'après IV, p. 38.}$$

$$(2) \qquad \int adv = a \int dv.$$

En raison de leur importance, nous écrirons les deux règles ci-dessus sous forme de formules en tête de la liste suivante des formes élémentaires classiques.

Formes élémentaires classiques.

$$(1) \qquad \int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw.$$

$$(2) \qquad \int adv = a \int dv.$$

$$(3) \qquad \int dx = x + C.$$

(4) $$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C. \qquad n \neq -1.$$

(5) $$\int \frac{dv}{v} = \log v + C$$
$$= \log v + \log c = \log cv.$$

[En posant $C = \log c$.]

(6) $$\int a^v dv = \frac{a^v}{\log a} + C.$$

(7) $$\int e^v dv = e^v + C.$$

(8) $$\int \sin v\, dv = -\cos v + C.$$

(9) $$\int \cos v\, dv = \sin v + C.$$

(10) $$\int \sec^2 v\, dv = \operatorname{tg} v + C.$$

(11) $$\int \operatorname{cosec}^2 v\, dv = -\operatorname{cotg} v + C.$$

(12) $$\int \sec v \operatorname{tg} v\, dv = \sec v + C.$$

(13) $$\int \operatorname{cosec} v \operatorname{cotg} v\, dv = -\operatorname{cosec} v + C.$$

(14) $$\int \operatorname{tg} v\, dv = \log \sec v + C.$$

(15) $$\int \operatorname{cotg} v\, dv = \log \sin v + C.$$

(16) $$\int \sec v\, dv = \log(\sec v + \operatorname{tg} v) + C.$$

(17) $$\int \operatorname{cosec} v\, dv = \log(\operatorname{cosec} v - \operatorname{cotg} v) + C.$$

(18) $$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{a} + C.$$

(19) $$\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{v-a}{v+a} + C.$$

(20) $$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \operatorname{arc\,sin} \frac{v}{a} + C.$$

(21) $$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \log\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C.$$

(22) $$\int \frac{dv}{\sqrt{2av - v^2}} = \text{arc sin vers}\, \frac{v}{a} + C.$$

(23) $$\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\, \text{arc sec}\, \frac{v}{a} + C.$$

Démonstration de (3). — Puisque

$$d(x + C) = dx,$$ II, p. 38

nous obtenons $$\int dx = x + C.$$

Démonstration de (4). — Puisque

$$d\left(\frac{v^{n+1}}{n+1} + C\right) = v^n dv,$$ VI, p. 38

nous obtenons

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C.$$

Cette relation est vraie pour toutes les valeurs de n excepté pour $n = -1$, car, dans ce cas, (4) donne

$$\int v^{-1} dv = \frac{v^{-1+1}}{-1+1} + C = \frac{1}{0} + C = \infty + C,$$

expression qui n'a pas de sens.

Le cas où $n = -1$ est compris dans (5).

Démonstration de (5). — Puisque

$$d(\log v + C) = \frac{dv}{v},$$ VIII *a*, p. 39,

nous obtenons $$\int \frac{dv}{v} = \log v + C.$$

Les résultats que nous obtenons d'après (5) peuvent être mis sous une forme plus condensée en désignant la constante d'intégration par $\log c$. Ainsi

$$\int \frac{dv}{v} = \log v + \log c = \log cv.$$

La formule (5) établit que *si l'expression sous le signe d'intégration est une fraction dont le numérateur est la différentielle du dénominateur, l'intégrale est le logarithme naturel du dénominateur.*

EXEMPLES (*)

A l'aide des formules (1)-(5), vérifier les intégrations suivantes :

1. $\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C$, d'après (4), où $v = x$ et $n = 6$.

2. $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$,

d'après (4) où $v = x$ et $n = \frac{1}{2}$.

3. $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$,

d'après (4) où $v = x$ et $n = -3$.

4. $\int ax^5 dx = a \int x^5 dx = \frac{ax^6}{6} + C$. D'après (2) et (4)

5. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

6. $\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$.

7. $\int at^{\frac{5}{2}} dt = \frac{2at^{\frac{7}{2}}}{7} + C$.

8. $\int \frac{dx}{3x^2} = -\frac{1}{3x} + C$.

9. $\int \frac{2dx}{ax^{\frac{1}{5}}} = \frac{5x^{\frac{4}{5}}}{2a} + C$.

10. $\int 5y\,dy = \frac{5y^2}{2} + C$.

11. $\int \sqrt{2px}\, dx = \frac{2}{3} x\sqrt{2px} + C$.

12. $\int \sqrt[3]{x}\, dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C$.

13. $\int s^{-\frac{1}{2}} ds = 2\sqrt{s} + C$.

14. $\int 3a\theta^2 d\theta = a\theta^3 + C$.

15. $\int 5m^2z^6 dz = \frac{5m^2z^7}{7} + C$.

16. $\int \frac{b\,d\varphi}{\sqrt[3]{\varphi}} = \frac{3b\varphi^{\frac{2}{3}}}{2} + C$.

17. $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx = (nx)^{\frac{1}{n}} + C$.

18. $\int y^{-m-1} dy = -\frac{1}{my^m} + C$.

19. $\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)dx = \int 2x^3 dx - \int 5x^2 dx - \int 3x\,dx + \int 4\,dx$

d'après (1)

$= 2\int x^3 dx - 5\int x^2 dx - 3\int x\,dx + 4\int dx$

d'après (2)

$= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C$.

NOTE. — Bien que toute intégration séparée demande une constante arbitraire, nous écrirons seulement une constante unique représentant leur somme algébrique.

(*) En apprenant à intégrer, le lecteur devra s'exercer oralement à intégrer des fonctions simples.

20. $\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}}-\frac{b}{x^2}+3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx=\int 2ax^{-\frac{1}{2}}dx-\int bx^{-2}dx+\int 3cx^{\frac{2}{3}}dx$ d'après (1)

$=2a\int x^{-\frac{1}{2}}dx-b\int x^{-2}dx+3c\int x^{\frac{2}{3}}dx$ d'après (2)

$=2a\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-b\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+3c\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C$ d'après (4)

$=4a\sqrt{x}+\frac{b}{x}+\frac{9}{5}cx^{\frac{5}{3}}+C.$

21. $\int(2x^9-3x^6+12x^3-3)dx=\frac{x^{10}}{5}-\frac{3x^7}{7}+3x^4-3x+C.$

22. $\int\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{x^5}\right)dx=\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}-3x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2x^4}+C.$

23. $\int\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=a^2x+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}-\frac{x^3}{3}+C.$

NOTE. — Développer d'abord.

24. $\int(a^2-y^2)^3\sqrt{y}\,dy=2y^{\frac{3}{2}}\left(\frac{a^6}{3}-\frac{3a^4y^2}{7}+\frac{3a^2y^4}{11}-\frac{y^6}{15}\right)+C.$

25. $\int(\sqrt{a}-\sqrt{t})^3dt=a^{\frac{3}{2}}t-2at^{\frac{3}{2}}+\frac{3a^{\frac{1}{2}}t^2}{2}-\frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}+C.$

26. $\int(x^2-2)^3x^3dx=\frac{x^{10}}{10}-\frac{3x^8}{4}+2x^6-2x^4+C.$

27. $\int(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}xdx=\frac{(a^2+b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2}+C.$

NOTE. — Cette expression peut être ramenée à la forme (4), car posons $v=a^2+b^2x^2$ et $n=\frac{1}{2}$; alors $dv=2b^2xdx$. Si maintenant, nous insérons le facteur constant $2b^2$ devant xdx et son inverse $\frac{1}{2b^2}$ devant le signe d'intégration de façon à ne pas changer la valeur de l'expression, celle-ci peut être intégrée en utilisant (4), savoir

$$\int v^n dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}+C.$$

Ainsi,

$$\int(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}xdx=\frac{1}{2b^2}\int(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}2b^2xdx=\frac{1}{2b^2}\int(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}d(a^2+b^2x^2)$$

$$=\frac{1}{2b^2}\cdot\frac{(a^2+b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{(a^2+b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2}+C.$$

NOTE. — Le lecteur est averti qu'on ne doit faire passer aucune fonction de la variable d'un côté du signe d'intégration à l'autre, car cela changerait la valeur de l'intégrale.

28. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,xdx=\int(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}xdx=-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$

29. $\int (3ax^2 + 4bx^3)^{\frac{4}{3}}(2ax + 4bx^2)dx = \frac{1}{7}(3ax^2 + 4bx^3)^{\frac{7}{3}} + C.$

NOTE. — Utiliser (4) en posant $v = 3ax^2 + 4bx^3$, $dv = (6ax + 12bx^2)dx$ et $n = \frac{4}{3}$.

30. $\int b(6ax^2 + 8bx^3)^{\frac{5}{3}}(2ax + 4bx^2)dx = \frac{b}{16}(6ax^2 + 8bx^3)^{\frac{8}{3}} + C.$

31. $\int \frac{x^2dx}{(a^2 + x^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}(a^2 + x^3)^{\frac{1}{2}} + C.$

NOTE. — Écrire comme il suit l'intégrale donnée $\int (a^2 + x^3)^{-\frac{1}{2}} x^2dx$ et appliquer (4).

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} = -2\sqrt{1 - x} + C.$

33. $\int 2\pi y \left(\frac{y^2}{p^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{2\pi}{3p}(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} + C.$

34. $\int (1 + e^x)^{\frac{1}{2}} e^x dx = \frac{2}{3}(1 + e^x)^{\frac{3}{2}} + C.$

35. $\int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 \cos x dx = \frac{(\sin x)^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

NOTE. — Utiliser (4) en posant $v = \sin x$, $dv = \cos x dx$ et $n = 2$.

36. $\int \cos^5 x \sin x dx = -\frac{\cos^6 x}{6} + C.$

37. $\int \sin^3 ax \cos ax dx = \frac{1}{4a}\sin^4 ax + C.$

38. $\int \cos^4 3x \sin 3x dx = -\frac{1}{15}\cos^5 3x + C.$

39. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$

40. $\int \frac{5adt}{(b - t)^6} = \frac{a}{(b - t)^5} + C.$

41. $\int \sqrt[3]{1 + x^2}\, xdx = \frac{3}{8}(1 + x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$

42. $\int \frac{sds}{\sqrt[3]{1 - s^2}} = -\frac{3}{4}(1 - s^2)^{\frac{2}{3}} + C.$

43. $\int \frac{u^{n-1}du}{(a + bu^n)^m} = \frac{(a + bu^n)^{1-m}}{bn(1 - m)} + C.$

44. $\int \frac{2asds}{(b^2 - c^2s^2)^2} = \frac{a}{c^2(b^2 - c^2s^2)} + C.$

45. $\int \frac{3axdx}{b^2 + e^2x^2} = \frac{3a}{2e^2}\log(b^2 + e^2x^2) + C.$

Solution. $\int \frac{3axdx}{b^2 + e^2x^2} = 3a\int \frac{xdx}{b^2 + e^2x^2}.$

Cette intégrale ressemble à (5), car posons $v = b^2 + e^2x^2$, alors $dv = 2e^2xdx$. Si nous introduisons le facteur $2e^2$ après le signe d'intégration et $\frac{1}{2e^2}$ devant, nous ne changeons pas la valeur de l'expression, mais on voit que le numérateur est maintenant la différentielle du dénominateur. Par conséquent,

$$3a\int\frac{xdx}{b^2+e^2x^2} = \frac{3a}{2e^2}\int\frac{2e^2xdx}{b^2+e^2x^2} = \frac{3a}{2e^2}\int\frac{d(b^2+e^2x^2)}{b^2+e^2x^2} = \frac{3a}{2e^2}\log(b^2+e^2x^2)+C.$$

D'après (5).

46. $\int\frac{xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log(x^2-1)+C.$

47. $\int\frac{(x^2-a^2)\,dx}{x^3-3a^2x} = \log(x^3-3a^2x)^{\frac{1}{3}}+C.$

48. $\int\frac{5x^2dx}{10x^3+15} = \log(10x^3+15)^{\frac{1}{6}}+C.$

49. $\int\frac{5bxdx}{8a-6bx^2} = -\frac{5}{12}\log(8a-6bx^2)+C.$

50. $\int\frac{x^3dx}{x+1} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\log(x+1)+C.$

NOTE. — Diviser d'abord le numérateur par le dénominateur.

51. $\int\frac{2x-1}{2x+3}dx = x-\log(2x+3)^2+C.$

52. $\int\frac{x^{n-1}-1}{x^n-nx}dx = \frac{1}{n}\log(x^n-nx)+C.$

53. $\int\frac{(y^2-2)^3\,dy}{y^5} = \frac{2}{y^4}-\frac{6}{y^2}+\frac{y^2}{2}-\log y^6+C.$

54. $\int\frac{t^{n-1}\,dt}{a+bt^n} = \frac{1}{nb}\log(a+bt^n)+C.$

55. $\int(\log\alpha)^3\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{1}{4}(\log\alpha)^4+C.$

56. $\int\frac{r^2+1}{r-1}dr = \frac{r^2}{2}+r+2\log(r-1)+C.$

57. $\int\frac{2e^xdx}{e^x+1} = 2\log(e^x+1)+C.$

58. $\int\frac{\sin xdx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\log(a+b\cos x)+C.$

59. $\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{1+3\,\mathrm{tg}\,\theta} = \frac{1}{3}\log(1+3\,\mathrm{tg}\,\theta)+C.$

60. $\int\frac{e^{3s}ds}{e^s-1} = \frac{e^{2s}}{2}+e^s+\log(e^s-1)+C.$

61. $\int\frac{e^r-1}{e^r+1}dr = \log(e^r+1)^2-r+C.$

62. Intégrer les fonctions ci-après et vérifier les résultats par différentiation :

(*a*) $\int\left(4x^2-\frac{2}{x}\right)dx.$

Solution. $\int\left(4x^2-\frac{2}{x}\right)dx=4\int x^2dx-2\int\frac{dx}{x}=\frac{4x^3}{3}-2\log x+C.$

Vérification. $d\left(\frac{4x^3}{3}-2\log x+C\right)=\left(\frac{4}{3}\cdot 3x^2-2\cdot\frac{1}{x}\right)dx=\left(4x^2-\frac{2}{x}\right)dx.$

(*b*) $\int x^4dx.$ (*h*) $\int s^{m+n}ds.$ (*n*) $\int\frac{ax^{n-1}dx}{(b-cx^n)^m}.$ (*t*) $\int\sin^3\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx.$

(*c*) $\int 5\sqrt{x}dx.$ (*i*) $\int a\varphi^{\frac{1}{3}}d\varphi.$ (*o*) $\int\frac{aydy}{b-cy^2}.$ (*u*) $\int\frac{9s^3ds}{s-3}.$

(*d*) $\int x^{\frac{p}{q}}dx.$ (*j*) $\int\frac{ad\theta}{b\theta}.$ (*p*) $\int\frac{(a^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}})^2dz}{\sqrt{z}}.$ (*v*) $\int\sqrt{a-bx}\,dx.$

(*e*) $\int y^{\frac{2}{3}}dy.$ (*k*) $\int t^{-2}dt.$ (*q*) $\int\frac{(x-1)dx}{x^2-2x+5}.$ (*w*) $\int\frac{\operatorname{cosec}^2\varphi d\varphi}{b-a\operatorname{cotg}\varphi}.$

(*f*) $\int 7\theta^{\frac{2}{7}}d\theta.$ (*l*) $\int b\sqrt[3]{x^2}dx.$ (*r*) $\int\frac{(x^3+1)dx}{x+2}.$ (*x*) $\int(e^{\frac{x}{a}}+1)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{a}}dx.$

(*g*) $\int\frac{4dy}{y^3}.$ (*m*) $\int\frac{8dz}{\sqrt[5]{z^2}}.$ (*s*) $\int\frac{atdt}{\sqrt{b^2-c^2t^2}}.$ (*y*) $\int(\log t)^3\frac{dt}{t}.$

Démonstrations de (6) et de (7). — Ces démonstrations résultent immédiatement des formules de différentiation correspondantes **IX** et **IX*a***, p. 39.

EXEMPLES

A l'aide des formules (6) et (7), vérifier les intégrations ci-après :

1. $\int ba^{2x}dx=\frac{ba^{2x}}{2\log a}+C.$

Solution. $\int ba^{2x}dx=b\int a^{2x}dx.$ D'après (2)

Cette intégrale ressemble à (6). Posons $v=2x$; alors $dv=2dx$. Si nous insérons le facteur 2 avant dx et le facteur $\frac{1}{2}$ avant le signe d'intégration, nous avons

$$b\int a^{2x}dx=\frac{b}{2}\int a^{2x}2dx=\frac{b}{2}\int a^{2x}d(2x)=\frac{b}{2}\cdot\frac{a^{2x}}{\log a}+C.\quad\text{D'après (6).}$$

2. $\int 3e^xdx=3e^x+C.$

3. $\int e^{\frac{x}{n}}dx=ne^{\frac{x}{n}}+C.$

4. $\int e^{\sin x}\cos x dx=e^{\sin x}+C.$

5. $\int e^{2\cos x}\sin x dx=-\frac{e^{2\cos x}}{2}+C.$

6. $\int 3^{2y-1}dy=\frac{3^{2y-1}}{2\log 3}+C.$

7. $\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C.$

8. $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$

9. $\int a^{2x}dx = \frac{a^{2x}}{2\log a} + C.$

10. $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\log 5} + C.$

11. $\int a^x e^x dx = \frac{a^x e^x}{1 + \log a} + C.$

12. $\int (e^{5x} + a^{5x})dx = \frac{1}{5}\left(e^{5x} + \frac{a^{5x}}{\log a}\right) + C.$

13. $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)dx = \frac{1}{2}e^{x^2+4x+3} + C.$

14. $\int (a^{nx} - b^{mx})dx = \frac{a^{nx}}{n\log a} - \frac{b^{mx}}{m\log b} + C.$

15. $\int (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})dx = a(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) + C.$

16. $\int (e^y + e^{-y})^2 dy = \frac{1}{2}(e^{2y} - e^{-2y}) + 2y + C.$

17. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x}dx = \frac{a^x b^{-x} - a^{-x}b^x}{\log a - \log b} - 2x + C.$

18. $\int (e^{4x} + a^{5x} + 3b^{-2x})dx = \frac{e^{4x}}{4} + \frac{a^{5x}}{5\log a} - \frac{3b^{-2x}}{2\log b} + C.$

19. $\int (e^{at} + e^{-at})^3 dt = \frac{1}{a}\left[\frac{e^{3at}}{3} + 3e^{at} - 3e^{-at} - \frac{e^{-3at}}{3}\right] + C.$

20. Intégrer les fonctions suivantes et vérifier les résultats par différentiation :

(a) $\int e^{2s}ds.$ (e) $\int e^{-3x}dx.$ (i) $\int 5e^{ax}dx.$ (m) $\int a^{x^2}xdx.$

(b) $\int b^{-4x}dx.$ (f) $\int 2^{t^2}tdt.$ (j) $\int e^{\frac{2x}{a}}dx.$ (n) $\int e^{\frac{a\theta}{b}}d\theta.$

(c) $\int c^{ax}dx.$ (g) $\int 3^x e^x dx.$ (k) $\int ae^{-mx}dx.$ (o) $\int (e^{2x})^2dx.$

(d) $\int \frac{3dx}{e^x}.$ (h) $\int \frac{dy}{a^{2y}}.$ (l) $\int \frac{3dt}{\sqrt{e^t}}.$ (p) $\int \frac{ad\theta}{b^{3\theta}}.$

(q) $\int a^{2\sin\varphi}\cos\varphi d\varphi.$ (s) $\int e^{a\cos\theta}\sin\theta d\theta.$ (u) $\int e^{\operatorname{tg} t}\sec^2 t dt.$

(r) $\int (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2dx.$ (t) $\int e^{x^2-4}xdx.$ (v) $\int a^{\log x}\frac{dx}{x}.$

Démonstrations de (8)-(13). — Ces démonstrations résultent immédiatement des formules de différentiation correspondantes, **XI**, etc., p. 39.

Démonstration de (14).

$$\int \operatorname{tg} v dv = \int \frac{\sin v dv}{\cos v}$$
$$= -\int \frac{-\sin v dv}{\cos v}$$
$$= -\int \frac{d(\cos v)}{\cos v}$$
$$= -\log \cos v + C \qquad \text{d'après (5)}$$
$$= \log \sec v + C.$$

$\left[\text{Puisque } -\log \cos v = -\log \frac{1}{\sec v} = -\log 1 + \log \sec v = \log \sec v.\right]$

Démonstration de (15).

$$\int \operatorname{cotg} v dv = \int \frac{\cos v dv}{\sin v} = \int \frac{d(\sin v)}{\sin v}$$
$$= \log \sin v + C. \qquad \text{D'après (5)}$$

Démonstration de (16).

Puisque $$\sec v = \sec v \frac{\sec v + \operatorname{tg} v}{\sec v + \operatorname{tg} v}$$
$$= \frac{\sec v \operatorname{tg} v + \sec^2 v}{\sec v + \operatorname{tg} v},$$

$$\int \sec v dv = \int \frac{\sec v \operatorname{tg} v + \sec^2 v}{\sec v + \operatorname{tg} v} dv$$
$$= \int \frac{d(\sec v + \operatorname{tg} v)}{\sec v + \operatorname{tg} v}$$
$$= \log(\sec v + \operatorname{tg} v) + C. \qquad \text{D'après (5)}$$

Démonstration de (17).

Puisque $$\operatorname{cosec} v = \operatorname{cosec} v \frac{\operatorname{cosec} v - \operatorname{cotg} v}{\operatorname{cosec} v - \operatorname{cotg} v}$$
$$= \frac{-\operatorname{cosec} v \operatorname{cotg} v + \operatorname{cosec}^2 v}{\operatorname{cosec} v - \operatorname{cotg} v},$$

$$\int \operatorname{cosec} v dv = \int \frac{-\operatorname{cosec} v \operatorname{cotg} v + \operatorname{cosec}^2 v}{\operatorname{cosec} v - \operatorname{cotg} v} dv$$
$$= \int \frac{d(\operatorname{cosec} v - \operatorname{cotg} v)}{\operatorname{cosec} v - \operatorname{cotg} v}$$
$$= \log(\operatorname{cosec} v - \operatorname{cotg} v) + C. \qquad \text{D'après (5)}$$

EXEMPLES

A l'aide des formules (8)-(17), vérifier les intégrations suivantes :

1. $\int \sin 2ax dx = -\frac{\cos 2ax}{2a} + C.$

Solution. Cette intégrale ressemble à (8), car posons $v = 2ax$, alors $dv = 2adx$. Si maintenant nous insérons le facteur $2a$ avant dx et le facteur $\frac{1}{2a}$ avant le signe d'intégration, nous obtenons

$$\int \sin 2ax dx = \frac{1}{2a}\int \sin 2ax \cdot 2adx$$

$$= \frac{1}{2a}\int \sin 2ax \cdot d(2ax) = \frac{1}{2a}(-\cos 2ax) + C \quad \text{d'après (8).}$$

$$= -\frac{\cos 2ax}{2a} + C.$$

2. $\int \cos mx dx = \frac{1}{m} \sin mx + C.$

3. $\int \operatorname{tg} bx dx = \frac{1}{b} \log \sec bx + C.$

4. $\int \sec ax dx = \frac{1}{a} \log (\sec ax + \operatorname{tg} ax) + C.$

5. $\int \operatorname{cosec} \frac{x}{a} dx = a \log \left(\operatorname{cosec} \frac{x}{a} - \operatorname{cotg} \frac{x}{a}\right) + C.$

6. $\int \sec 3t \operatorname{tg} 3t dt = \frac{1}{3} \sec 3t + C.$

7. $\int \operatorname{cosec} ay \operatorname{cotg} ay dy = -\frac{1}{a} \operatorname{cosec} ay + C.$

8. $\int \operatorname{cosec}^2 3x dx = -\frac{1}{3} \operatorname{cotg} 3x + C.$

9. $\int \operatorname{cotg} \frac{x}{2} dx = 2 \log \sin \frac{x}{2} + C.$

10. $\int \sec^2 x^3 \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C.$

12. $\int \frac{ds}{\cos^2 s} = \operatorname{tg} s + C.$

13. $\int (\operatorname{tg} \theta + \operatorname{cotg} \theta)^2 d\theta = \operatorname{tg} \theta - \operatorname{cotg} \theta + C.$

14. $\int (\sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha)^2 d\alpha = 2(\operatorname{tg} \alpha - \sec \alpha) - \alpha + C.$

15. $\int (\operatorname{tg} 2s - 1)^2 ds = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2s + \log \cos 2s + C.$

16. $\int \left(\cos \frac{\theta}{3} - \sin 3\theta\right) d\theta = 3 \sin \frac{\theta}{3} + \frac{1}{3} \cos 3\theta + C.$

17. $\int\left(\sin ax + \sin\frac{x}{a}\right)dx = -\frac{1}{a}\cos ax - a\cos\frac{x}{a} + C.$

18. $\int k\cos(a+by)dy = \frac{k}{b}\sin(a+by) + C.$

19. $\int \operatorname{cosec}^2 x^3 \cdot x^2 dx = -\frac{1}{3}\operatorname{cotg} x^3 + C.$

20. $\int \cos(\log x)\frac{dx}{x} = \sin(\log x) + C.$

21. $\int\frac{dx}{1+\cos x} = -\operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x + C = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

Note. — Multiplier le numérateur et le dénominateur par $1 - \cos x$ et réduire avant d'intégrer.

22. $\int\frac{dx}{1+\sin x} = \operatorname{tg} x - \sec x + C.$

23. Intégrer les fonctions ci-après et vérifier les résultats par différentiation :

(a) $\int \sin\frac{2x}{3}dx.$

(b) $\int \operatorname{cotg} e^x \cdot e^x dx.$

(c) $\int \sec\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}d\theta.$

(d) $\int \operatorname{cosec}\frac{a\varphi}{b}\operatorname{cotg}\frac{a\varphi}{b}d\varphi.$

(e) $\int \cos(b+ax)dx.$

(f) $\int \sec^2 2ax\,dx.$

(g) $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}.$

(h) $\int\frac{dt}{\operatorname{tg} 5t}.$

(i) $\int \operatorname{tg}\frac{x}{3}dx.$

(j) $\int \operatorname{cosec}^2(a-bx)dx.$

(k) $\int\frac{d\theta}{\sin^2 4\theta}.$

(l) $\int\frac{dy}{\operatorname{cotg} 7y}.$

(m) $\int\left(\sec 2\theta - \operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}\right)d\theta.$

(n) $\int(\operatorname{tg}\varphi + \sec\varphi)^2 d\varphi.$

(o) $\int\left(\operatorname{tg} 4s - \operatorname{cotg}\frac{s}{4}\right)ds.$

(p) $\int(\operatorname{cotg} x - 1)^2 dx.$

(q) $\int(\sec t - 1)^2 dt.$

(r) $\int(1 - \operatorname{cosec} y)^2 dy.$

(s) $\int\frac{dx}{1-\cos x}.$

(t) $\int\frac{dx}{1-\sin x}.$

(u) $\int\frac{2a\,dt}{\sin bt}.$

(v) $\int\frac{5b\,d\theta}{\cos 8\theta}.$

Démonstration de (18). — Puisque

$$d\left(\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{a} + C\right) = \frac{1}{a}\frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{1+\left(\frac{v}{a}\right)^2} = \frac{dv}{v^2+a^2},$$

d'après **XX**, p. 40

nous obtenons $$\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{a} + C.\ (*)$$

Démonstration de (19). — Puisque

$$\frac{1}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{v-a} - \frac{1}{v+a}\right),\ (**)$$

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{v-a} - \frac{1}{v+a}\right)dv$$

$$= \frac{1}{2a}[\log(v-a) - \log(v+a)] + C \quad \text{d'après (5)}$$

$$= \frac{1}{2a}\log\frac{v-a}{v+a} + C.$$

Démonstration de (20). — Puisque

$$d\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{v}{a} + C\right) = \frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{a}\right)^2}} = \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}},$$

d'après **XVIII, p. 40**

nous obtenons $$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{v}{a} + C.$$

Démonstration de (21). — Supposons que $v = a \operatorname{tg} z$, où z est une nouvelle variable.

En différentiant, on a $dv = a \sec^2 z dz$.

D'où, par substitution,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \int \frac{a \sec^2 z dz}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 z + a^2}} = \int \frac{\sec^2 z dz}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1}}$$

$$= \int \sec z dz = \log(\sec z + \operatorname{tg} z) + C \quad \text{d'après (16)}$$

$$= \log\left(\operatorname{tg} z + \sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1}\right) + c. \quad \text{D'après 28, p. 2.}$$

(*) On a également

$$d\left(\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cotg}\frac{v}{a} + C\right) = -\frac{dv}{v^2+a^2} \quad \text{et} \quad \int \frac{dv}{v^2+a^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cotg}\frac{v}{a} + C'.$$

Par suite, $$\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cotg}\frac{v}{a} + C'.$$

Puisque $\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{a} + \operatorname{arc\,cotg}\frac{v}{a} = \frac{\pi}{2}$, nous voyons qu'un résultat peut aisément être transformé dans l'autre. On peut donner une discussion semblable pour (20) en ce qui concerne $\operatorname{arc\,sin}\frac{v}{a}$ et $\operatorname{arc\,cos}\frac{v}{a}$ et pour (23) en ce qui concerne $\operatorname{arc\,sec}\frac{v}{a}$ et $\operatorname{arc\,cosec}\frac{v}{a}$.

(**) En remplaçant la fraction donnée par deux fractions partielles (voir 1er cas, p. 376).

Mais $\operatorname{tg} z = \frac{v}{a}$; par suite

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + a^2}} = \log\left(\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2} + 1}\right) + c$$
$$= \log \frac{v + \sqrt{v^2 + a^2}}{a} + c$$
$$= \log\left(v + \sqrt{v^2 + a^2}\right) - \log a + c.$$

En posant $C = -\log a + c$, nous obtenons

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + a^2}} = \log\left(v + \sqrt{v^2 + a^2}\right) + C.$$

De même, en supposant $v = a \sec z$, $dv = a \sec z \operatorname{tg} z dz$, nous obtenons

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec z \operatorname{tg} z dz}{\sqrt{a^2 \sec^2 z - a^2}} = \int \sec z dz$$
$$= \log(\sec z + \operatorname{tg} z) + c \qquad \text{d'après } (\mathbf{16})$$
$$= \log\left(\sec z + \sqrt{\sec^2 z - 1}\right) + c \qquad \text{d'après 28, p. 2}$$
$$= \log\left(\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1}\right) + c = \log\left(v + \sqrt{v^2 - a^2}\right) + C.$$

Démonstrations de (22) et de (23). — Ces démonstrations résultent immédiatement des formules de différentiation correspondantes, **XXII** et **XXIV**, p. 40.

Un grand nombre de formes fractionnaires à intégrer ont un seul terme au numérateur tandis que le dénominateur est une expression du second degré avec ou sans radical. Le tableau suivant aidera le lecteur dans le choix de la bonne formule.

	NUMÉRATEUR DU PREMIER DEGRÉ	NUMÉRATEUR DU DEGRÉ ZÉRO
Pas de radical au dénominateur.	$\int \frac{dv}{v} = \log v + C.$	$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{a} + C$, ou $\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{v - a}{v + a} + C.$
Radical au dénominateur.	$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C.$ $(n = -\frac{1}{2})$	$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \arcsin \frac{v}{a} + C$, ou $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \log\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C.$

Le lecteur doit s'exercer à intégrer oralement les formes simples et à dire par simple examen quelles sont les formules qui peuvent être appliquées pour intégrer des exemples choisis au hasard.

EXEMPLES

A l'aide des formules (18)-(23), vérifier les intégrations suivantes :

1. $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{6} \text{arc tg} \frac{2x}{3} + C.$

Solution. Cette intégrale ressemble à (18), car posons $v^2 = 4x^2$ et $a^2 = 9$; alors $v = 2x$, $dv = 2dx$ et $a = 3$. Par suite, si nous multiplions le numérateur par 2 et que nous divisions par 2 devant le signe d'intégration, nous obtenons

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x)^2+(3)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+(3)^2}$$

$$= \frac{1}{6} \text{arc tg} \frac{2x}{3} + C. \qquad \text{D'après (18).}$$

2. $\int \frac{dx}{9x^2-4} = \frac{1}{12} \log \frac{3x-2}{3x+2} + C.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \frac{1}{3} \text{arc sin} \frac{3x}{4} + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \text{arc sin} \frac{x}{3} + C.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} = \log\left(x+\sqrt{x^2-9}\right) + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \log\left(x+\sqrt{x^2+9}\right) + C.$

7. $\int \frac{5dx}{x^2+9} = \frac{5}{3} \text{arc tg} \frac{x}{3} + C.$

8. $\int \frac{bdx}{a^2x^2-c^2} = \frac{b}{2ac} \log \frac{ax-c}{ax+c} + C.$

9. $\int \frac{7x^2dx}{5-x^6} = \frac{7}{6\sqrt{5}} \log \frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}} + C$

10. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{5}{2} \text{arc sin}\, x^2 + C.$

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{3} \text{arc sec} \frac{2x}{3} + C.$

12. $\int \frac{axdx}{x^4+e^4} = \frac{a}{2e^2} \text{arc tg} \frac{x^2}{e^2} + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \text{arc sin vers} \frac{x}{3} + C.$

14. $\int \frac{edt}{a^2-b^2t^2} = \frac{e}{2ab} \log \frac{bt+a}{bt-a} + C.$

15. $\int \frac{e^t dt}{\sqrt{1-e^{2t}}} = \text{arc sin}\, e^t + C.$

16. $\int \frac{7ds}{\sqrt{3-5s^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} \text{arc sin} \sqrt{\frac{5}{3}}\, s + C.$

17. $\int \frac{dv}{\sqrt{av^2-b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log\left(\sqrt{a}v + \sqrt{av^2-b}\right) + C.$

18. $\int \frac{\cos \alpha d\alpha}{a^2+\sin^2\alpha} = \frac{1}{a} \text{arc tg} \left(\frac{\sin \alpha}{a}\right) + C.$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\log^2 x}} = \text{arc sin} (\log x) + C.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+c^2x^2}} = \frac{1}{c} \log\left(cx+\sqrt{b^2+c^2x^2}\right) + C.$

21. $\int \frac{dy}{\sqrt{b^2y^2 - a^2}} = \frac{1}{b} \log\left(by + \sqrt{b^2y^2 - a^2}\right) + C.$

22. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - (u + b)^2}} = \text{arc sin} \frac{u + b}{a} + C.$

23. $\int \frac{adz}{(z - e)^2 + b^2} = \frac{a}{b} \text{arc tg} \frac{z - e}{b} + C.$

24. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{2} \text{arc tg} \frac{x + 1}{2} + C.$

Note. — En complétant le carré au dénominateur, on peut ramener cette expression à une forme semblable à celle de l'exercice 7. Ainsi,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 4} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 4}$$
$$= \tfrac{1}{2} \text{arc tg} \frac{x + 1}{2} + C. \qquad \text{D'après (18).}$$

Ici $v = x + 1$ et $a = 2$.

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}} = \text{arc sin} \frac{2x - 1}{3} + C.$

Note. — Ramener cette intégrale à la forme de l'exercice 16 en complétant le carré. Ainsi,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - (x^2 - x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}}}$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \text{arc sin} \frac{2x - 1}{3} + C. \qquad \text{D'après (20).}$$

Ici $v = x - \frac{1}{2}$ et $a = \frac{3}{2}$.

26. $\int \frac{dx}{1 + x + x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$

27. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \text{arc tg} \frac{3x - 1}{\sqrt{11}} + C.$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x - x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2} - \left(x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{64}\right) + \frac{9}{64}}}$

$$= \frac{1}{2} \text{arc sin} \frac{8x + 3}{\sqrt{41}} + C.$$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} = \text{arc sin}\,(2x - 3) + C.$

30. $\int \frac{dv}{v^2 - 6v + 5} = \frac{1}{4} \log \frac{v - 5}{v - 1} + C.$

31. $\int \frac{dy}{y^2 + 3y + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{2y + 3 - \sqrt{5}}{2y + 3 + \sqrt{5}} + C.$

32. $\int \frac{dt}{\sqrt{1 + t + t^2}} = \log\left(t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + 1}\right) + C.$

33. $\int \frac{dz}{2z^2 - 2z + 1} = \text{arc tg}\,(2z - 1) + C.$

34. $\int \frac{ds}{\sqrt{2as+s^2}} = \log\left(s+a+\sqrt{2as+s^2}\right)+C.$

35. $\int \frac{dx}{x\sqrt{c^2x^2-a^2b^2}} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,sec}\frac{cx}{ab}+C.$

36. $\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{x^3-9x^6}} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sin\,vers} 18x^3+C.$

37. $\int \frac{(b+ex)dx}{a^2+x^2} = \frac{b}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+\frac{e}{2}\log(a^2+x^2)+C.$

NOTE. — Une fraction qui contient plus d'un terme au numérateur peut être décomposée en une somme de deux ou plusieurs fractions ayant les différents termes du numérateur primitif comme numérateurs, tous les dénominateurs étant semblables au dénominateur de la fraction d'origine. Ainsi, le dernier exemple peut s'écrire

$$\int \frac{(b+ex)dx}{a^2+x^2} = \int \frac{bdx}{a^2+x^2} + \int \frac{exdx}{a^2+x^2} = b\int \frac{dx}{a^2+x^2} + e\int \frac{xdx}{a^2+x^2},$$

chaque terme étant intégré séparément.

38. $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2+9} = \frac{3}{2}\log(x^2+9)-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}+C.$

39. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}dx = \frac{1}{3}\log(3x^2-2)-\frac{5}{2\sqrt{6}}\log\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}+C.$

40. $\int \frac{3s-2}{\sqrt{9-s^2}}ds = -3\sqrt{9-s^2}-2\operatorname{arc\,sin}\frac{s}{3}+C.$

41. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx = \sqrt{x^2+4}+3\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C.$

42. $\int \frac{(5t-1)dt}{\sqrt{3t^2-9}} = \frac{5}{3}\sqrt{3t^2-9}-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(t\sqrt{3}+\sqrt{3t^2-9}\right)+C.$

43. Intégrer les expressions suivantes et vérifier les résultats par différentiation.

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}}$.
(b) $\int \frac{adx}{3-12x^2}$.
(c) $\int \frac{2dt}{3t^2-5t+2}$.
(d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-4}}$.
(e) $\int \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{9-4\cos^2\theta}}$.
(f) $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2+4}$.
(g) $\int \frac{y+3}{\sqrt{9y^2+1}}dy$.
(h) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$.
(i) $\int \frac{2dx}{\sqrt{25x^2-4}}$.
(j) $\int \frac{bdy}{12y^2+3}$.
(k) $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{3\varphi^2-2}}$.
(l) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-16}}$.
(m) $\int \frac{dz}{z\sqrt{4-(\log z)^2}}$.
(n) $\int \frac{(t+2)dt}{4t^2-3}$.
(o) $\int \frac{(ax-b)dx}{\sqrt{1+9x^2}}$.
(p) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$.
(q) $\int \frac{3dx}{\sqrt{5x^2+1}}$.
(r) $\int \frac{dw}{12w^2-3}$.
(s) $\int \frac{3d\theta}{\sqrt{2-3\theta^2}}$.
(t) $\int \frac{dt}{\sqrt{7t-4t^2+5}}$.
(u) $\int \frac{e^{ax}dx}{e^{2ax}+1}$.
(v) $\int \frac{(3s-5)ds}{\sqrt{1-9s^2}}$.
(w) $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}}$.
(x) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4t+2}}$.

168. Différentielles trigonométriques. — Nous allons maintenant considérer quelques différentielles trigonométriques qui se présentent fréquemment et qui peuvent être intégrées rapidement en les ramenant aux formes classiques au moyen de réductions trigonométriques simples.

Exemple I. — *Trouver* $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

Quand m ou n est un entier impair positif, peu importe ce que l'autre puisse être, cette intégration peut être effectuée au moyen de la formule (4),

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1},$$

car l'intégrale est réductible à la forme

$$\int (\textit{termes comprenant seulement } \cos x) \sin x dx$$

quand l'exposant de $\sin x$ est impair, et à la forme

$$\int (\textit{termes comprenant seulement } \sin x) \cos x dx$$

quand l'exposant de $\cos x$ est impair.

Nous allons illustrer ces considérations par des exemples.

Exemple I. — Trouver $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$.

Solution. $\int \sin^2 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx$

$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx \qquad \text{d'après 28, p. 2}$$

$$= \int (\sin^2 x - 2 \sin^4 x + \sin^6 x) \cos x dx$$

$$= \int (\sin x)^2 \cos x dx - 2 \int (\sin x)^4 \cos x dx + \int (\sin x)^6 \cos x dx$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2 \sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C. \qquad \text{D'après (4)}$$

Ici $v = \sin x$, $dv = \cos x dx$ et $n = 2$, 4 et 6 respectivement.

Exemple II. — Trouver $\int \cos^3 x dx$.

Solution. $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx$

$$= \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x dx$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

EXEMPLES

1. $\int \sin^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$

2. $\int \sin^2 x \cos x\,dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

3. $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$ (*)

4. $\int \cos^2 \alpha \sin \alpha\,d\alpha = -\frac{\cos^3 \alpha}{3} + C.$

5. $\int \sin^3 6\theta \cos 6\theta\,d\theta = \frac{\sin^4 6\theta}{24} + C.$

6. $\int \cos^3 2\theta \sin 2\theta\,d\theta = -\frac{\cos^4 2\theta}{8} + C.$

7. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x} = \operatorname{cosec} x - \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + C.$

8. $\int \frac{\sin^3 \alpha\,d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \sec \alpha + \cos \alpha + C.$

9. $\int \cos^4 x \sin^3 x\,dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C.$

10. $\int \sin^5 x\,dx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$

11. $\int \cos^5 x\,dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

12. $\int \sin^{\frac{3}{7}} \varphi \cos^3 \varphi\,d\varphi = \frac{7}{10}\sin^{\frac{10}{7}} \varphi - \frac{7}{24}\sin^{\frac{24}{7}} \varphi + C.$

13. $\int \sin^{\frac{2}{3}} \theta \cos^5 \theta\,d\theta = \frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}} \theta - \frac{6}{11}\sin^{\frac{11}{3}} \theta + \frac{3}{17}\sin^{\frac{11}{3}} \theta + C.$

14. $\int \frac{\sin^5 y}{\sqrt{\cos y}}\,dy = -2\sqrt{\cos y}\left(1 - \frac{2}{5}\cos^2 y + \frac{1}{9}\cos^4 y\right) + C.$

15. $\int \frac{\cos^5 t\,dt}{\sqrt[3]{\sin t}} = \frac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}} t\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 t + \frac{1}{7}\sin^4 t\right) + C.$

16. Intégrer les expressions suivantes et vérifier les résultats par différentiation.

(a) $\int \sin^3 2\theta\,d\theta.$ (d) $\int \sin^3 t \cos^3 t\,dt.$ (g) $\int \sin^2 \frac{2x}{3} \cos \frac{2x}{3}\,dx.$

(b) $\int \cos^3 \frac{\theta}{2}\,d\theta.$ (e) $\int \cos \frac{x}{a} \sin \frac{x}{a}\,dx.$ (h) $\int \cos^2 3x \sin 3x\,dx.$

(c) $\int \sin 2x \cos 2x\,dx.$ (f) $\int \cos^5 ax \sin ax\,dx.$ (i) $\int \sin^5 bs \cos bs\,ds.$

(*) Nous avons intégré d'après la formule (4) § 167, en prenant $n = 1$, $v = \sin x$, $dv = \cos x\,dx$. Pour montrer comment une réponse peut prendre différentes formes lorsque plusieurs méthodes d'intégration sont possibles, prenons $n = 1$, $v = \cos x$, $dv = -\sin x\,dx$ et intégrons encore au moyen de la formule (4). Il vient

$$\int \sin x \cos x\,dx = -\int (\cos x)(-\sin x\,dx) = -\frac{\cos^2 x}{2} + C';$$

ce résultat ne diffère du premier que par la constante arbitraire, car

$$-\frac{\cos^2 x}{2} + C' = -\frac{1 - \sin^2 x}{2} + C' = -\frac{1}{2} + \frac{\sin^2 x}{2} + C' = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2} + C'.$$

Par suite, en comparant les deux réponses,

$$C = -\tfrac{1}{2} + C'.$$

(j) $\int \cos^3 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi$. (l) $\int \sin^5 nt dt$. (n) $\int \cos^4 y \sin y dy$.

(k) $\int \sin^3 mt \cos^2 mt dt$. (m) $\int \sin^4 x \cos x dx$. (o) $\int \cos^3 (a + bt) dt$.

Exemple II. — *Trouver* $\int \text{tg}^n x dx$ *ou* $\int \text{cotg}^n x dx$.

Ces formes peuvent être intégrées rapidement quand n est entier, en suivant à peu près la même marche que dans les exemples qui précèdent.

Exemple. — Trouver $\int \text{tg}^4 x dx$.

Solution.
$$\int \text{tg}^4 x dx = \int \text{tg}^2 x (\sec^2 x - 1) dx \quad \text{d'après 28, p. 2}$$
$$= \int \text{tg}^2 x \sec^2 x dx - \int \text{tg}^2 x dx$$
$$= \int \text{tg}^2 x d(\text{tg}\, x) - \int (\sec^2 x - 1) dx$$
$$= \frac{\text{tg}^3 x}{3} - \text{tg}\, x + x + C.$$

Exemple III. — *Trouver* $\int \sec^n x dx$ *ou* $\int \text{cosec}^n x dx$.

Ces formes peuvent être facilement intégrées quand n est un entier pair positif.

Exemple. — Trouver $\int \sec^6 x dx$.

Solution.
$$\int \sec^6 x dx = \int (1 + \text{tg}^2 x)^2 \sec^2 x dx$$
$$= \int \text{tg}^4 x \sec^2 x dx + 2 \int \text{tg}^2 x \sec^2 x dx + \int \sec^2 x dx$$
$$= \frac{\text{tg}^5 x}{5} + 2 \frac{\text{tg}^3 x}{3} + \text{tg}\, x + C.$$

Quand n est un entier positif impair plus grand que l'unité, la meilleure méthode est de ramener à la forme sinus ou cosinus et d'utiliser ensuite les formules de réduction p. 348.

Exemple IV. — *Trouver* $\int \text{tg}^m x \sec^n x dx$, *ou* $\int \text{cotg}^m x\, \text{cosec}^n x dx$.

Quand n est un entier positif pair, on procède comme dans l'exemple III.

Exemple I. — Trouver $\int \text{tg}^6 x \sec^4 x dx$.

Solution. $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx = \int \operatorname{tg}^6 x (\operatorname{tg}^2 x + 1) \sec^2 x dx$ d'après 28, p. 2

$$= \int (\operatorname{tg} x)^8 \sec^2 x dx + \int \operatorname{tg}^6 x \sec^2 x dx$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^9 x}{9} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C. \qquad \text{D'après (4)}$$

Ici $v = \operatorname{tg} x$, $dv = \sec^2 x dx$, etc.

Quand m est impair, nous pouvons procéder comme dans l'exemple suivant.

Exemple II. — Trouver $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^3 x dx$.

Solution. $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^3 x dx = \int \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x \sec x \operatorname{tg} x dx$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \operatorname{tg} x dx \qquad \text{d'après 28, p. 2}$$

$$= \int (\sec^6 x - 2 \sec^4 x + \sec^2 x) \sec x \operatorname{tg} x dx$$

$$= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{2 \sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + C. \qquad \text{D'après (4)}$$

Ici $v = \sec x$, $dv = \sec x \operatorname{tg} x dx$, etc.

EXEMPLES

1. $\int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \log \cos x + C.$

2. $\int \operatorname{tg}^2 2x dx = \frac{\operatorname{tg} 2x}{2} - x + C.$

3. $\int \operatorname{cotg}^3 x dx = -\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} - \log \sin x + C.$

4. $\int \operatorname{cotg}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x - x + C.$

5. $\int \operatorname{cotg}^4 \frac{x}{3} dx = -\operatorname{cotg}^3 \frac{x}{3} + 3 \operatorname{cotg} \frac{x}{3} + x + C.$

6. $\int \operatorname{cotg}^5 \alpha d\alpha = -\frac{1}{4} \operatorname{cotg}^4 \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \alpha + \log \sin \alpha + C.$

7. $\int \operatorname{tg}^5 \frac{y}{4} dy = \operatorname{tg}^4 \frac{y}{4} - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{y}{4} + 4 \log \sec \frac{y}{4} + C.$

8. $\int \sec^8 x dx = \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{3 \operatorname{tg}^5 x}{5} + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C.$

9. $\int \operatorname{cosec}^6 x dx = -\operatorname{cotg} x - \frac{2}{3} \operatorname{cotg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{cotg}^5 x + C.$

10. $\int \operatorname{tg}^4 \varphi \sec^4 \varphi d\varphi = \frac{\operatorname{tg}^7 \varphi}{7} + \frac{\operatorname{tg}^5 \varphi}{5} + C.$

11. $\int \operatorname{tg}^3 \theta \sec^5 \theta d\theta = \frac{1}{7} \sec^7 \theta - \frac{1}{5} \sec^5 \theta + C.$

12. $\int \operatorname{cotg}^5 x \operatorname{cosec}^4 x dx = -\frac{\operatorname{cotg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{cotg}^8 x}{8} + C.$

13. $\int \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x \sec^4 x dx = \frac{2 \operatorname{tg}^{\frac{5}{2}} x}{5} + \frac{2 \operatorname{tg}^{\frac{9}{2}} x}{9} + C.$

14. $\int \operatorname{tg}^5 y \sec^{\frac{3}{2}} y dy = 2 \sec^{\frac{3}{2}} y \left(\frac{\sec^4 y}{11} - \frac{2 \sec^2 y}{7} + \frac{1}{3} \right) + C.$

15. $\int \frac{\sec^6 \alpha d\alpha}{\operatorname{tg}^4 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{cotg} \alpha - \frac{\operatorname{cotg}^3 \alpha}{3} + C.$

16. $\int (\operatorname{tg}^2 z + \operatorname{tg}^4 z) dz = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 z + C.$

17. $\int (\operatorname{tg} t + \operatorname{cotg} t)^3 dt = \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{cotg}^2 t) + \log \operatorname{tg}^2 t + C.$

18. Intégrer les expressions ci-après et démontrer les résultats par différentiation :

(a) $\int \operatorname{tg}^2 2t dt.$

(b) $\int \operatorname{cotg}^2 \frac{t}{2} dt.$

(c) $\int \operatorname{tg}^3 ax dx.$

(d) $\int \operatorname{cotg}^3 \frac{x}{a} dx.$

(e) $\int \frac{2dt}{\operatorname{tg}^4 t}.$

(f) $\int \frac{3d\theta}{\operatorname{cotg}^2 4\theta}.$

(g) $\int \sec^2 \theta \operatorname{tg}^2 \theta d\theta.$

(h) $\int \operatorname{cosec}^2 \varphi \operatorname{cotg}^2 \varphi d\varphi.$

(i) $\int \frac{adx}{\operatorname{tg}^2 4x}.$

(j) $\int \operatorname{tg}^3 t \sec^2 t dt.$

(k) $\int \operatorname{cotg}^5 y \operatorname{cosec}^2 y dy.$

(l) $\int \frac{bd\theta}{\operatorname{cotg}^3 \theta}.$

(m) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$

(n) $\int \frac{\operatorname{cotg}^{\frac{2}{3}} x}{\sin^2 x} dx.$

(o) $\int \sec^4 x dx.$

(p) $\int \operatorname{cosec}^4 x dx.$

(q) $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx.$

(r) $\int \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec}^2 x dx.$

Exemple V. — *Trouver* $\int \sin^m x \cos^n x dx$ *au moyen des angles multiples.*

Quand m ou n est un entier positif impair, la méthode la plus courte est celle de l'exemple I, p. 343.

Quand m et n sont tous les deux des entiers positifs pairs, l'expression différentielle donnée peut être transformée par des substitutions trigonométriques convenables en une expression contenant des sinus et des cosinus d'angles multiples et intégrée ensuite. A cet effet, nous emploierons les formules ci-après :

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u, \qquad 36, \text{ p. } 2$$

$$\sin^2 u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2u, \qquad 38, \text{ p. } 2$$

$$\cos^2 u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u. \qquad 39, \text{ p. } 2$$

EXEMPLE I. — Trouver $\int \cos^2 x dx$.

Solution. $\int \cos^2 x dx = \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)dx$ 38, p. 2

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

EXEMPLE II. — Trouver $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Solution. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx$ 36, p. 2

$= \frac{1}{4}\int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x)dx$ 38, p. 2

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

EXEMPLE III. — Trouver $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Solution. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx$

$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2x (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)dx$ 36, p. 2 ; 38, p. 2

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x)dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Exemple VI. — *Trouver* $\int \sin mx \cos nx dx$,

$\int \sin mx \sin nx dx$, *ou* $\int \cos mx \cos nx dx$, *quand* $m \neq n$.

D'après 41, p. 2,

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\sin(m+n)x + \frac{1}{2}\sin(m-n)x.$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int \sin(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int \sin(m-n)x dx$$

$$= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

De même, nous trouvons

$$\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

EXEMPLES

1. $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

2. $\int \sin^4 x dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$

3. $\int \cos^4 x dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$

4. $\int \sin^6 x dx = \frac{1}{16}\left(5x - 4 \sin 2x + \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{3}{4} \sin 4x\right) + C.$

5. $\int \cos^6 x dx = \frac{1}{16}\left(5x + 4 \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{3}{4} \sin 4x\right) + C.$

6. $\int \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = -\frac{\sin^3 2\alpha}{48} + \frac{\alpha}{16} - \frac{\sin 4\alpha}{64} + C.$

7. $\int \sin^4 t \cos^4 t dt = \frac{1}{128}\left(3t - \sin 4t + \frac{\sin 8t}{8}\right) + C.$

8. $\int \cos^6 x \sin^2 x dx = \frac{1}{128}\left(5x + \frac{8}{3} \sin^3 2x - \sin 4x - \frac{\sin 8x}{8}\right) + C.$

9. $\int \cos 3y \sin 5y dy = -\frac{\cos 8y}{16} - \frac{\cos 2y}{4} + C.$

10. $\int \sin 5z \sin 6z dz = -\frac{\sin 11z}{22} + \frac{\sin z}{2} + C.$

11. $\int \cos 4s \cos 7s ds = \frac{\sin 11s}{22} + \frac{\sin 3s}{6} + C.$

169. Intégration des expressions contenant $\sqrt{a^2 - x^2}$ ou $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ par une substitution trigonométrique. — Dans beaucoup de cas, la méthode la plus courte pour intégrer des expressions de cette sorte est de changer la variable comme il suit :

quand $\sqrt{a^2 - x^2}$ *se présente, poser* $x = a \sin z$,
quand $\sqrt{a^2 + x^2}$ *se présente, poser* $x = a \operatorname{tg} z$,
quand $\sqrt{x^2 - a^2}$ *se présente, poser* $x = a \sec z$ (*).

(*) On peut aussi utiliser respectivement les substitutions $x = a \cos z$, $x = a \operatorname{cotg} z$ et $x = a \operatorname{cosec} z$.

EXEMPLE I. — Trouver $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Solution. Posons $x = a \sin z$; alors $dx = a \cos z dz$ et

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a \cos z dz}{(a^2 - a^2 \sin^2 z)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a \cos z dz}{a^3 \cos^3 z}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{a^2} \int \sec^2 z dz = \frac{\operatorname{tg} z}{a^2} + C$$

$$= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

Fig. 191.

[Puisque $\sin z = \frac{x}{a}$, traçons un triangle rectangle avec x comme côté opposé à l'angle aigu z et a comme hypoténuse. Alors, le côté adjacent sera $\sqrt{a^2 - x^2}$ et $\operatorname{tg} z = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.]

EXEMPLE II. — Trouver $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$.

Solution. Posons $x = \operatorname{tg} z$ (*);

alors $dx = \sec^2 z dz$,

et

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{\sec^2 z dz}{\operatorname{tg} z \sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1}} = \int \frac{\sec^2 z dz}{\operatorname{tg} z \sec z}$$

$$= \int \frac{\sec z}{\operatorname{tg} z} dz = \int \frac{dz}{\sin z} = \int \operatorname{cosec} z dz.$$

$$= \log (\operatorname{cosec} z - \operatorname{cotg} z) = \log \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} + C.$$

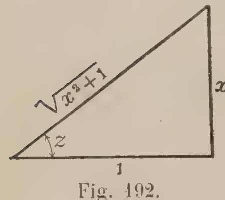


Fig. 192.

[Puisque $\operatorname{tg} z = x$, $\operatorname{cotg} z = \frac{1}{x}$ et $\operatorname{cosec} z = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$].

EXEMPLES

1. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \operatorname{arc\,sec} \frac{x}{a} + C.$

2. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + C.$

3. $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx = \log \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C.$

4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} x - \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C.$

5. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}}{3x^3} + C.$

(*) Dans cet exemple $a = 1$.

6. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C.$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx = \frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3} + C.$

EXEMPLES VARIÉS

1. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

2. $\int \frac{(x^2+1)dx}{x+2}.$

3. $\int \frac{(ax+b)dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

4. $\int \mathrm{tg}^3 \frac{\theta}{3} d\theta.$

5. $\int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{1-5x^2}}.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}}.$

7. $\int \frac{5-3t}{\sqrt{1-a^2t^2}}dt.$

8. $\int \frac{d\varphi}{2\varphi^2-\varphi+1}.$

9. $\int \frac{4x^2dx}{1-4x^4}.$

10. $\int (\mathrm{tg}\, 3x - 1)^2 dx.$

11. $\int \mathrm{tg}^3\, \theta \sec^3 \theta d\theta.$

12. $\int \sin^4 \frac{x}{2} dx.$

13. $\int \frac{d\theta}{\cos^4 \theta}.$

14. $\int \frac{dt}{t^2+6t+5}.$

15. $\int \frac{3\cos\theta d\theta}{5-7\sin\theta}.$

16. $\int \frac{(a^{2x}+1)^2}{\sqrt{a^x}}dx.$

17. $\int \frac{ds}{\sqrt{1+3s-s^2}}.$

18. $\int \cos^5 \frac{x}{5} dx.$

19. $\int \frac{dx}{x^2+2x+1}.$

20. $\int \frac{x^3dx}{x-3}.$

21. $\int \frac{d\theta}{\sin 2\theta}.$

22. $\int \frac{dt}{\cos 3t}.$

23. $\int \frac{5dx}{\sqrt{x-3}}.$

24. $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-6y+10}}.$

25. $\int \frac{axdx}{b-cx^2}.$

26. $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^3}.$

27. $\int \frac{dx}{(a+bx)^n}.$

28. $\int \frac{1+\sec^2\theta}{1+\mathrm{tg}\,\theta}d\theta.$

29. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}.$

30. $\int (a-3x^2)^m 2xdx.$

31. $\int \frac{2x^2dx}{(a^3-x^3)^{\frac{3}{2}}}.$

32. $\int \frac{(a+x)^3}{\sqrt{x}}dx.$

33. $\int \frac{\log^3 xdx}{x}.$

34. $\int e^{-ax^3}x^2dx.$

35. $\int \frac{ax-b}{x^2+4m^2}dx.$

36. $\int \frac{1-2x}{9x^2-n^2}dx.$

37. $\int \cos^3 ax \sin axdx.$

38. $\int \mathrm{cotg}^4\, 3aydy.$

39. $\int \sin^2 6xdx.$

40. Les fonctions suivantes ayant été obtenues en différentiant certaines fonctions, trouver ces fonctions et vérifier les résultats par différentiation :

(a) $5x^3 + \sin 2x.$

Solution. Dans cet exemple $(5x^3 + \sin 2x)dx$ est l'expression différentielle à intégrer.

Ainsi $\int (5x^3 + \sin 2x)dx = \frac{5x^4}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + C.$ *Réponse.*

Vérification. $\frac{d}{dx}\left(\frac{5x^4}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + C\right) = 5x^3 + \sin 2x.$

(b) $5x^3 - 6x$.

(c) $2x^2 - 3x - 4$.

(d) $\cos^2 ax + \sin \frac{x}{a}$.

(e) $\sqrt{a + bx}$.

(f) $\frac{ax + b}{bx + a}$.

(g) $\frac{x}{5 + 2x}$.

(h) $\frac{3 + 2x}{x^2 + 1}$.

(i) $\frac{1 - 3x}{4x^2 - 7}$.

(j) $\frac{mx + n}{\sqrt{g^2 - h^2x^2}}$.

(k) $\frac{ax - m}{\sqrt{3 + 4x^2}}$.

(l) $\frac{bt + c}{\sqrt{a^2t^2 - b^2}}$.

(m) $\frac{5 - 6s}{9 - 4s^2}$.

(n) $\frac{z^3}{5 - 2z}$.

(o) $\sin mx \cos mx$.

(p) $\cos^2 4px$.

(q) $\operatorname{tg}^3 \frac{x}{a}$.

(r) $\frac{(1 - 2y)^3}{\sqrt[3]{y}}$.

(s) $\frac{1}{x^2 + 4x - 1}$.

(t) $\sec^4 \frac{ax}{b}$.

(u) $\frac{1}{\sqrt{4 - x^2 + 2x}}$.

(v) $\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$.

(w) $x^3(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$.

(x) $\frac{1}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}$.

(y) $x^2\sqrt{1 + x^2}$.

CHAPITRE XXIII

CONSTANTE D'INTÉGRATION

170. Détermination de la constante d'intégration au moyen des conditions initiales. — Comme on l'a indiqué p. 323, on peut trouver la constante d'intégration dans un cas donné quelconque quand on connaît la valeur de l'intégrale pour une certaine valeur de la variable. En effet, pour pouvoir déterminer la constante d'intégration, il est nécessaire d'avoir certaines données en dehors de l'expression différentielle à intégrer. Éclairons ces considérations au moyen d'un exemple.

Exemple. — Trouver une fonction dont la dérivée première est $3x^2 - 2x + 5$ et qui prenne la valeur 12 quand $x = 1$.

Solution. $(3x^2 - 2x + 5)dx$ est l'expression différentielle à intégrer. Ainsi

$$\int (3x^2 - 2x + 5)dx = x^3 - x^2 + 5x + C,$$

expression dans laquelle C est la constante d'intégration. D'après les conditions du problème, ce résultat doit être égal à 12 quand $x = 1$, c'est-à-dire que

$$12 = 1 - 1 + 5 + C \quad \text{ou} \quad C = 7.$$

Par suite, $x^3 - x^2 + 5x + 7$ est la fonction demandée.

171. Signification géométrique de la constante d'intégration. — Nous allons illustrer ce paragraphe au moyen d'exemples.

Exemple I. — Déterminer l'équation de la courbe en chaque point de laquelle la tangente a pour pente $2x$.

Solution. Puisque la pente de la tangente à une courbe en un point quelconque est $\frac{dy}{dx}$, nous avons, par hypothèse,

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

ou

$$dy = 2xdx.$$

En intégrant $y = 2\int xdx$, ou,

$$\text{(A)} \qquad y = x^2 + C,$$

expression dans laquelle C est la constante d'intégration.

Si, maintenant, nous donnons à C une série de valeurs, soit 6, 0, — 3, nous avons les équations

$$y = x^2 + 6, \quad y = x^2, \quad y = x^2 - 3.$$

Les lieux géométriques de ces équations sont des paraboles dont les axes coïncident avec l'axe des y; elles coupent respectivement l'axe des y aux points d'ordonnées 6, 0, — 3.

Toutes les paraboles (A) (il y en a un nombre infini) ont la même valeur pour $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire qu'elles ont la même direction (ou pente) pour la même valeur de x.

On notera également que la différence dans les longueurs de leurs ordonnées reste la même pour toutes les valeurs de x.

Par suite, toutes les paraboles peuvent être obtenues en déplaçant verticalement l'une quelconque d'entre elles vers le haut ou vers le bas, la valeur de C n'affectant pas dans ce cas la pente de la courbe.

Fig. 193.

Si dans l'exemple qui précède, nous imposions la condition supplémentaire que la courbe passe par le point (1, 4), les coordonnées de ce point devraient alors satisfaire à (A), ce qui donnerait

$$4 = 1 + C, \quad \text{ou} \quad C = 3.$$

Par suite, la courbe particulière cherchée serait la parabole $y = x^2 + 3$.

Exemple II. — Déterminer l'équation d'une courbe telle que la pente de la tangente à cette courbe en un point quelconque soit le rapport changé de signe de l'abscisse à l'ordonnée.

Solution. La condition du problème est exprimée par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

ou, en séparant les variables,

$$ydy = -xdx.$$

En intégrant, il vient

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

ou $$x^2 + y^2 = 2C.$$

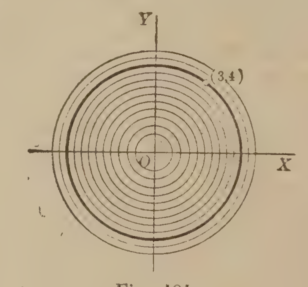
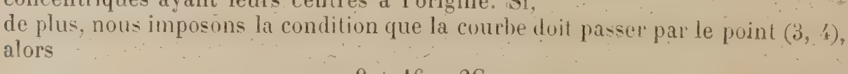


Fig. 194.

Cette équation représente une série de cercles concentriques ayant leurs centres à l'origine. Si, de plus, nous imposons la condition que la courbe doit passer par le point (3, 4), alors



$$9 + 16 = 2C.$$

Par suite, la courbe particulière demandée est le cercle $x^2 + y^2 = 25$.

Les trajectoires orthogonales d'un système de courbes sont un

autre système de courbes dont chacune coupe à angle droit toutes les courbes du premier système. Par suite, la pente de la tangente en un point d'une courbe du nouveau système sera l'inverse changée de signe de la pente de la tangente à la courbe du système donné qui passe par ce point. Illustrons ces considérations par un exemple.

Exemple III. — Trouver l'équation des trajectoires orthogonales du système de cercles de l'exemple II (*fig.* 195).

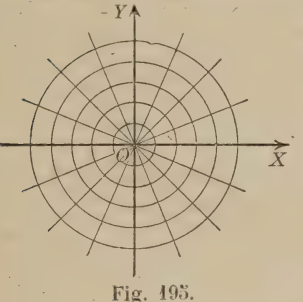


Fig. 195.

Solution. Pour le système orthogonal, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

ou, en séparant les variables,

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

et en intégrant

$$\log y = \log x + \log c = \log cx$$

ou

$$y = cx.$$

Par suite, les trajectoires orthogonales du système de cercles $x^2 + y^2 = C$ sont le système de lignes droites qui passent par l'origine, comme le montre la figure 195.

172. Signification physique de la constante d'intégration. — Les exemples qui suivent illustreront la signification de cette question.

Exemple I. — Trouver les lois régissant le mouvement d'un point qui se déplace suivant une ligne droite avec une accélération constante.

Solution. Puisque l'accélération $\left[\frac{dv}{dt}\right.$, d'après 14, p. 104$\left.\right]$ est constante, soit f, nous avons

$$\frac{dv}{dt} = f,$$

ou

$$dv = fdt.$$

Il vient en intégrant

(A) $$v = ft + C.$$

Pour déterminer C, supposons que la vitesse initiale soit v_0, c'est-à-dire soit

$$v = v_0 \quad \text{quand} \quad t = 0.$$

Ces valeurs substituées dans (A) donnent

$$v_0 = 0 + C \quad \text{ou} \quad C = v_0.$$

Par suite, (A) devient

(B) $$v = ft + v_0.$$

Puisque $v = \frac{ds}{dt}$ [(9), p. 101], nous obtenons d'après (B)

$$\frac{ds}{dt} = ft + v_0,$$

ou

$$ds = ftdt + v_0 dt.$$

En intégrant, on obtient

(C) $$s = \tfrac{1}{2} ft^2 + v_0 t + C.$$

Pour déterminer C, supposons que l'espace initial (= distance) soit s_0, c'est-à-dire posons $s = s_0$ quand $t = 0$.

Ces valeurs substituées dans (C) donnent

$$s_0 = 0 + 0 + C, \quad \text{ou} \quad C = s_0.$$

Par suite, (C) devient

(D) $$s = \tfrac{1}{2} ft^2 + v_0 t + s_0.$$

En substituant les valeurs $f = g$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$, $s = h$ dans (B) et dans (D), nous obtenons les lois du mouvement d'un corps tombant dans le vide en partant de l'état de repos, savoir :

(B_a) $$v = gt, \quad \text{et}$$

(D_a) $$h = \tfrac{1}{2} gt^2.$$

L'élimination de t entre (B_a) et (D_a) donne

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Exemple II. — Discuter le mouvement d'un projectile ayant une vitesse initiale v_0 et formant un angle α avec l'horizontale, la résistance de l'air étant négligée (*fig.* 196).

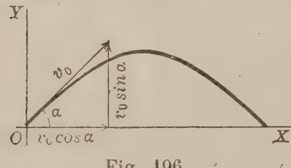


Fig. 196.

Solution. Supposons que le plan XY soit le plan du mouvement, que OX soit horizontal et OY vertical et que le projectile soit lancé à partir de l'origine.

Supposons le projectile soumis seulement à l'action de la pesanteur. Alors, l'accélération dans la direction horizontale est nulle et dans la direction verticale, elle est égale à $-g$. Par suite, d'après (15), p. 104,

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g.$$

En intégrant, il vient

$$v_x = C_1 \quad \text{et} \quad v_y = -gt + C_2.$$

Mais $v_0 \cos \alpha =$ vitesse initiale dans la direction horizontale

et $v_0 \sin \alpha =$ vitesse initiale dans la direction verticale.

Par suite, $C_1 = v_0 \cos \alpha$ et $C_2 = v_0 \sin \alpha$,

ce qui donne

(E) $$v_x = v_0 \cos \alpha \quad \text{et} \quad v_y = -gt + v_0 \sin \alpha.$$

Mais d'après (10) et (11), p. 103,

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Par conséquent, (E) donne

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha,$$

ou $$dx = v_0 \cos \alpha dt \quad \text{et} \quad dy = -gtdt + v_0 \sin \alpha dt.$$

En intégrant, nous obtenons

(F) $$x = v_0 \cos \alpha \cdot t + C_3 \quad \text{et} \quad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t + C_4.$$

Pour déterminer C_3 et C_4, nous observons que quand

$$t = 0, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0.$$

La substitution de ces valeurs dans (F) donne

$$C_3 = 0 \quad \text{et} \quad C_4 = 0.$$

Par suite,

(G) $$x = v_0 \cos \alpha \cdot t \quad \text{et}$$

(H) $$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t.$$

En éliminant t entre (G) et (H), nous obtenons

(I) $$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

formule qui est l'équation de la *trajectoire* et qui montre que le projectile se déplace suivant une parabole.

EXEMPLES

1. Les expressions suivantes ayant été obtenues en différentiant certaines fonctions, trouver la fonction dans chaque cas pour les valeurs données de la variable et de la fonction :

Dérivée de la fonction.	Valeur de la variable.	Valeur correspondante de la fonction.	Réponses.
(*a*) $x - 3.$	$2.$	$9.$	$\frac{x^2}{2} - 3x + 13.$
(*b*) $3 + x - 5x^2.$	$6.$	$-20.$	$304 + 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3}.$
(*c*) $y^3 - b^2y.$	$2.$	$0.$	$\frac{y^4}{4} - \frac{b^2y^2}{2} + 2b^2 - 4.$
(*d*) $\sin \alpha + \cos \alpha.$	$\frac{\pi}{2}.$	$2.$	$\sin \alpha - \cos \alpha + 1.$
(*e*) $\frac{1}{t} - \frac{1}{2-t}.$	$1.$	$0.$	$\log (2t - t^2).$
(*f*) $\sec^2 \theta + \operatorname{tg} \theta.$	$0.$	$5.$	$\operatorname{tg} \theta + \log \sec \theta + 5.$
(*g*) $\frac{1}{x^2 + a^2}.$	$a.$	$\frac{\pi}{2a}.$	$\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + \frac{\pi}{4a}.$
(*h*) $bx^3 + ax + 4.$	$b.$	$10.$	
(*i*) $\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}.$	$4.$	$0.$	
(*j*) $\operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{cosec}^2 \varphi.$	$\frac{\pi}{2}.$	$3.$	
(*k*) $3e^{2t^2}t.$	$0.$	$\frac{7}{4}.$	

2. Trouver les équations du système de courbes telles que la pente de la tangente en un point quelconque est :

(a) x. *Rép.* Paraboles, $y = \frac{x^2}{2} + C$.

(b) $2x - 2$. Paraboles, $y = x^2 - 2x + C$.

(c) $\frac{1}{y}$. Paraboles, $\frac{y^2}{2} = x + C$.

(d) $\frac{x^2}{y}$. Paraboles semicubiques, $\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C$.

(e) $\frac{x}{y^2}$. Paraboles semicubiques, $\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C$.

(f) $3x^2$. Paraboles cubiques, $y = x^3 + C$.

(g) $x^2 + 5x$. Paraboles cubiques, $y = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + C$.

(h) $\frac{1}{y^2}$. Paraboles cubiques, $\frac{y^3}{3} = x + C$.

(i) $\frac{x}{y}$. Hyperboles équilatères, $y^2 - x^2 = C$.

(j) $-\frac{y}{x}$. Hyperboles équilatères, $xy = C$.

(k) $\frac{b^2x}{a^2y}$. Hyperboles, $a^2y^2 - b^2x^2 = C$.

(l) $-\frac{a^2x}{b^2y}$. Ellipses, $b^2y^2 + a^2x^2 = C$.

(m) xy. $\log y = \frac{x^2}{2} + C$, ou $y = ce^{\frac{x^2}{2}}$.

(n) y. $\log y = x + C$, ou $y = ce^x$.

(o) m. Droites, $y = mx + C$.

(p) $\frac{1 + x}{1 - y}$. Cercles, $x^2 + y^2 + 2x - 2y + C = 0$.

3. Trouver les équations des courbes des systèmes trouvés dans l'ex. 2 (a), (c), (d), (i), (j), (m), qui passent par le point (2, — 1).

Rép. (a) $x^2 - 2y - 6 = 0$; (m) $y = -e^{\frac{x^2-4}{2}}$; etc.

4. Trouver les équations des courbes des systèmes trouvés dans l'ex. 2 (b), (e), (g), (h), (o), (p), qui passent par l'origine.

Rép. (b) $y = x^2 - 2x$; (o) $y = mx$; etc.

5. Trouver les équations des trajectoires orthogonales des systèmes de courbes ci-après, trouvés dans l'ex. 2 :

(a) $y = \frac{x^2}{2} + C$, Ex. 2 (a). *Rép.* $y = -\log x + C$.

(b) $\frac{y^2}{2} = x + C$, Ex. 2 (c). $\log y = -x + C$.

(c) $\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C$, Ex. 2 (d). *Rép.* $\log y = \frac{1}{x} + C$.

(d) $y^2 - x^2 = C$, Ex. 2 (i). $xy = C$.

(e) $xy = C$, Ex. 2 (j). $y^2 - x^2 = C$.

(f) $y = ce^x$, Ex. 2 (n). $\frac{y^2}{2} = -x + C$.

(g) $y = mx + C$, Ex. 2 (o). $my + x = C$.

(h) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + C = 0$, Ex. 2 (p). $y - 1 = c(x + 1)$.

6. Trouver l'équation de la courbe dont la sous-normale est constante et égale à $2a$. *Rép.* $y^2 = 4ax + C$, une parabole.

NOTE. — D'après (4), p. 86, sous-normale $= y\frac{dy}{dx}$.

7. Trouver la courbe dont la sous-tangente est constante et égale à a [voir (3), p. 86]. *Rép.* $a \log y = x + C$.

8. Trouver la courbe dont la sous-normale est égale à l'abscisse du point de contact. *Rép.* $y^2 - x^2 = 2C$, une hyperbole équilatère.

9. Trouver la courbe dont la normale est constante ($= R$), en supposant que $y = R$ quand $x = 0$. *Rép.* $x^2 + y^2 = R^2$, un cercle.

NOTE. — D'après (6), p. 86, longueur de la normale $= y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ou, $dx = \pm (R^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} y dy$.

10. Trouver la courbe dont la sous-tangente est égale à trois fois l'abscisse du point de contact. *Rép.* $x = cy^3$.

11. Montrer que la courbe dont la sous-tangente polaire [voir (7), p. 96] est constante est la spirale réciproque.

12. Montrer que la courbe dont la sous-normale polaire [voir (8), p. 96] est constante est la spirale d'Archimède.

13. Trouver la courbe dans laquelle la sous-normale polaire est proportionnelle à la longueur du rayon vecteur. *Rép.* $\rho = ce^{a\theta}$.

14. Trouver la courbe dans laquelle la sous-normale polaire est proportionnelle au sinus de l'angle vectoriel. *Rép.* $\rho = c - a \cos \theta$.

15. Trouver la courbe dans laquelle la sous-tangente polaire est proportionnelle à la longueur du rayon vecteur. *Rép.* $\rho = ce^{a\theta}$.

16. Déterminer la courbe dans laquelle la sous-tangente polaire et la sous-normale polaire sont dans un rapport constant. *Rép.* $\rho = ce^{a\theta}$.

17. Trouver l'équation de la courbe dans laquelle l'angle formé par le rayon vecteur et la tangente est la moitié de l'angle vectoriel. *Rép.* $\rho = c(1 - \cos \theta)$.

18. Déterminer les courbes dans lesquelles la sous-tangente est égale à n fois la sous-normale et trouver la courbe particulière qui passe par le point (2, 3).

Rép. $\sqrt{n}y = x + C$; $\sqrt{n}(y - 3) = x - 2$.

19. Déterminer les courbes dans lesquelles la longueur de la sous-normale est proportionnelle au carré de l'ordonnée. *Rép.* $y = ce^{kx}$.

20. Trouver les courbes dans lesquelles l'angle formé par le rayon vecteur et la tangente en un point quelconque est égal à n fois l'angle vectoriel.

Rép. $\rho^n = c \sin n\theta$.

En supposant que $v = v_0$ quand $t = 0$, trouver la relation existant entre v et t, sachant que l'accélération est :

21. zéro. *Rép.* $v = v_0$.

22. constante $= k$. $v = v_0 + kt$.

23. $a + bt$. $v = v_0 + at + \frac{bt^2}{2}$.

En supposant que $s = 0$ quand $t = 0$, trouver la relation existant entre s et t, sachant que la vitesse est :

24. constante $(= v_0)$. *Rép.* $s = v_0 t$.

25. $m + nt$. $s = mt + \frac{nt^2}{2}$.

26. $3 + 2t - 3t^2$. $s = 3t + t^2 - t^3$.

27. La vitesse d'un corps partant de l'état de repos est de $5t^2$ mètres par seconde après t secondes.

(a) A quelle distance du point de départ sera-t-il au bout de 3 secondes ?

(b) Au bout de combien de temps passera-t-il à une distance de 360 mètres mesurés à partir du point de départ ? *Rép.* (a) 45 mètres ; (b) 6 secondes.

28. En supposant que $s = 2$ quand $t = 1$, trouver la relation existant entre s et t, sachant que la vitesse est :

(a) 3. *Rép.* $s = 3t - 1$.

(b) $2t - 3$. $s = t^2 - 3t + 4$.

(c) $t^2 + 2t - 1$. $s = \frac{t^3}{3} + t^2 - t + \frac{5}{3}$.

(d) $\frac{1}{t}$. $s = \log t + 2$.

(e) $4t^3 - 4$. $s = t^4 - 4t + 5$.

(f) $\frac{k}{t^2}$. $s = -\frac{k}{t} + k + 2$.

29. En supposant que $v = 3$ quand $t = 2$, trouver la relation existant entre v et t, sachant que l'accélération est :

(a) 2. *Rép.* $v = 2t - 1$.

(b) $3t^2 + 1$. $v = t^3 + t - 7$.

(c) $t^3 - 2t$. $v = \frac{t^4}{4} - t^2 + 3$.

(d) $\frac{1}{t} + t$. $v = \log \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} + 1$.

30. Un train partant d'une station a une vitesse de $t^3 - 21t^2 + 80t$ kilomètres par heure au bout de t heures. Trouver :

(a) sa distance à la station ;

(b) pendant quel intervalle de temps le train a marché en arrière ;

(c) quand le train a repassé la station ;
(d) la distance parcourue par le train quand il passa la station pour la dernière fois.

Rép. (a) $\frac{1}{4}t^4 - 7t^3 + 40t^2$ kilomètres ;
(b) de 5 heures à 16 heures ;
(c) à 8 et 20 heures ;
(d) $4658\frac{1}{2}$ kilomètres.

31. Un corps part de l'origine et en t secondes sa vitesse dans la direction OX est $12t$ et dans la direction OY, $4t^2 - 9$. Trouver :

(a) les distances parcourues parallèlement à chaque axe ;
(b) l'équation de la trajectoire.

Rép. (a) $x = 6t^2$, $y = \frac{4}{3}t^3 - 9t$; (b) $y = \left(\frac{2}{9}x - 9\right)\sqrt{\frac{x}{6}}$.

32. L'équation donnant la force du courant i, pendant le temps t, après avoir éloigné la source de force électromotrice est (R et L étant constants)

$$\mathrm{R}i = -\mathrm{L}\frac{di}{dt}.$$

Trouver i en supposant que I = le courant quand $t = 0$. *Rép.* $i = \mathrm{I}e^{-\frac{\mathrm{R}t}{\mathrm{L}}}$.

33. Trouver le courant de décharge i d'un condensateur de capacité C dans un circuit de résistance R, en supposant que le courant initial soit I_0, étant donné la relation $\frac{di}{i} = -\frac{dt}{\mathrm{CR}}$ (C et R étant constants). *Rép.* $i = \mathrm{I}_0 e^{-\frac{t}{\mathrm{CR}}}$.

34. Si un point se meut de telle sorte que ses vitesses parallèlement aux axes des X et des Y sont respectivement kx et ky, démontrer que sa trajectoire est une hyperbole équilatère.

35. Un corps part de l'origine des coordonnées et, au bout de t secondes, sa vitesse parallèlement à l'axe des X est $6t$ et sa vitesse parallèlement à l'axe des Y est $3t^2 - 3$. Trouver :

(a) la distance parcourue parallèlement à chacun des axes en t secondes ;
(b) l'équation de la trajectoire.

Rép. (a) $x = 3t^2$, $y = t^3 - 3t$;
(b) $27y^2 = x(x - 9)^2$.

CHAPITRE XXIV

L'INTÉGRALE DÉFINIE

173. Différentielle d'une aire. — Considérons la fonction continue $\varphi(x)$ et soit

$$y = \varphi(x)$$

l'équation de la courbe AB (*fig.* 197).

Soit CD une ordonnée fixe et MP une ordonnée variable et soit u la mesure de l'aire CMPD (*). Quand x prend un accroissement suffisamment petit Δx, u prend un accroissement Δu (= aire MNQP). En complétant les rectangles MNRP et MNQS, nous voyons que

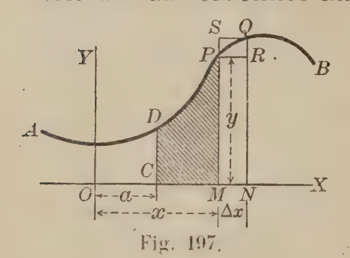


Fig. 197.

$$\text{aire MNRP} < \text{aire MNQP} < \text{aire MNQS},$$

ou,

$$\text{MP} \cdot \Delta x < \Delta u < \text{NQ} \cdot \Delta x ;$$

et, en divisant par Δx,

$$\text{MP} < \frac{\Delta u}{\Delta x} < \text{NQ} \ (^{**}).$$

Maintenant, faisons tendre Δx vers zéro ; puisque MP reste fixe et que NQ tend vers MP comme limite (y étant une fonction continue de x), nous obtenons

$$\frac{du}{dx} = y \, (= \text{MP}),$$

ou, en faisant usage des différentielles,

$$du = y dx.$$

(*) Nous pouvons supposer cette aire engendrée par une ordonnée variable partant de CD et se déplaçant vers la droite. Par suite, u sera une fonction de x qui s'annulera quand $x = a$.

(**) Dans la figure 197, MP est moindre que NQ ; si MP arrive à être plus grand que NQ, on renverse purement et simplement les signes de l'inégalité.

Théorème. — *La différentielle de l'aire limitée par une courbe quelconque, l'axe des x et deux ordonnées est égale au produit de l'ordonnée limitant la surface par la différentielle de l'abscisse correspondante.*

174. L'intégrale définie. — Il résulte du théorème du paragraphe précédent que si AB est le lieu géométrique de

$$y = \varphi(x),$$

alors $$du = ydx,$$

ou (A) $$du = \varphi(x)dx,$$

relation dans laquelle du est la différentielle de l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et deux ordonnées quelconques. En intégrant (A), nous obtenons

$$u = \int \varphi(x)dx.$$

Puisque $\int \varphi(x)dx$ existe (elle est représentée géométriquement ici par une aire); désignons-la par $f(x) + C$.

(B) $$u = f(x) + C.$$

Nous pouvons déterminer C comme au chapitre XXIII, si nous connaissons la valeur de u pour une certaine valeur de x. Si nous convenons de compter l'aire à partir de l'axe des y, c'est-à-dire quand

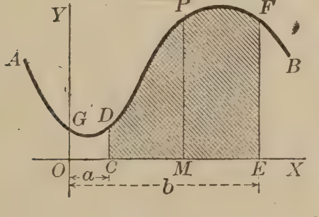


Fig. 198.

(C) $x = a$, $u =$ aire OCDG,

et quand

$x = b$, $u =$ aire OEFG, etc.,

il en résulte que si,

(D) $x = 0$, $u = 0$.

En substituant (D) dans (B), nous obtenons

$$u = f(0) + C \qquad \text{ou} \qquad C = -f(0).$$

Par suite, d'après (B), nous obtenons

(E) $$u = f(x) - f(0).$$

ce qui donne l'aire à partir de l'axe des y jusqu'à une ordonnée quelconque (telle que MP).

Pour trouver l'aire comprise entre les ordonnées CD et EF, substituons les valeurs (C) dans (E), nous obtenons

$$\text{(F)} \qquad \text{aire OCDG} = f(a) - f(0),$$

$$\text{(G)} \qquad \text{aire OEFG} = f(b) - f(0).$$

En retranchant (F) de (G), il vient

$$\textbf{(H)} \qquad \textbf{aire CEFD} = f(b) - f(a).\ (*)$$

Théorème. — *La différence des valeurs de* $\int ydx$ *pour* $x = a$ *et* $x = b$ *donne l'aire limitée par la courbe dont l'ordonnée est* y, *l'axe des X et les ordonnées correspondant à* $x = a$ *et* $x = b$.

Cette différence est représentée par le symbole (**)

$$\text{(I)} \qquad \int_a^b ydx \quad \text{ou} \quad \int_a^b \varphi(x)dx,$$

qui se lit « somme de a à b de ydx » et qui désigne l'intégrale de a à b de ydx.

L'opération est appelée *intégration entre les limites* a et b, a étant la limite (***) *inférieure* et b la limite *supérieure*.

Puisque (I) a toujours une valeur *définie*, on l'appelle une *intégrale définie*; car, si

$$\int \varphi(x)dx = f(x) + C,$$

on a,

$$\int_a^b \varphi(x)dx = [f(x) + C]_a^b$$

$$= [f(b) + C] - [f(a) + C],$$

ou

$$\int_a^b \varphi(x)dx = f(b) - f(a),$$

la *constante d'intégration* ayant disparu.

(*) Le lecteur devra observer que dans la présente hypothèse, $f(x)$ est une fonction d'une seule valeur (fonction uniforme) qui varie d'une manière continue de $f(a)$ jusqu'à $f(b)$ quand x varie de a à b.

(**) Cette notation est due à Joseph Fourier (1768-1830).

(***) Le mot *limite*, dans ce cas, signifie simplement la valeur de la variable à une extrémité de son intervalle (valeur extrême) et ne doit pas être confondu avec la signification du même mot dans la théorie des limites.

En conséquence, nous pouvons définir le symbole

$$\int_a^b \varphi(x)dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b ydx$$

comme la mesure numérique de l'aire limitée par la courbe $y=\varphi(x)$ (*), *l'axe des X et les ordonnées de la courbe en* $x=a$ *et* $x=b$. *Cette définition suppose que ces lignes limitent une aire, c'est-à-dire que la courbe ne s'élève pas ou ne descend pas à l'infini et que a et b sont finis.*

Nous avons montré que la valeur numérique de l'intégrale définie est toujours $f(b)-f(a)$, mais nous verrons dans l'exemple 2, p. 374, que $f(b)-f(a)$ peut être un nombre quand l'intégrale définie n'a pas de signification.

175. Calcul d'une intégrale définie. — La méthode peut être résumée comme il suit :

1re OPÉRATION. — *Trouver l'intégrale indéfinie de l'expression différentielle donnée.*

2e OPÉRATION. — *Substituer dans cette intégrale indéfinie d'abord la limite supérieure et ensuite la limite inférieure de la variable et soustraire le dernier résultat du premier.*

Il n'est pas nécessaire d'introduire la constante d'intégration, puisqu'elle disparaît toujours dans la soustraction.

EXEMPLE I. — Trouver $\int_1^4 x^2dx$.

Solution. $\int_1^4 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$. *Réponse.*

EXEMPLE II. — Trouver $\int_0^\pi \sin x dx$.

Solution. $\int_0^\pi \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = \Big[-(-1)\Big] - \Big[-1\Big] = 2$. *Réponse.*

EXEMPLE III. — Trouver $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$.

Solution. $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} 1 - \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} 0$

$$= \frac{\pi}{4a} - 0 = \frac{\pi}{4a}. \quad \textit{Réponse.}$$

(*) $\varphi(x)$ est continue et n'a qu'une seule détermination dans l'intervalle $[a, b]$.

EXEMPLES

1. $\int_2^3 6x^2dx = 38.$

2. $\int_0^a (a^2x - x^3)\,dx = \frac{a^4}{4}.$

3. $\int_1^4 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = 1.$

4. $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1.$

5. $\int_0^1 (x^2 - 2x + 2)(x - 1)\,dx = -\frac{3}{4}.$

6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x}} = \sqrt{3} - 1.$

7. $\int_0^2 \frac{x^3dx}{x + 1} = \frac{8}{3} - \log 3.$

8. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$

9. $\int_2^3 \frac{3x\,dx}{2\sqrt[4]{x^2 - 4}} = \sqrt[4]{125}.$

10. $\int_0^1 \frac{dy}{y^2 - y + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

11. $\int_2^3 \frac{t\,dt}{1 + t^2} = \frac{\log 2}{2}.$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi = 1.$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4\theta\, d\theta = \frac{4}{3}.$

14. $\int_0^{2r} \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{x}}\,dx = 4r.$

15. $\int_0^5 \left(\frac{3}{5}\sqrt{t} - \frac{3}{25}t^2\right)dt = 2\sqrt{5} - 5.$

16. $\int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\pi r}{2}.$

17. $\int_0^{2r} \frac{2\sqrt{2r}\,dy}{\sqrt{2r - y}} = 8r.$

18. $\int_{-b}^{b} \frac{\pi}{a^4}(y^2 - b^2)^4\,dy = \frac{256\pi b^9}{315a^4}.$

19. $2a\int_0^{\pi} (2 + 2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta = 8a.$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\alpha \cos^3\alpha\, d\alpha = \frac{1}{12}.$

21. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\alpha\, d\alpha = 0.$

22. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta = \log\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{1 + \sin^2\theta} = \frac{\pi}{4}.$

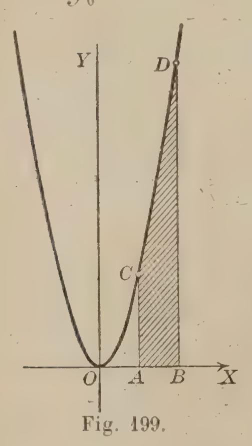


Fig. 199.

176. Calcul des aires. — On a montré, p. 365, que la surface comprise entre une courbe, l'axe des x et les ordonnées $x = a$ et $x = b$ est donnée par la formule

$$\textbf{aire} = \int_a^b y\,dx,$$

expression dans laquelle la valeur de y en fonction de x est substituée d'après l'équation de la courbe donnée.

Exemple. — Trouver l'aire limitée par la parabole $y = x^2$, l'axe des X et les ordonnées $x = 2$ et $x = 4$ (*fig.* 199).

Solution. En substituant dans la formule, il vient

$$\text{Aire ABCD} = \int_2^4 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} = 18\tfrac{2}{3}. \quad \textit{Rép.}$$

EXEMPLES

1. Trouver l'aire limitée par la parabole $y = x^2$, l'axe des X et l'ordonnée $x = 3$. *Rép.* 9.

2. Trouver l'aire au-dessus de l'axe des X, sous la parabole $y^2 = 4x$ et comprise entre les ordonnées $x = 4$ et $x = 9$. *Rép.* $25\frac{1}{3}$.

3. Trouver l'aire limitée par l'hyperbole équilatère $xy = a^2$, l'axe des X et les ordonnées $x = a$ et $x = 2a$. *Rép.* $a^2 \log 2$.

4. Trouver l'aire comprise entre la parabole $y = 4 - x^2$ et l'axe des X. *Rép.* $10\frac{2}{3}$.

5. Trouver l'aire interceptée entre les axes de coordonnées et la parabole $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. *Rép.* $\frac{a^2}{6}$.

6. Trouver par intégration la surface du triangle limité par la ligne $y = 5x$, l'axe des x et l'ordonnée $x = 2$. Vérifier le résultat en considérant l'aire comme étant égale au demi-produit de la base par la hauteur.

7. Trouver par intégration l'aire du triangle limité par la ligne $y = 2x + 6$, l'axe des X et l'ordonnée $x = 4$. Vérifier le résultat comme dans l'exemple précédent.

8. Trouver par intégration l'aire du trapèze limité par la ligne $x - y + 4 = 0$, l'axe des X et les ordonnées $x = -2$ et $x = 4$. Vérifier le résultat en considérant que la surface est égale au demi-produit de la somme des bases (côtés parallèles) par la hauteur.

9. Trouver par intégration l'aire du trapèze limité par la ligne $x + 2y - 6 = 0$, l'axe des X et les ordonnées $x = 0$ et $x = 3$. Vérifier le résultat comme dans l'exemple précédent.

10. Trouver par intégration l'aire du rectangle limité par la ligne $y = 5$, l'axe des X et les ordonnées $x = 2$ et $x = 6$. Vérifier le résultat géométriquement.

11. Trouver par intégration l'aire limitée par les lignes $x = 0$, $x = 9$, $y = 0$, $y = 7$. Vérifier le résultat géométriquement.

12. Trouver l'aire limitée par la parabole semi-cubique $y^3 = x^2$, l'axe des X et la ligne $x = 4$. *Rép.* $\frac{3}{5}\sqrt[3]{1024}$.

13. Trouver l'aire limitée par la parabole cubique $y = x^3$, l'axe des X et l'ordonnée $x = 4$. *Rép.* 64.

14. Trouver, dans chacun des cas suivants, l'aire limitée par la courbe donnée, l'axe des X et les ordonnées indiquées.

(*a*) $y = 9 - x^2$.	$x = -3,\ x = 3$.	*Rép.* 36.
(*b*) $y = \frac{x}{1 + x^2}$.	$x = 0,\ x = 8$.	$\log\sqrt{65}$.
(*c*) $y = \sin x$.	$x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$.	1.
(*d*) $y = x^3 + 3x^2 + 2x$.	$x = -3,\ x = 3$.	54.
(*e*) $y = x^2 + x + 1$.	$x = 2,\ x = 3$.	$9\frac{5}{6}$.
(*f*) $y = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3$.	$x = 1,\ x = 2$.	$28\frac{13}{15}$.
(*g*) $y^2 = -4x$.	$x = -1,\ x = 0$.	$-\frac{4}{3}$.
(*h*) $xy = k^2$.	$x = a,\ x = b$.	$k^2 \log\frac{b}{a}$.
(*i*) $y = 2x + 3$.	$x = 0,\ x = 4$.	
(*j*) $y^2 = 4x + 16$.	$x = -2,\ x = 0$.	
(*k*) $y = x^2 + 4x$.	$x = -4,\ x = -2$.	
(*l*) $y = \cos x$.	$x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$.	
(*m*) $xy = 12$.	$x = 1,\ x = 4$.	

15. Trouver l'aire comprise entre les paraboles $y^2 = 4x$ et $x^2 = 4y$. *Rép.* $5\frac{1}{3}$.

16. Trouver l'aire totale comprise entre la parabole cubique $y = x^3$ et la ligne $y = 2x$. *Rép.* 2.

17. Démontrer que l'aire limitée par une parabole et une de ses doubles ordonnées est égale aux deux tiers du rectangle circonscrit ayant l'ordonnée double pour l'un des côtés.

18. Trouver l'aire comprise entre les paraboles $y^2 = 4 + x$ et $y^2 = 4 - x$.

19. Trouver l'aire comprise entre la courbe $y = \frac{x}{1 + x^2}$ et la ligne $y = \frac{x}{4}$.

Rép. $\log 4 - \frac{3}{4}$.

20. Trouver par intégration l'aire du triangle limité par les lignes

$$x + 3y - 3 = 0, \quad 5x - y - 15 = 0, \quad x - y + 1 = 0. \qquad \textit{Rép. } 8.$$

177. Représentation géométrique d'une intégrale. — Dans le paragraphe précédent, nous avons représenté l'intégrale définie par une aire. Cela ne signifie pas nécessairement que toute intégrale *est* une aire, car, l'interprétation physique du résultat dépend de la nature des quantités représentées par l'abscisse et par l'ordonnée. Ainsi, si x et y sont considérées simplement comme les coordonnées d'un point et rien de plus, l'intégrale est alors une aire. Mais, si nous supposons que l'ordonnée représente la vitesse d'un point mobile et l'abscisse correspondante le moment auquel le point a cette vitesse, le graphique représente alors la courbe de la vitesse du mouvement, et la surface comprise au-dessous d'elle et deux ordonnées quelconques *représen-*

tera la distance parcourue dans l'intervalle de temps correspondant, c'est-à-dire que le *nombre* qui représente l'aire est égal au *nombre* qui représente la distance (ou valeur de l'intégrale).

De même, une intégrale définie représentant un volume, une surface, une masse, une force, etc., peut être représentée géométriquement par une aire. Le signe algébrique d'une aire sera interprété, p. 389.

178. Valeur moyenne de $\phi(x)$. — La valeur moyenne de $\varphi(x)$ se définit comme il suit :

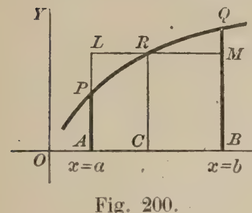


Fig. 200.

$$\left.\begin{array}{c}\textbf{Valeur moyenne de } \phi(x)\\ \textbf{de } x=a \textbf{ à } x=b\end{array}\right\} = \frac{\int_a^b \phi(x)dx}{b-a}.$$

Puisque, d'après la figure 200,

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \text{aire APQB},$$

cette définition signifie que si nous construisons sur la base $AB(=b-a)$ un rectangle (tel que ALMB) dont l'aire soit égale à l'aire de APQB,

$$\text{la valeur moyenne} = \frac{\text{aire ALMB}}{b-a} = \frac{AB \cdot CR}{AB} = \text{la hauteur CR.}$$

179. Échange des limites. — Puisque

$$\int_a^b \varphi(x)dx = f(b) - f(a),$$

et
$$\int_b^a \varphi(x)dx = f(a) - f(b) = -[f(b) - f(a)],$$

nous avons

$$\int_a^b \phi(x)dx = -\int_b^a \phi(x)dx.$$

Théorème. — *Changer les limites équivaut à changer le signe de l'intégrale définie.*

180. Décomposition de l'intervalle d'intégration d'une intégrale définie. — Puisque

$$\int_a^{x_1} \varphi(x)dx = f(x_1) - f(a),$$

et
$$\int_{x_1}^b \varphi(x)dx = f(b) - f(x_1),$$

nous obtenons par addition

$$\int_a^{x_1} \varphi(x)dx + \int_{x_1}^{b} \varphi(x)dx = f(b) - f(a).$$

Mais

$$\int_a^{b} \varphi(x)dx = f(b) - f(a).$$

Par conséquent, en comparant les deux dernières expressions, nous obtenons

$$\int_a^{b} \phi(x)dx = \int_a^{x_1} \phi(x)dx + \int_{x_1}^{b} \phi(x)dx.$$

En interprétant ce théorème géométriquement, comme au § 174, p. 363, nous voyons que l'intégrale du membre de gauche représente l'aire totale CEFD, la première intégrale du membre de droite, l'aire CMPD et la seconde intégrale du membre de droite, l'aire MEFP. La vérité de ce théorème est donc évidente.

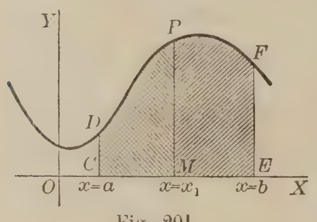


Fig. 201.

Même si x_1 n'est pas compris dans l'intervalle (a, b), la vérité du théorème est évidente quand on tient compte du signe et de la grandeur de l'aire. Évidemment, l'intégrale définie peut être décomposée de cette façon en un nombre quelconque d'intégrales définies séparées.

181. L'intégrale définie est une fonction de ses limites. — D'après

$$\int_a^{b} \varphi(x)dx = f(b) - f(a),$$

nous voyons que l'intégrale définie est une fonction de ses limites. Ainsi $\int_a^b \varphi(z)dz$ a précisément la même valeur que $\int_a^b \varphi(x)dx$.

Théorème. — *Une intégrale définie est une fonction de ses limites.*

182. Limites infinies. — Jusqu'ici, les limites de l'intégrale ont été supposées finies. Néanmoins, même dans un travail élémentaire, il est quelquefois désirable de lever cette restriction et de considérer des intégrales avec des limites infinies. Cette considération est possible dans certains cas, en faisant usage des *définitions* ci-après :

Quand la limite supérieure est infinie

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \underset{b=+\infty}{\text{limite}} \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

et quand la limite inférieure est infinie,

$$\int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,dx = \underset{a=-\infty}{\text{limite}} \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

pourvu que les limites existent.

EXEMPLE I. — Trouver $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Solution. $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \underset{b=+\infty}{\text{limite}} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \underset{b=+\infty}{\text{limite}} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b$$

$$= \underset{b=+\infty}{\text{limite}} \left[-\frac{1}{b}+1\right] = 1.$$ *Réponse.*

EXEMPLE II. — Trouver $\int_0^{+\infty} \frac{8a^3dx}{x^2+4a^2}$.

Solution. $$\int_0^{+\infty} \frac{8a^3dx}{x^2+4a^2} = \underset{b=+\infty}{\text{limite}} \int_0^b \frac{8a^3dx}{x^2+4a^2} = \underset{b=+\infty}{\text{limite}} \left[4a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2a}\right]_0^b$$

$$= \underset{b=+\infty}{\text{limite}} \left[4a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{2a}\right] = 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi a^2.$$ *Rép.*

Interprétons ce résultat géométriquement.

Le graphique de la fonction est la cubique d'Agnési, c'est-à-dire le lieu de

$$y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}.$$

$$\text{Aire OPQ}b = \int_0^b \frac{8a^3dx}{x^2+4a^2} = 4a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{2a}.$$

Lorsque l'ordonnée Qb se déplace indéfiniment vers la droite, la quantité

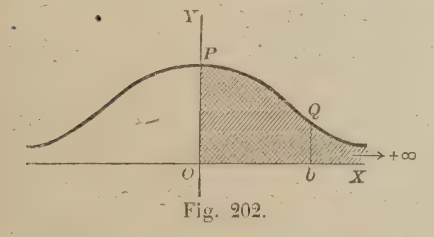


Fig. 202.

$4a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{2a}$ est toujours finie, et

$$\underset{b=+\infty}{\text{limite}} \left[4a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{2a}\right] = 2\pi a^2,$$

quantité qui est également finie.

En pareils cas, *nous appelons le résultat l'aire limitée par la courbe, l'ordonnée* OP, *et* OX, quoique à strictement parler cette aire ne soit pas complètement limitée.

EXEMPLE III. — Trouver $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Solution. $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \underset{b=+\infty}{\text{limite}} \int_1^b \frac{dx}{x} = \underset{b=+\infty}{\text{limite}} (\log b).$$

La limite de $\log b$, quand b croît sans limite, n'existe pas ; par suite, l'intégrale n'a pas de signification dans ce cas.

183. Cas où $y = \phi(x)$ est discontinue. — Considérons maintenant les cas où la fonction à intégrer est discontinue pour des valeurs isolées de la variable comprises dans les limites d'intégration.

Examinons d'abord le cas où la fonction à intégrer est continue pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites a et b, excepté pour $x = a$.

Si $a < b$ et ε positif, nous utilisons la *définition*

$$\text{(A)} \qquad \int_a^b \varphi(x)dx = \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \int_{a+\varepsilon}^b \varphi(x)dx,$$

et quand $\varphi(x)$ est continue excepté pour $x = b$, nous utilisons la *définition*

$$\text{(B)} \qquad \int_a^b \varphi(x)dx = \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)dx,$$

pourvu que les limites soient des quantités définies.

Exemple I. — Trouver $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Solution. Ici $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ devient infini pour $x = a$.

Par conséquent, d'après (B),

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^{a-\varepsilon}$$

$$= \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \left[\arcsin \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right) \right] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \quad \textit{Rép.}$$

Exemple II. — Trouver $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Solution. Ici $\frac{1}{x^2}$ devient infini pour $x = 0$.

Par conséquent, d'après (A),

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right).$$

Dans ce cas, il n'y a pas de limite, et par suite l'intégrale n'existe pas.

Si c est compris entre a et b et que la fonction $\varphi(x)$ soit continue,

excepté pour $x = c$, alors ε et ε' étant des nombres positifs, l'intégrale entre a et b est *définie par*

$$\text{(C)} \quad \int_a^b \varphi(x)dx = \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \int_a^{c-\varepsilon} \varphi(x)dx + \underset{\varepsilon'=0}{\text{limite}} \int_{c+\varepsilon'}^b \varphi(x)dx,$$

pourvu que chaque limite prise séparément soit une quantité définie.

Exemple I. — Trouver $\int_0^{3a} \frac{2xdx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}$.

Solution. Ici, la fonction à intégrer devient infinie pour $x = a$, c'est-à-dire pour une valeur de x comprise entre les limites d'intégration 0 et $3a$. Par suite. la définition (C) ci-dessus doit être employée. Ainsi,

$$\int_0^{3a} \frac{2xdx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}} = \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{2xdx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}} + \underset{\varepsilon'=0}{\text{limite}} \int_{a+\varepsilon'}^{3a} \frac{2xdx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \left[3(x^2-a^2)^{\frac{1}{3}}\right]_0^{a-\varepsilon} + \underset{\varepsilon'=0}{\text{limite}} \left[3(x^2-a^2)^{\frac{1}{3}}\right]_{a+\varepsilon'}^{3a}$$

$$= \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \left[3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2-a^2}+3a^{\frac{2}{3}}\right] + \underset{\varepsilon'=0}{\text{limite}} \left[3\sqrt[3]{8a^2}-3\sqrt[3]{(a+\varepsilon')^2-a^2}\right]$$

$$= 3a^{\frac{2}{3}} + 6a^{\frac{2}{3}} = 9a^{\frac{2}{3}}. \qquad \textit{Rép.}$$

Pour interpréter géométriquement ce résultat, construisons le graphique, c'est-à-dire le lieu de

$$y = \frac{2x}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}},$$

et notons que $x = a$ est une asymptote (*fig.* 203).

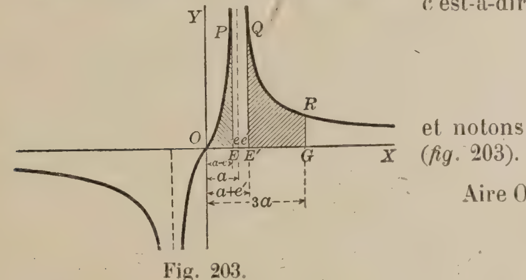


Fig. 203.

$$\text{Aire OPE} = \int_0^{a-\varepsilon} \frac{2xdx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2-a^2}+3a^{\frac{2}{3}}.$$

Lorsque PE se déplace à droite vers l'asymptote, c'est-à-dire quand ε tend vers zéro,

$$3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2-a^2}+3a^{\frac{2}{3}}$$

est toujours une quantité finie, et

$$\underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \left[3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2-a^2}+3a^{\frac{2}{3}}\right] = 3a^{\frac{2}{3}},$$

est une quantité également finie. Comme dans l'exemple 2, p. 371, $3a^{\frac{2}{3}}$ représente l'aire limitée par OP, l'asymptote et OX. De même,

$$\text{Aire E'QRG} = \int_{a+\varepsilon'}^{3a} \frac{2xdx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}} = 3\sqrt[3]{8a^2} - 3\sqrt[3]{(a+\varepsilon')^2-a^2}$$

est toujours une quantité finie quand QE′ se déplace à gauche vers l'asymptote et quand ε' tend vers zéro, le résultat $6a^{\frac{2}{3}}$ est également déterminé. Par suite, $6a^{\frac{2}{3}}$ est appelé l'aire comprise entre QR, l'asymptote, l'ordonnée $x = 3a$ et OX. En additionnant ces résultats, nous obtenons $9a^{\frac{2}{3}}$, qui représente l'aire à droite de OY comprise entre la courbe, l'ordonnée $x = 3a$ et OX.

Exemple II. — Trouver $\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$.

Solution. Cette fonction devient également infinie entre les limites d'intégration (*fig.* 204).

Par suite, d'après (C),

$$\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{(x-a)^2} + \underset{\varepsilon'=0}{\text{limite}} \int_{a+\varepsilon'}^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$$

$$= \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \left[-\frac{1}{x-a} \right]_0^{a-\varepsilon} + \underset{\varepsilon'=0}{\text{limite}} \left[-\frac{1}{x-a} \right]_{a+\varepsilon'}^{2a}$$

$$= \underset{\varepsilon=0}{\text{limite}} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{a} \right) + \underset{\varepsilon'=0}{\text{limite}} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{\varepsilon'} \right).$$

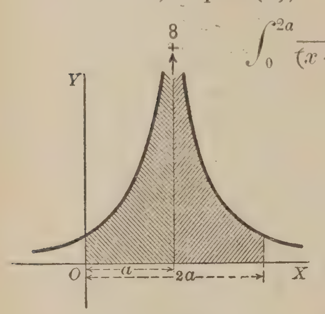


Fig. 204.

Dans ce cas les limites n'existent pas et l'intégrale n'a pas de signification.

Si nous construisons le graphique de cette fonction et que nous notions les limites, les choses apparaissent très semblables à celles de l'exemple précédent. Cependant, la portion ombrée ne peut pas à proprement parler être considérée comme une aire et le signe d'intégration n'a aucune signification dans ce cas.

Il apparaît de suite, si nous appliquons notre formule d'intégration sans autre investigation, qu'il est important d'examiner si la fonction donnée devient infinie ou non dans les limites d'intégration. Ainsi

$$\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \left[-\frac{1}{x-a} \right]_0^{2a} = -\frac{2}{a},$$

résultat qui est absurde au point de vue des discussions qui précèdent.

EXEMPLES

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a}$.

2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 - 1}} = \frac{\pi}{4}$.

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3}$.

4. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{\pi}{2ab}$.

5. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$.

6. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$.

7. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$.

8. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{(a+x)^n} = \frac{1}{(n-1)(2a)^{n-1}}$.

9. $\int_{-\infty}^{1} e^x dx = e$.

10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \pi$.

11. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^4}{16}$.

12. $\int_0^a \frac{x^3 dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\sqrt{2}-4}{2}a$.

CHAPITRE XXV

INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES

184. Introduction. — Une fraction rationnelle est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions rationnelles entières(*). Si le degré du numérateur est égal ou supérieur à celui du dénominateur, la fraction peut être ramenée à un nombre fractionnaire en divisant le numérateur par le dénominateur. Par exemple,

$$\frac{x^4+3x^3}{x^2+2x+1}=x^2+x-3+\frac{5x+3}{x^2+2x+1}.$$

Le dernier terme est une fraction réduite à sa plus simple expression dont le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. Il apparaît, sans hésitation, que les autres termes sont immédiatement intégrables et, par suite, nous n'avons besoin de considérer que la fraction.

Pour intégrer une expression différentielle contenant une fraction de cette sorte, il est souvent nécessaire de la décomposer en fractions partielles plus simples, c'est-à-dire de la remplacer par une somme algébrique de fractions ayant une forme telle que nous puissions compléter l'intégration. On montre en algèbre que cette opération est toujours possible quand le dénominateur peut être décomposé en facteurs premiers réels.

185. 1er cas. — *Les facteurs des dénominateurs sont tous du premier degré et non répétés.*

A chacun des facteurs linéaires non répétés, tels que $x-a$, correspond une fraction partielle de la forme

$$\frac{A}{x-a}.$$

(*) C'est-à-dire que la variable n'est pas affectée d'exposants fractionnaires ou négatifs.

Cette fraction partielle peut être intégrée immédiatement comme il suit :

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{dx}{x-a}$$
$$= A \log(x-a) + C.$$

Exemple 1. — Trouver $\int \frac{(2x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$.

Les facteurs du dénominateur étant x, $x-1$, $x+2$, nous supposons (*) que

(A) $$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2},$$

expression dans laquelle A, B, C sont des constantes à déterminer.

En chassant les dénominateurs dans (A), nous obtenons

(B) $$2x+3 = A(x-1)(x+2) + B(x+2)x + C(x-1)x,$$
$$2x+3 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A.$$

Puisque cette équation est une identité, nous égalons les coefficients des puissances semblables de x dans les deux membres, suivant la méthode des coefficients indéterminés et nous obtenons les trois équations simultanées

(C) $$\begin{cases} A+B+C=0, \\ A+2B-C=2, \\ \quad\quad -2A=3. \end{cases}$$

En résolvant les équations (C) nous obtenons

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = \frac{5}{3}, \quad C = -\frac{1}{6}.$$

En substituant ces valeurs dans (A), il vient

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}.$$

$$\int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} dx = -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2}$$
$$= -\frac{3}{2}\log x + \frac{5}{3}\log(x-1) - \frac{1}{6}\log(x+2) + \log c$$
$$= \log \frac{c(x-1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{6}}}. \qquad \textit{Réponse.}$$

Une méthode plus courte pour trouver les valeurs de A, B et C en partant de (B) est la suivante :

Posons facteur $x=0$; alors $3 = -2A$, ou $A = -\frac{3}{2}$.

(*) Dans l'opération de décomposition de la partie fractionnaire de la différentielle donnée, il n'entre ni le signe d'intégration ni dx.

Posons facteur $x-1=0$, ou $x=1$; alors $5=3B$, ou $B=\frac{5}{3}$.

Posons facteur $x+2=0$, ou $x=-2$; alors $-1=6C$, ou $C=-\frac{1}{6}$.

Un exercice utile consiste à intégrer sans déterminer les constantes A, B, C, etc. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus,

$$\int \frac{(2x+3)dx}{x(x-1)(x+2)} = \int \frac{A dx}{x} + \int \frac{B dx}{x-1} + \int \frac{C dx}{x+2}$$
$$= A \log x + B \log (x-1) + C \log (x+2).$$

EXEMPLES

1. $\int \frac{(2x-1)dx}{(x-1)(x-2)} = \log \frac{(x-2)^3}{x-1} + C.$

2. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+3)(x+5)} = \frac{1}{8} \log \frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)} + C.$

3. $\int \frac{(x-1)dx}{x^2+6x+8} = \log \frac{c(x+4)^{\frac{5}{2}}}{(x+2)^{\frac{3}{2}}}.$

4. $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2+x-6} = \log \left[c(x+3)^2(x-2)\right].$

5. $\int \frac{(x^2+x-1)dx}{x^3+x^2-6x} = \log \sqrt[6]{x(x-2)^3(x+3)^2} + C.$

6. $\int \frac{(2x^3+1)dx}{x^2+3x+2} = x^2 - 6x + \log \frac{(x+2)^{15}}{x+1} + C.$

7. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \log \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} + C.$

8. $\int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \log \frac{x-1}{(x+1)^3} + \frac{16}{3} \log (x+2) + C.$

9. $\int \frac{(a-b)y dy}{y^2-(a+b)y+ab} = \log \frac{(y-a)^a}{(y-b)^b} + C.$

10. $\int \frac{(t^2+pq)dt}{t(t-p)(t+q)} = \log \frac{(t-p)(t+q)}{t} + C.$

11. $\int \frac{(2z^2-5)dz}{z^4-5z^2+6} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}} + C.$

12. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+4x} = \frac{1}{4} \log \frac{5}{3}.$

13. $\int_0^5 \frac{dx}{1+3x+2x^2} = \log \frac{11}{6}.$

14. $\int_3^4 \frac{(x^2+6x-8)dx}{x^3-4x} = \log \frac{200}{81}.$

186. 2e cas. — *Les facteurs du dénominateur sont tous du premier degré et certains sont répétés.*

A chaque facteur linéaire répété n fois, tel que $(x-a)^n$, correspondent les n fractions partielles :

$$\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{B}{(x-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{L}{x-a}.$$

La dernière est intégrée comme dans le 1er cas. Les autres sont toutes intégrées au moyen de la formule (4), p. 327. Ainsi

$$\int\frac{Adx}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}dx=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C.$$

Exemple. — Trouver $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$.

Solution. Puisque $x-1$ se présente trois fois comme facteur, nous avons

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

En chassant les dénominateurs, il vient

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2,$$
$$x^3+1=(A+D)x^3+(-3A+C-2D)x^2+(3A+B-C+D)x-A.$$

En égalant les coefficients des puissances semblables de x, nous obtenons les équations simultanées

$$A+D=1,$$
$$-3A+C-2D=0,$$
$$3A+B-C+D=0,$$
$$-A=1.$$

En résolvant, il vient

$$A=-1,\quad B=2,\quad C=1,\quad D=2 \text{ et}$$
$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}.$$
$$\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=-\log x-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\log(x-1)+C$$
$$=-\frac{x}{(x-1)^2}+\log\frac{(x-1)^2}{x}+C.$$

EXEMPLES

1. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{1}{x-1}+\log\frac{x-2}{x-1}+C.$

2. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{4}{x+2}+\log(x+1)+C.$

3. $\int \frac{(x-8)dx}{x^3-4x^2+4x} = \frac{3}{x-2} + \log\frac{(x-2)^2}{x^2} + C.$

4. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \log(x-1) + C.$

5. $\int \frac{(x^5-x^3+1)dx}{x^4-x^3} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \log\frac{x-1}{x} + C.$

6. $\int \frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^3} = \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + \log\frac{x^2}{(x+1)^2} + C.$

7. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2} = -\frac{5x+12}{x^2+6x+8} + \log\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2 + C.$

8. $\int \frac{y^2dy}{y^3+5y^2+8y+4} = \frac{4}{y+2} + \log(y+1) + C.$

9. $\int \frac{dt}{(t^2-2)^2} = -\frac{t}{4(t^2-2)} + \frac{1}{8\sqrt{2}}\log\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} + C.$

10. $\int \frac{as^2ds}{(s+a)^3} = a\log(s+a) + \frac{2a^2}{s+a} - \frac{a^3}{2(s+a)^2} + C.$

11. $\int \left(\frac{m}{z+m} - \frac{nz}{(z+n)^2}\right)dz = \log(z+m)^m(z+n)^{-n} - \frac{n^2}{z+n} + C.$

12. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)} = 1 - \log 2.$

13. $\int_1^\infty \frac{dt}{t(1+t)^2} = \log 2 - \frac{1}{2}.$

14. $\int_1^4 \frac{(1+3x)dx}{x+2x^2+x^3} = \log\frac{8}{5} + \frac{3}{5}.$

187. 3e cas. — *Le dénominateur contient des facteurs du second degré, mais non répétés.*

A chaque facteur quadratique non répété, tel que x^2+px+q, correspond une fraction partielle de la forme

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

Cette expression peut être intégrée comme il suit :

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{\left(Ax+\frac{Ap}{2}-\frac{Ap}{2}+B\right)dx}{x^2+px+q}$$

[En ajoutant et retranchant $\frac{Ap}{2}$ au numérateur.]

$$= \int \frac{\left(Ax+\frac{Ap}{2}\right)dx}{x^2+px+q} + \int \frac{\left(-\frac{Ap}{2}+B\right)dx}{x^2+px+q},$$

$$\int\frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B})dx}{x^2+px+q}=\frac{\mathrm{A}}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}$$
$$+\left(\frac{2\mathrm{B}-\mathrm{A}p}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}$$

[En complétant le carré au dénominateur de la seconde intégrale.]

$$=\frac{\mathrm{A}}{2}\log(x^2+px+q)+\frac{2\mathrm{B}-\mathrm{A}p}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+\mathrm{C}.$$

Puisque $x^2+px+q=0$ a des racines imaginaires, nous savons d'après 3, p. 1, que $4q-p^2>0$.

Exemple. — Trouver $\int\frac{4dx}{x^3+4x}$.

Solution. Posons $\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{\mathrm{A}}{x}+\frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+4}$.

En chassant les dénominateurs, on a

$$4=\mathrm{A}(x^2+4)+x(\mathrm{B}x+\mathrm{C})=(\mathrm{A}+\mathrm{B})x^2+\mathrm{C}x+4\mathrm{A}.$$

En égalant les coefficients des puissances semblables de x, nous obtenons

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=0,\quad \mathrm{C}=0,\quad 4\mathrm{A}=4,$$

ce qui donne

$$\mathrm{A}=1,\quad \mathrm{B}=-1,\quad \mathrm{C}=0,$$

de sorte que

$$\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}.$$

$$\int\frac{4dx}{x(x^2+4)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+4}$$
$$=\log x-\frac{1}{2}\log(x^2+4)+\log c=\log\frac{cx}{\sqrt{x^2+4}}.\ \textit{Rép.}$$

EXEMPLES

1. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\mathrm{C}.$

2. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x^2+4)}=\frac{1}{10}\log\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+\mathrm{C}.$

3. $\int\frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\log\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+\mathrm{C}.$

4. $\int\frac{x^2dx}{1-x^4}=\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+\mathrm{C}.$

5. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)} = \frac{1}{4}\log\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\text{arc tg}\, x + C.$

6. $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8} = \log\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2}\text{arc tg}\frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

7. $\int \frac{(5x^2-1)dx}{(x^2+3)(x^2-2x+5)}$

$$= \log\frac{x^2-2x+5}{x^2+3} + \frac{5}{2}\text{arc tg}\frac{x-1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

8. $\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

9. $\int \frac{z^2dz}{z^4+z^2-2} = \frac{1}{6}\log\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}\text{arc tg}\frac{z}{\sqrt{2}} + C.$

10. $\int \frac{4dt}{t^4+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \sqrt{2}\,\text{arc tg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} + C.$

11. $\int \frac{dy}{1-y^3} = \frac{1}{6}\log\frac{y^2+y+1}{y^2-2y+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{2y+1}{\sqrt{3}} + C.$

12. $\int_0^3 \frac{2xdx}{(1+x^2)(3+x^2)} = \log\sqrt{\frac{5}{2}}.$

13. $\int_0^1 \frac{2x^2+x+3}{(x+1)(x^2+1)} = \log 4 + \frac{\pi}{4}.$

188. 4e cas. — *Le dénominateur contient des facteurs du second degré dont certains sont répétés.*

A chaque facteur quadratique répété n fois, tel que $(x^2+px+q)^n$, correspondent les n fractions partielles

$$\text{(A)}\qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} + \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \cdots + \frac{Lx+M}{x^2+px+q}.$$

En vue d'établir une formule pour intégrer la première de ces fractions, nous procéderons comme il suit :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\left(Ax+\frac{Ap}{2}-\frac{Ap}{2}+B\right)dx}{(x^2+px+q)^n}$$

[En ajoutant et en retranchant $\frac{Ap}{2}$ au dénominateur.]

$$= \int \frac{\left(Ax+\frac{Ap}{2}\right)dx}{(x^2+px+q)^n} + \int \frac{\left(-\frac{Ap}{2}+B\right)dx}{(x^2+px+q)^n}$$

$$= \frac{A}{2}\int (x^2+px+q)^{-n}(2x+p)dx + \left(\frac{2B-Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

La première de ces intégrales peut être intégrée d'après (4), p. 327 ; par suite

$$\text{(B)} \quad \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{A}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(\frac{2B-Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Différentions maintenant la fonction $\dfrac{x+\frac{p}{2}}{(x^2+px+q)^{n-1}}$.

Ainsi,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{(x^2+px+q)^{n-1}}\right) = \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} - \frac{2(n-1)\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}{(x^2+px+q)^n},$$

ou

$$\text{(C)} \quad d\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{(x^2+px+q)^{n-1}}\right) = \left(\frac{-(2n-3)}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{2(n-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}{(x^2+px+q)^n}\right)dx.$$

[Puisque $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ et $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = (x^2+px+q) - \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$.]

En intégrant les deux membres de (C), il vient

$$\frac{x+\frac{p}{2}}{(x^2+px+q)^{n-1}} = -(2n-3)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-1}} + 2(n-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n},$$

ou, en résolvant par rapport à la dernière intégrale,

$$\text{(D)} \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{x+\frac{p}{2}}{2(n-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-1}}.$$

En substituant ces résultats dans le second membre de (B), nous obtenons (*)

$$\text{(E)}\quad \int \frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B})dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{\mathrm{A}(p^2-4q)+(2\mathrm{B}-\mathrm{A}p)(2x+p)}{2(n-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{n-1}}$$
$$+\frac{(2\mathrm{B}-\mathrm{A}p)(2n-3)}{(n-1)(4q-p^2)}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-1}}.$$

On voit que l'intégrale en question dépend de l'intégration d'une fraction rationnelle du même type dans laquelle le facteur quadratique ne se présente que $n-1$ fois. En appliquant la formule (**E**) $n-1$ fois successivement, il est évident que l'intégrale dont il s'agit dépendra finalement de

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q},$$

expression qui peut être intégrée en complétant le carré, ainsi qu'on l'a vu p. 341.

Toutes les fractions de (A), à part la dernière, peuvent être intégrées de cette façon, et la dernière fraction, savoir

$$\frac{\mathrm{L}x+\mathrm{M}}{x^2+px+q},$$

peut être intégrée par la méthode déjà donnée dans le cas précédent. p. 380.

Exemple I. — Trouver $\int\frac{(x^3+x^2+2)dx}{(x^2+2)^2}$.

Solution. Puisque x^2+2 se présente deux fois comme facteur, nous posons

$$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}=\frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{(x^2+2)^2}+\frac{\mathrm{C}x+\mathrm{D}}{x^2+2}.$$

En chassant les dénominateurs, nous obtenons

$$x^3+x^2+2=\mathrm{A}x+\mathrm{B}+(\mathrm{C}x+\mathrm{D})(x^2+2),$$
$$x^3+x^2+2=\mathrm{C}x^3+\mathrm{D}x^2+(\mathrm{A}+2\mathrm{C})x+\mathrm{B}+2\mathrm{D}.$$

En égalant les coefficients des puissances semblables de x, il vient

$$\mathrm{C}=1,\quad \mathrm{D}=1,\quad \mathrm{A}+2\mathrm{C}=0,\quad \mathrm{B}+2\mathrm{D}=2,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{A}=-2,\quad \mathrm{B}=0,\quad \mathrm{C}=1,\quad \mathrm{D}=1.$$

(*) $4q-p^2>0$, puisque $x^2+px+q=0$ a des racines imaginaires.

Par suite,

$$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}=-\frac{2x}{(x^2+2)^2}+\frac{x+1}{x^2+2},$$

et

$$\int\frac{(x^3+x^2+2)\,dx}{(x^2+2)^2}=-\int\frac{2x\,dx}{(x^2+2)^2}+\int\frac{x\,dx}{x^2+2}+\int\frac{dx}{x^2+2}$$

$$=\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log(x^2+2)+C.$$

Exemple II. — Trouver $\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx.$

Solution. Puisque x^2+1 se présente deux fois comme facteur, nous posons

$$\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

En chassant les dénominateurs, nous avons

$$2x^3+x+3=Ax+B+(Cx+D)(x^2+1).$$

En égalant les coefficients des puissances semblables de x et en résolvant, nous obtenons

$$A=-1,\quad B=3,\quad C=2,\quad D=0.$$

Par suite,

$$\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

$$=\log(x^2+1)+\int\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}dx.$$

Appliquons maintenant la formule (E), p. 384, à l'intégrale restante. Ici,

$$A=-1,\quad B=3,\quad p=0,\quad q=1,\quad n=2.$$

En substituant, nous obtenons

$$\int\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1+3x}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1+3x}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}x.$$

Par conséquent,

$$\int\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx=\log(x^2+1)+\frac{1+3x}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

EXEMPLES

1. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$

2. $\int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx=\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\log(x^2+2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

3. $\int\frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2}=\frac{1}{4}\log\frac{x^2+1}{(x+1)^2}+\frac{x-1}{2(x^2+1)}+C.$

4. $\displaystyle\int\left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)^2 dx = x + \frac{2a^2x}{x^2+a^2} - 2a \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$

5. $\displaystyle\int\frac{(4x+3)\,dx}{(4x^2+3)^3} = \frac{4x^3+5x-2}{8(4x^2+3)^2} + \frac{1}{16\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C.$

6. $\displaystyle\int\frac{9x^3\,dx}{(x^3+1)^2} = -\frac{3x}{x^3+1} + \frac{1}{2}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

7. $\displaystyle\int\frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2}\,dx = \frac{5}{2(x^2+2)} + \frac{10}{x^2+3} + \frac{19}{2}\log(x^2+2) - 9\log(x^2+3) + C.$

8. $\displaystyle\int\frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \log\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x + C.$

9. $\displaystyle\int\frac{(3x+2)\,dx}{(x^2-3x+3)^2} = \frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)} + \frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C.$

Puisqu'une fonction rationnelle peut toujours être ramenée au quotient de deux fonctions rationnelles entières, c'est-à-dire à une fraction rationnelle, il résulte des paragraphes précédents de ce chapitre qu'une fonction rationnelle quelconque dont le dénominateur peut être décomposé en facteurs quadratiques réels et en facteurs linéaires, peut être exprimée comme la somme algébrique de fonctions rationnelles entières et de fractions partielles. Les termes de cette somme ont tous des formes que nous savons intégrer. D'où le théorème qui suit :

Théorème. — *L'intégrale de toute fonction rationnelle dont le dénominateur peut être décomposé en facteurs quadratiques réels et en facteurs linéaires peut être trouvée et exprimée en termes de fonctions algébriques, logarithmiques et trigonométriques inverses, c'est-à-dire en termes des fonctions élémentaires.*

CHAPITRE XXVI

INTÉGRATION PAR SUBSTITUTION D'UNE NOUVELLE VARIABLE. — RATIONALISATION

189. Introduction. — Dans le chapitre précédent on a montré que toutes les fonctions rationnelles dont les dénominateurs peuvent être décomposés en facteurs quadratiques réels et en facteurs linéaires peuvent être intégrées. Parmi les fonctions algébriques qui ne sont *pas rationnelles,* c'est-à-dire qui contiennent des radicaux, un petit nombre seulement peuvent être intégrées en termes des fonctions élémentaires. Cependant, en substituant une nouvelle variable, ces fonctions peuvent, dans certains cas, être transformées en fonctions équivalentes qui font partie de la liste des formes classiques (pp. 326 à 328), ou qui sont rationnelles.

La méthode d'intégration d'une fonction qui n'est pas rationnelle, par substitution à l'ancienne variable d'une fonction d'une nouvelle variable telle que le résultat soit une fonction rationnelle, est quelquefois appelée *intégration par rationalisation.* C'est un artifice d'intégration très important et nous allons maintenant passer en revue quelques-uns des cas les plus importants de ce chapitre.

190. Différentielles contenant seulement des puissances fractionnaires de x. — *Une expression de cette sorte peut être transformée en une forme rationnelle au moyen de la substitution*

$$x = z^n,$$

n étant le plus petit dénominateur commun des exposants fractionnaires de x.

Car alors x, dx et chaque radical peuvent être exprimés rationnellement en fonction de z.

Exemple. — Trouver $\displaystyle\int \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx.$

Solution. Puisque 12 est le plus petit commun multiple des dénominateurs des exposants fractionnaires, nous posons

$$x = z^{12}.$$

Alors, $$dx = 12z^{11}dz, \quad x^{\frac{2}{3}} = z^8, \quad x^{\frac{1}{4}} = z^3, \quad x^{\frac{1}{2}} = z^6.$$

$$\int \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \frac{z^8 - z^3}{z^6} 12z^{11}dz = 12 \int (z^{13} - z^8)dz$$

$$= \frac{6}{7}z^{14} - \frac{4}{3}z^9 + C = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C.$$

[En substituant la valeur de z en fonction de x, savoir $z = x^{\frac{1}{12}}$.]

La forme générale de l'expression irrationnelle traitée ici est dès lors

$$R\left(x^{\frac{1}{n}}\right)dx,$$

dans laquelle R désigne une fonction rationnelle de $x^{\frac{1}{n}}$.

191. Différentielles contenant seulement des puissances fractionnaires de $a + bx$. — *Une expression de cette sorte peut être transformée en une forme rationnelle au moyen de la substitution*

$$a + bx = z^n,$$

dans laquelle n est le plus petit commun dénominateur des exposants fractionnaires de l'expression $a + bx$.

Car x, dx et chaque radical peuvent être exprimés rationnellement en fonction de z.

Exemple. — Trouver $\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}}$.

Solution. Posons $$1 + x = z^2;$$

alors $$dx = 2zdz, \quad (1+x)^{\frac{3}{2}} = z^3 \quad \text{et} \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = z.$$

$$\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{2zdz}{z^3 + z} = 2\int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$= 2 \operatorname{arc\,tg} z + C = 2 \operatorname{arc\,tg} (1+x)^{\frac{1}{2}} + C,$$

quand on substitue la valeur de z en fonction de x.

L'intégrale générale traitée ici a, dès lors, la forme

$$R\left[x, (a+bx)^{\frac{1}{n}}\right]dx,$$

dans laquelle R désigne une fonction rationnelle.

192. Changement de limites correspondant à un changement de variable. — Quand on intègre par substitution d'une nouvelle variable, il est quelquefois laborieux de traduire le résultat en fonction de la variable primitive. Quand on intègre entre des limites, on peut éviter de revenir à la variable primitive en changeant les limites de façon qu'elles correspondent à la nouvelle variable (*).

Nous allons maintenant illustrer ce procédé par un exemple.

EXEMPLE. — Calculer $\int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{4}}dx}{1+x^{\frac{1}{2}}}$.

Solution. Posons $x = z^4$.

Alors $dx = 4z^3dz, \quad x^{\frac{1}{2}} = z^2, \quad x^{\frac{1}{4}} = z.$

Pour changer les limites, nous observons que

quand $x = 0, \quad z = 0$

et quand $x = 16, \quad z = 2.$

$$\int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{4}}dx}{1+x^{\frac{1}{2}}} = \int_0^2 \frac{z \cdot 4z^3dz}{1+z^2} = 4\int_0^2 \left(z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2}\right)dz$$

$$= 4\int_0^2 z^2dz - 4\int_0^2 dz + 4\int_0^2 \frac{dz}{1+z^2} = \left[\frac{4z^3}{3} - 4z + 4 \text{ arc tg } z\right]_0^2$$

$$= \tfrac{8}{3} + 4 \text{ arc tg } 2. \textit{ Réponse.}$$

EXEMPLES

1. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\log(x^{\frac{3}{4}}+1) + C.$

2. $\int \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}{6x^{\frac{1}{4}}}dx = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{9}x^{\frac{9}{4}} - \frac{6}{13}x^{\frac{13}{12}}\right) + C.$

3. $\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{1+x} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}.$

4. $\int_0^3 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}} = 2 \text{ arc tg } 2 - \frac{\pi}{2}.$

5. $\int \frac{x^{\frac{1}{6}}+1}{x^{\frac{7}{6}}+x^{\frac{5}{4}}}dx = -\frac{6}{x^{\frac{1}{6}}} + \frac{12}{x^{\frac{1}{12}}} + 2\log x - 24\log(x^{\frac{1}{12}}+1) + C.$

6. $\int \frac{dx}{x^{\frac{5}{8}} - x^{\frac{1}{8}}} = \frac{8}{3}x^{\frac{3}{8}} + 2\log\frac{x^{\frac{1}{8}}-1}{x^{\frac{1}{8}}+1} + 4 \text{ arc tg } x^{\frac{1}{8}} + C.$

(*) La relation entre l'ancienne et la nouvelle variable devra être telle qu'à chaque valeur de l'une corresponde une valeur finie de l'autre et une seulement. Quand l'une est donnée comme fonction à valeurs multiples de l'autre, on doit faire attention de choisir les valeurs qui conviennent.

7. $\int \frac{3\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}} = -18\left[\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{4x^{\frac{1}{2}}}{3}+4x^{\frac{1}{3}}+16x^{\frac{1}{6}}+32\log\left(x^{\frac{1}{6}}-2\right)\right]+C.$

8. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 4-2\log 3.$

10. $\int_1^4 \frac{ydy}{\sqrt{2+4y}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

9. $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}\,dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3} = 8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi.$

11. $\int_0^{12} \frac{xdx}{(2x+3)^{\frac{4}{3}}} = \frac{3}{8}\left(11-\frac{9}{\sqrt[3]{3}}\right).$

12. $\int \frac{y^{\frac{1}{7}}+y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{8}{7}}+y^{\frac{15}{14}}}\,dy = 14\left[y^{\frac{1}{14}}-\frac{y^{\frac{1}{7}}}{2}+\frac{y^{\frac{3}{14}}}{3}-\frac{y^{\frac{2}{7}}}{4}+\frac{y^{\frac{5}{14}}}{5}\right]+C.$

13. $\int \frac{dx}{x(x+1)^{\frac{1}{2}}} = \log\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}-1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+1}+C.$

14. $\int \frac{xdx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(2a+bx)}{b^2\sqrt{a+bx}}+C.$

15. $\int \frac{x^2dx}{(4x+1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{6x^2+6x+1}{12(4x+1)^{\frac{3}{2}}}+C.$

16. $\int y\sqrt[3]{a+y}\,dy = \frac{3}{28}(4y-3a)(a+y)^{\frac{4}{3}}+C.$

17. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx = x+1+4\sqrt{x+1}+4\log\left(\sqrt{x+1}-1\right)+C.$

18. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\log\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)+C.$

19. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx = 2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C.$

20. $\int_1^{64} \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{3}}} = 5{,}31.$

21. $\int_4^9 \frac{dx}{1-\sqrt{x}} = -3{,}386.$

22. $\int \frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}} = 3\left\{(x+1)^{\frac{1}{3}}+2(x+1)^{\frac{1}{6}}+2\log\left[(x+1)^{\frac{1}{6}}-1\right]\right\}+C.$

193. Différentielles ne contenant pas de radical autre que $\sqrt{a+bx+x^2}$(*). — *Une expression de cette forme peut être transformée en une forme rationnelle au moyen de la substitution*

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z-x,$$

(*) Si le radical est de la forme $\sqrt{n+px+qx^2}$, $q>0$, on peut l'écrire $\sqrt{q}\sqrt{\frac{n}{q}+\frac{p}{q}x+x^2}$. Cette forme est celle du paragraphe 193 quand on fait $a=\frac{n}{q}$, $b=\frac{p}{q}$.

car en élevant au carré et en résolvant par rapport à x, nous avons

$$x = \frac{z^2 - a}{b + 2z}; \quad \text{alors} \quad dx = \frac{2(z^2 + bz + a)dz}{(b + 2z)^2};$$

et

$$\sqrt{a + bx + x^2} (= z - x) = \frac{z^2 + bz + a}{b + 2z}.$$

Par suite x, dx et $\sqrt{a + bx + x^2}$ sont des expressions rationnelles quand elles sont exprimées en fonction de z.

Exemple. — Trouver $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}}$.

Solution. Posons $\quad \sqrt{1 + x + x^2} = z - x.$

En élevant au carré et en résolvant par rapport à x, il vient

$$x = \frac{z^2 - 1}{2z + 1}; \quad \text{alors} \quad dx = \frac{2(z^2 + z + 1)dz}{(2z + 1)^2}$$

et

$$\sqrt{1 + x + x^2} (= z - x) = \frac{z^2 + z + 1}{2z + 1}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}} = \int \frac{\frac{2(z^2 + z + 1)dz}{(2z + 1)^2}}{\frac{z^2 + z + 1}{2z + 1}} = \int \frac{2dz}{2z + 1} = \log [(2z + 1)c]$$

$$= \log \left[\left(2x + 1 + 2\sqrt{1 + x + x^2}\right) c \right],$$

quand on substitue la valeur de z en fonction de x.

194. Différentielles ne contenant pas de radical autre que $\sqrt{a + bx - x^2}$ (*). — *Une telle expression peut être transformée en une forme rationnelle au moyen de la substitution*

$$\sqrt{a + bx - x^2} = \left[\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}\right] = (x - \alpha)z \; [\text{ou} = (\beta - x)z],$$

expression dans laquelle $x - \alpha$ et $\beta - x$ sont des facteurs réels (**) *de $a + bx - x^2$.*

Car si $\sqrt{a + bx - x^2} = \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)} = (x - \alpha)z$, en élevant

(*) Si le radical est de la forme $\sqrt{n + px - qx^2}$, $q > 0$, on peut l'écrire $\sqrt{q}\sqrt{\frac{n}{q} + \frac{p}{q}x - x^2}$. Cette forme est celle du paragraphe 194, quand on fait $a = \frac{n}{q}$, $b = \frac{p}{q}$.

(**) Si les facteurs de $a + bx - x^2$ sont imaginaires, $\sqrt{a + bx - x^2}$ est imaginaire pour toutes les valeurs de x, car si l'un des facteurs est $x - m + in$, l'autre doit être $-(x - m - in)$ et par suite

$$b + ax - x^2 = -(x - m + in)(x - m - in) = -[(x - m)^2 + n^2],$$

expression qui est négative pour toutes les valeurs de x. Nous considérerons seulement le cas où les facteurs sont réels.

au carré, en divisant par $x-\alpha$ et en résolvant par rapport à x, nous obtenons

$$x=\frac{\alpha z^2+\beta}{z^2+1}; \qquad \text{alors} \qquad dx=\frac{2(\alpha-\beta)z\,dz}{(z^2+1)^2},$$

et
$$\sqrt{a+bx-x^2}=[(x-\alpha)z]=\frac{(\beta-\alpha)z}{z^2+1}.$$

Par suite x, dx et $\sqrt{a+bx-x^2}$ sont des expressions rationnelles quand elles sont exprimées en fonction de z.

EXEMPLE. — Trouver $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

Solution. Puisque
$$2+x-x^2=(x+1)(2-x),$$
posons
$$\sqrt{(x+1)(2-x)}=(x+1)z.$$

En élevant au carré et en résolvant par rapport à x, il vient

$$x=\frac{2-z^2}{z^2+1}.$$

Par suite,
$$dx=\frac{-6z\,dz}{(z^2+1)^2}$$
et
$$\sqrt{2+x-x^2}\left[=(x+1)z\right]=\frac{3z}{z^2+1}.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}=-2\int\frac{dz}{z^2+1}=-2\operatorname{arc\,tg} z+C$$
$$=-2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}+C,$$

quand on substitue la valeur de z en fonction de x.

EXEMPLES

1. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{x^2-x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{2}}+C.$

2. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}=2\operatorname{arc\,tg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right)+C.$

3. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2+2x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+2x}+\sqrt{2-x}}+C.$

4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\sqrt{x^2+4x-4}}{2}+C.$

5. $\int\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}dx=-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}}+\log\left(x+2+\sqrt{x^2+4x}\right)+C.$

6. $\int \frac{x\,dx}{(2+3x-2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8+6x}{25\sqrt{2+3x-2x^2}} + C.$

7. $\int \frac{dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}} + C.$

8. $\int \frac{(2x+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^2} = \log\left(x+1+\sqrt{2x+x^2}\right) - \frac{4}{x+\sqrt{2x+x^2}} + C.$

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \log \frac{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}} + C.$

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x-6-x^2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}} + C.$

L'intégrale générale traitée dans les deux derniers paragraphes a la forme

$$R(x, \sqrt{a+bx+cx^2})dx,$$

expression dans laquelle R désigne une fonction rationnelle.

En combinant les résultats de ce chapitre avec le théorème de la p. 386, nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Toute fonction rationnelle de x et de la racine carrée d'un polynome dont le degré n'est pas supérieur au second peut être intégrée et le résultat exprimé en termes des fonctions élémentaires* (*).

195. Différentielles binomes. — Une différentielle de la forme

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

dans laquelle a et b sont des constantes quelconques et les exposants m, n, p des nombres rationnels, est appelée une *différentielle binome*.

Posons $\quad x = z^\alpha; \quad$ alors $\quad dx = \alpha z^{\alpha-1}dz$

et $\quad x^m(a+bx^n)^p dx = \alpha z^{m\alpha+\alpha-1}(a+bz^{n\alpha})^p dz.$

Si le nombre entier α est choisi de telle sorte que $m\alpha$ et $n\alpha$ soient également des nombres entiers (**), nous voyons que la différentielle

(*) Comme précédemment, on suppose que dans chaque cas le dénominateur de la fonction rationnelle peut être décomposé en facteurs quadratiques réels et en facteurs linéaires.

(**) Il est toujours possible de choisir α de telle sorte que $m\alpha$ et $n\alpha$ soient entiers, car nous pouvons prendre α comme le plus petit commun multiple des dénominateurs de m et de n.

donnée est équivalente à une autre différentielle de la même forme dans laquelle m et n sont remplacés par des nombres entiers.

De même,

$$x^m(a+bx^n)^p dx = x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p dx$$

transforme la différentielle donnée en une autre de même forme, dans laquelle l'exposant n de x est remplacé par $-n$. Par conséquent, quel que soit le signe algébrique de n dans l'une des deux différentielles, l'exposant de x à l'intérieur des parenthèses sera certainement positif. Quand p est un nombre entier, le binome peut être développé et la différentielle intégrée. Dans ce qui suit, on considère p comme une fraction ; par suite, nous le remplaçons par $\frac{r}{s}$, où r et s sont des nombres entiers (*).

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Toute différentielle binome peut être réduite à la forme

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} dx,$$

dans laquelle m, n, r, s sont des entiers et où n est positif.

196. Conditions d'intégrabilité de la différentielle binome. —

$$\text{(A)} \qquad x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} dx.$$

1er cas. — Posons $a+bx^n = z^s$.

Alors $(a+bx^n)^{\frac{1}{s}} = z$ et $(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = z^r$;

on a également

$$x = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{et} \qquad x^m = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}};$$

par suite,

$$dx = \frac{s}{bn} z^{s-1} \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz.$$

En substituant dans (A), nous obtenons

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} dx = \frac{s}{bn} z^{r+s-1} \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

(*) Le cas où p est un nombre entier n'est pas exclu, mais il se présente comme un cas particulier, savoir $r = p$, $s = 1$.

Le second membre de cette expression est rationnel quand

$$\frac{m+1}{n}$$

est entier ou nul.

2e cas. — Posons $a+bx^n=z^s x^n$.

Alors $x^n=\dfrac{a}{z^s-b}$ et $a+bx^n=z^s x^n=\dfrac{az^s}{z^s-b}$.

Par suite, $$(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{r}{s}}(z^s-b)^{-\frac{r}{s}}z^r;$$

on a également

$$x=a^{\frac{1}{n}}(z^s-b)^{-\frac{1}{n}}, \qquad x^m=a^{\frac{m}{n}}(z^s-b)^{-\frac{m}{n}};$$

et $$dx=-\frac{s}{n}a^{\frac{1}{n}}z^{s-1}(z^s-b)^{-\frac{1}{n}-1}dz.$$

En substituant dans (**A**), nous obtenons

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx=-\frac{s}{n}a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}}(z^s-b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}+1\right)}z^{r+s-1}dz.$$

Le second membre de cette expression est rationnel quand $\dfrac{m+1}{n}+\dfrac{r}{s}$ est entier ou nul.

Par suite, la différentielle binome

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx$$

peut être intégrée par rationalisation dans les cas suivants (*):

1er cas. — *Quand* $\dfrac{m+1}{n}=$ *un nombre entier ou zéro, en posant* $a+bx^n=z^s$.

2e cas. — *Quand* $\dfrac{m+1}{n}+\dfrac{r}{s}=$ *un nombre entier ou zéro, en posant* $a+bx^n=z^s x^n$.

EXEMPLES

1. $$\int\frac{x^3dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=\int x^3(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{b^2}\frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}}+C.$$

(*) En supposant comme précédemment que le dénominateur de la fonction rationnelle résultante peut être décomposé en facteurs quadratiques réels et en facteurs linéaires.

Solution. $m = 3, \quad n = 2, \quad r = -3, \quad s = 2.$

Ici $\frac{m+1}{n} = 2$, nombre entier.

Par suite, l'exemple proposé se ramène au 1er cas et nous posons

$$a + bx^2 = z^2,$$

d'où $$x = \left(\frac{z^2 - a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad dx = \frac{zdz}{b^{\frac{1}{2}}(z^2 - a)^{\frac{1}{2}}},$$

et $$(a + bx^2)^{\frac{3}{2}} = z^3.$$

$$\int \frac{x^3dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \left(\frac{z^2 - a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{zdz}{b^{\frac{1}{2}}(z^2 - a)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{z^3}$$

$$= \frac{1}{b^2}\int (1 - az^{-2})dz = \frac{1}{b^2}(z + az^{-1}) + C$$

$$= \frac{1}{b^2}\frac{2a + bx^2}{\sqrt{a + bx^2}} + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \frac{(2x^2 - 1)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3} + C.$$

Solution. $m = -4, \quad n = 2, \quad \frac{r}{s} = -\frac{1}{2}.$

Ici $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} = -2$, nombre entier.

Par suite, l'exemple proposé se ramène au 2e cas et nous posons

$$1 + x^2 = z^2x^2, \qquad z = \frac{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{x};$$

d'où $$x^2 = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad 1 + x^2 = \frac{z^2}{z^2 - 1}, \quad \sqrt{1 + x^2} = \frac{z}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}};$$

on a également $$x = \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad x^4 = \frac{1}{(z^2 - 1)^2}; \quad \text{et} \quad dx = -\frac{zdz}{(z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1 + x^2}} = -\int \frac{\dfrac{zdz}{(z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{(z^2 - 1)^2} \cdot \dfrac{z}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}} = -\int (z^2 - 1)dz$$

$$= z - \frac{z^3}{3} + C = \frac{(2x^2 - 1)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3} + C.$$

3. $\int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(3x^2-2)(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{15} + C.$

4. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

5. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{(x^2-2)}{3} + C.$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2a}\log\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{\sqrt{a^2-x^2}+a} + C.$

7. $\int \frac{adx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -a(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(2x+\frac{1}{x}\right) + C.$

8. $\int_0^a \frac{x^5dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{8}{15}a^5.$

9. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{4}.$

10. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^4}{16}.$

11. $\int_0^a x^2(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{\pi a^6}{32}.$

12. $\int \frac{dy}{y(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2a}\log\frac{\sqrt{a^2+y^2}-a}{\sqrt{a^2+y^2}+a} + C.$

13. $\int t^3(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt = (1+2t^2)^{\frac{5}{2}}\frac{5t^2-1}{70} + C.$

14. $\int u(1+u)^{\frac{3}{2}}\,du = \frac{2}{35}(1+u)^{\frac{5}{2}}(5u-2) + C.$

15. $\int \frac{\alpha^2 d\alpha}{(a+b\alpha^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\alpha^3}{3a(a+b\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} + C.$

16. $\int \theta^5(1+\theta^2)^{\frac{2}{3}}\,d\theta = \frac{3}{22}(1+\theta^2)^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{8}(1+\theta^2)^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{10}(1+\theta^2)^{\frac{5}{3}} + C.$

17. $\int \frac{dx}{x^2(a+x^3)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{3x^3+2a}{2a^2x(a+x^3)^{\frac{2}{3}}} + C.$

197. Transformation des différentielles trigonométriques. — D'après la trigonométrie

(A) $$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \qquad 37, \text{ p. } 2.$$

(B) $$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}. \qquad 37, \text{ p. } 2.$$

Mais $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}+1}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}},$

et $$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sec\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}.$$

Si maintenant, nous posons

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z, \qquad \text{ou} \qquad x = 2\operatorname{arc}\operatorname{tg} z,$$

nous obtenons

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \qquad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

En substituant dans (A) et (B), il vient

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

En différentiant $x = 2\operatorname{arc}\operatorname{tg} z$, nous avons également $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$.

Puisque $\sin x$, $\cos x$ et dx sont exprimés rationnellement en fonction de z, il s'ensuit que :

Une différentielle trigonométrique comprenant $\sin x$ *et* $\cos x$ *sous forme rationnelle seulement peut être transformée au moyen de la substitution*

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z,$$

ou, ce qui est la même chose, par les substitutions

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \qquad dx = \frac{2dz}{1+z^2},$$

en une autre expression différentielle qui est rationnelle en z.

Il est évident que si une différentielle trigonométrique contient $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$ et $\operatorname{cosec} x$ sous la forme rationnelle seulement, elle est comprise dans le théorème ci-dessus, puisque ces quatre fonctions peuvent être exprimées rationnellement en fonction de $\sin x$,

ou de cos x, ou des deux. Il en résulte donc que *toute différentielle trigonométrique rationnelle peut être intégrée* (*).

EXEMPLES

1. $$\int \frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Solution. Puisque cette différentielle est rationnelle en sin x et cos x, nous faisons immédiatement les substitutions ci-dessus, ce qui donne

$$\int \frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)} = \int \frac{\left(1+\frac{2z}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\left(1+\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}$$
$$= \int \frac{(1+z^2+2z)dz}{z(1+z^2+1-z^2)} = \frac{1}{2}\int (z+2+z^{-1})dz$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}+2z+\log z\right) + C$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = 1.$

3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x} = 1.$

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3\cos x} = \frac{\pi}{2}.$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dy}{3+2\cos y} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{2+\cos\alpha} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

7. $\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = 1-\sqrt{3}.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin x} = \frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{4-5\sin x} = \frac{1}{3}\log\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right) + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{5-4\cos 2x} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(3\operatorname{tg} x) + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{dt}{2-\cos t} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\sin 2x} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{5\operatorname{tg} x+4}{3}\right) + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x} = 2\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C = x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

15. Établir par la méthode de cet article les formules (16) et (17), p. 327.

16. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x} = \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + 2\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C = \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + x + C.$

(*) Voir le renvoi p. 395.

198. Substitutions diverses. — Jusqu'ici les substitutions considérées ont rendu rationnelle l'expression différentielle donnée. Dans un grand nombre de cas, cependant, des intégrations peuvent être effectuées au moyen de substitutions qui ne rendent pas rationnelle la différentielle donnée, mais aucune règle générale ne peut être formulée à ce sujet et l'expérience acquise en résolvant un grand nombre de problèmes doit être notre guide.

Une substitution très utile est la suivante :

$$x = \frac{1}{z}, \qquad dx = -\frac{dz}{z^2};$$

on l'appelle *substitution réciproque*.

Utilisons cette substitution dans l'exemple suivant.

EXEMPLE. — Trouver $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx$.

Solution. En faisant la substitution $x = \frac{1}{z}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$, nous obtenons

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx = -\int (a^2z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} z dz$$

$$= -\frac{(a^2z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2} + C = -\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3} + C.$$

EXEMPLES

1. $\int \frac{dx}{x(a^3 + x^3)} = \frac{1}{3a^3} \log \frac{x^3}{a^3 + x^3} + C.$ Poser $x^3 = z$.

2. $\int \frac{x^2 - x}{(x - 2)^3} dx = \log (x - 2) - \frac{3x - 5}{(x - 2)^2} + C.$ Poser $x - 2 = z$.

3. $\int \frac{x^3 dx}{(x + 1)^4} = \frac{18x^2 + 27x + 11}{6(x + 1)^3} + \log (x + 1) + C.$ Poser $x + 1 = z$.

4. $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}} + C.$ Poser $x = \frac{1}{z}$.

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a} \log \frac{cx}{a + \sqrt{a^2 + x^2}}.$ Poser $x = \frac{a}{z}$.

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x + x^2}} = \log \frac{cx}{2 + x + 2\sqrt{1 + x + x^2}}.$ Poser $x = \frac{1}{z}$.

7. $\int \frac{\sqrt{1 + \log x}}{x} dx = \frac{2}{3}(1 + \log x)^{\frac{3}{2}} + C.$ Poser $1 + \log x = z$.

8. $\int \frac{e^{2x}dx}{(e^x+1)^{\frac{1}{4}}} = \frac{4}{21}(3e^x-4)(e^x+1)^{\frac{3}{4}} + C.$ Poser $e^x + 1 = z$.

9. $\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^x} = \frac{1}{2e^x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\log(e^x-2) + C.$ Poser $e^x = z$.

10. $\int \frac{xdx}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}-x} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2x}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}}+1\right] + C.$

Poser $x^3 = \frac{z^3}{1-z^3}$.

11. $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,dx = 6.$ Poser $x = \frac{1}{z}$.

12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin\theta+\cos\theta)d\theta}{3+\sin 2\theta} = \frac{\log 3}{4}.$ Poser $\sin\theta - \cos\theta = z$.

13. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \operatorname{arc\,tg} e - \frac{\pi}{4}.$ Poser $e^x = z$.

14. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \pi.$ Poser $x = a\sin^2 z$.

15. $\int_0^{\log 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = 4-\pi.$ Poser $e^x - 1 = z^2$.

16. $\int_0^1 \sqrt{2t+t^2}\,dt = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{3}\right).$ Poser $t+1 = z$.

17. $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\,dx = \frac{4-\pi}{2}.$ Poser $e^x - 1 = z$.

18. $\int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+7x^2+1}} = \log 3.$ Poser $x - \frac{1}{x} = z$.

CHAPITRE XXVII

INTÉGRATION PAR PARTIES. FORMULES DE RÉDUCTION

199. Formule d'intégration par parties. — Si u et v sont des fonctions d'une variable indépendante unique, nous avons, d'après la formule de différentiation d'un produit (**V**, p. 38),

$$d(uv) = udv + vdu,$$

ou, en transposant,

$$udv = d(uv) - vdu.$$

En intégrant cette expression, nous obtenons la formule inverse

$$\textbf{(A)} \qquad \int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu},$$

qu'on appelle *formule d'intégration par parties.*

Cette formule fait dépendre l'intégration de udv, qu'il n'est pas toujours possible d'intégrer directement, de l'intégration de dv et de vdu, qui peuvent être intégrables immédiatement. La méthode *d'intégration par parties* est l'une des plus utiles du Calcul Intégral. Pour appliquer cette formule, la différentielle donnée doit être décomposée en deux facteurs, savoir, u et dv.

On ne peut pas donner de directives générales pour choisir ces facteurs, si ce n'est que :

(*a*) *dx est toujours une partie de dv ;*

(*b*) *il doit être possible d'intégrer dv ;*

(*c*) *quand l'expression à intégrer est le produit de deux fonctions, il est généralement préférable de choisir la plus compliquée comme partie de dv.*

Les exemples suivants montreront en détail comment on applique la formule :

Exemple I. — Trouver $\int x \cos x dx$.

Solution. Posons $u = x$ et $dv = \cos x dx$; alors $du = dx$ et

$$v = \int \cos x dx = \sin x.$$

En substituant dans (A), il vient

$$\int \overset{u}{\widehat{x}} \overset{dv}{\widetilde{\cos x dx}} = \overset{u}{\widehat{x}} \overset{v}{\widetilde{\sin x}} - \int \overset{v}{\widetilde{\sin x}} \overset{du}{\widetilde{dx}}$$

$$= x \sin x + \cos x + C.$$

Exemple II. — Trouver $\int x \log x dx$.

Solution. Posons $u = \log x$ et $dv = x dx$; alors $du = \frac{dx}{x}$ et $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$.

En substituant dans (A), il vient

$$\int x \log x dx = \log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Exemple III. — Trouver $\int x e^{ax} dx$.

Solution. Posons $u = e^{ax}$ et $dv = x dx$;

alors $du = e^{ax} \cdot a dx$ et $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$.

En substituant dans (A), il vient

$$\int x e^{ax} dx = e^{ax} \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^{ax} a dx$$

$$= \frac{x^2 e^{ax}}{2} - \frac{a}{2} \int x^2 e^{ax} dx.$$

Mais $x^2 e^{ax} dx$ n'est pas aussi simple à intégrer que $x e^{ax} dx$, ce qui indique que nous n'avons pas choisi nos facteurs convenablement. A la place,

posons $u = x$ et $dv = e^{ax} dx$;

alors $du = dx$ et $v = \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$.

En substituant dans (A), il vient

$$\int x e^{ax} dx = x \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} dx$$

$$= \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right) + C.$$

Il peut être nécessaire d'appliquer plus d'une fois la formule d'intégration par parties, comme dans l'exemple suivant :

Exemple IV. — Trouver $\int x^2 e^{ax} dx$.

Solution. Posons $u = x^2$ et $dv = e^{ax}dx$;

alors $du = 2xdx$ et $v = \int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$.

En substituant dans (A), il vient

$$\int x^2e^{ax}dx = x^2 \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot 2xdx$$

(B) $$= \frac{x^2e^{ax}}{a} - \frac{2}{a}\int xe^{ax}dx.$$

L'intégrale du dernier terme peut être trouvée en appliquant à nouveau la formule (A), ce qui donne

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right).$$

En substituant ces résultats dans (B), nous obtenons

$$\int x^2e^{ax}dx = \frac{x^2e^{ax}}{a} - \frac{2e^{ax}}{a^2}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C.$$

Parmi les applications les plus importantes de la méthode d'intégration par parties, on peut citer l'intégration :

(*a*) *des différentielles contenant des produits ;*
(*b*) *des différentielles contenant des logarithmes ;*
(*c*) *des différentielles contenant des fonctions circulaires inverses.*

EXEMPLES

1. $\int x^2 \log xdx = \frac{x^3}{3}\left(\log x - \frac{1}{3}\right) + C.$

2. $\int \alpha \sin \alpha d\alpha = -\alpha \cos \alpha + \sin \alpha + C.$

3. $\int \text{arc sin } xdx = x \text{ arc sin } x + \sqrt{1 - x^2} + C.$

Note. — Poser $u = \text{arc sin } x$ et $dv = dx$, etc.

4. $\int \log xdx = x(\log x - 1) + C.$

5. $\int \text{arc tg } xdx = x \text{ arc tg } x - \log (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$

6. $\int x^n \log xdx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$

7. $\int x \text{ arc tg } xdx = \frac{x^2+1}{2} \text{ arc tg } x - \frac{x}{2} + C.$

8. $\int \text{arc cotg } ydy = y \text{ arc cotg } y + \frac{1}{2} \log (1 + y^2) + C.$

9. $\int xa^x dx = a^x\left[\frac{x}{\log a} - \frac{1}{\log^2 a}\right] + C.$

10. $\int t^2a^t dt = a^t\left[\frac{t^2}{\log a} - \frac{2t}{\log^2 a} + \frac{2}{\log^3 a}\right] + C.$

11. $\int \cos\theta \log\sin\theta d\theta = \sin\theta(\log\sin\theta - 1) + C.$

12. $\int x^2e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$

13. $\int x\sin x\cos x dx = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x + C.$

14. $\int x^2e^{-x}dx = e^{-x}(2 - 2x - x^2) + C.$

15. $\int \text{arc tg}\sqrt{x}\,dx = x\,\text{arc tg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \text{arc tg}\sqrt{x} + C.$

16. $\int xa^x dx = \frac{a^x}{\log a}\left[x - \frac{1}{\log a}\right] + C.$

17. $\int_0^1 x\log x dx = -\frac{1}{4}.$

18. $\int_0^1 \log y dy = -1.$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha^2 \sin\alpha d\alpha = \pi - 2.$

20. $\int x^4 \log x dx = \frac{x^4}{4}\left(\log x - \frac{1}{4}\right) + C.$

21. $\int_0^1 \text{arc sin}\, z dz = \frac{\pi}{2} - 1.$

22. $\int_0^1 \text{arc tg}\,\theta d\theta = \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}.$

23. $\int_0^1 s^2\log s ds = -\frac{1}{9}.$

24. $\int x^3e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^3 - \frac{3x^2}{a} + \frac{6x}{a^2} - \frac{6}{a^3}\right) + C.$

25. $\int \varphi^2\sin\varphi d\varphi = 2\cos\varphi + 2\varphi\sin\varphi - \varphi^2\cos\varphi + C.$

26. $\int (\log x)^2 dx = x\left[\log^2 x - 2\log x + 2\right] + C.$

27. $\int \alpha\,\text{tg}^2\alpha d\alpha = \alpha\,\text{tg}\,\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \log\cos\alpha + C.$

28. $\int \frac{\log x dx}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}\log x - \log(x+1) + C.$

NOTE. — Poser $u = \log x$ et $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$, etc.

29. $\int x^2 \text{arc sin}\, x dx = \frac{x^3}{3}\text{arc sin}\, x + \frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2} + C.$

30. $\int \sec^2\theta \log\text{tg}\,\theta d\theta = \text{tg}\,\theta(\log\text{tg}\,\theta - 1) + C.$

31. $\int \log(\log x)\frac{dx}{x} = \log x \cdot \log(\log x) - \log x + C.$

32. $\int \frac{\log(x+1)dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}\left[\log(x+1) - 2\right] + C.$

33. $\int x^3(a-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{3}x^2(a-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}(a-x^2)^{\frac{5}{2}} + C.$

NOTE. — Poser $u = x^2$ et $dv = (a-x^2)^{\frac{1}{2}}xdx$, etc.

34. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

35. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$

36. $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C.$

37. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

38. $\int\frac{(\log x)^2dx}{x^{\frac{5}{2}}} = -\frac{2}{3x^{\frac{3}{2}}}\left[\log^2 x + \frac{4}{3}\log x + \frac{8}{9}\right] + C.$

200. Formules de réduction des différentielles binomes. — On a montré au § 195, p. 393, que toute différentielle binome peut être ramenée à la forme

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

dans laquelle p est un nombre rationnel, m et n, entiers, et n, positif.

Nous avons également appris au § 196, p. 394, à intégrer une expression différentielle de cette forme dans certains cas. En général, on peut intégrer par parties une telle expression, en utilisant la formule (**A**), p. 402. Cependant, l'application de la méthode d'*intégration par parties* à chaque exemple est une opération longue et pénible. Quand la différentielle binome ne peut pas être intégrée rapidement par une des méthodes étudiées jusqu'ici, il est d'usage d'employer des *formules de réduction* établies d'après la méthode d'intégration par parties.

Au moyen de ces formules de réduction, la différentielle donnée est exprimée comme la somme de deux termes, dont l'un n'est pas affecté du signe d'intégration et dont l'autre est une intégrale de la même forme que l'expression primitive, mais plus facile à intégrer. Les quatre principales formules de réduction sont les suivantes :

$$(\mathbf{A})\quad \int \mathbf{x}^m(\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathbf{x}^n)^p d\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^{m-n+1}(\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathbf{x}^n)^{p+1}}{(\mathbf{n}\mathbf{p}+\mathbf{m}+1)\mathbf{b}} - \frac{(\mathbf{m}-\mathbf{n}+1)\mathbf{a}}{(\mathbf{n}\mathbf{p}+\mathbf{m}+1)\mathbf{b}}\int \mathbf{x}^{m-n}(\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathbf{x}^n)^p d\mathbf{x}.$$

$$\text{(B)} \quad \int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

$$\text{(C)} \quad \int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)a} - \frac{(np+n+m+1)b}{(m+1)a}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx.$$

$$\text{(D)} \quad \int x^m(a+bx^n)^p dx = -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{np+n+m+1}{n(p+1)a}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}dx.$$

Il n'est pas nécessaire que le lecteur se rappelle ces formules par cœur, mais il doit savoir le résultat donné par chacune d'elles et les cas dans lesquels elles se trouvent en défaut. Ainsi :

La formule (**A**) *diminue l'exposant m de n unités; elle est en défaut quand* $np+m+1=0$.

La formule (**B**) *diminue p de* 1 ; *elle est en défaut quand* $np+m+1=0$.

La formule (**C**) *accroît m de n ; elle est en défaut quand* $m+1=0$.

La formule (**D**) *accroît p de* 1 ; *elle est en défaut quand* $p+1=0$.

I. *Établissement de la formule* (**A**). — La formule d'intégration par parties est

$$\text{(A)} \qquad \int udv = uv - \int vdu. \qquad \text{(A), p. 402.}$$

Nous pouvons appliquer cette formule à l'intégration de

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

en posant $u = x^{m-n+1}$ (*) et $dv = (a+bx^n)^p x^{n-1}dx$; alors

$$du = (m-n+1)x^{m-n}dx \qquad \text{et} \qquad v = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}.$$

(*) Pour intégrer dv d'après (4), il est nécessaire que x en dehors de la parenthèse ait l'exposant -1. En retranchant $n-1$ de m, il reste $m-n+1$ pour l'exposant de x dans u.

En substituant dans (A), il vient

$$\text{(B)}\quad \int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx.$$

Mais

$$\begin{aligned}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx &= \int x^{m-n}(a+bx^n)^p(a+bx^n)dx\\ &= a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx\\ &\quad + b\int x^m(a+bx^n)^p dx.\end{aligned}$$

En substituant ces résultats dans (B), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p dx = {} & \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}\\ & - \frac{(m-n+1)a}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx\\ & - \frac{m-n+1}{n(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^p dx.\end{aligned}$$

En transposant le dernier terme dans le premier membre, en réduisant et en résolvant par rapport à $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, nous obtenons

$$\textbf{(A)}\quad \int \mathbf{x^m(a+bx^n)^p dx} = \frac{\mathbf{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}}{\mathbf{b(np+m+1)}} - \frac{\mathbf{a(m-n+1)}}{\mathbf{b(np+m+1)}}\int \mathbf{x^{m-n}(a+bx^n)^p dx}.$$

On voit par la formule (**A**) que l'intégration de $x^m(a+bx^n)^p dx$ dépend de l'intégration d'une autre différentielle de la même forme dans laquelle m est remplacé par $m-n$. Par des applications répétées de la formule (**A**), m peut être diminué d'un multiple quelconque de n.

Quand $np+m+1=0$, la formule (**A**) est évidemment en défaut (le dénominateur devenant nul). Mais dans ce cas

$$\frac{m+1}{n}+p=0;$$

par suite, nous pouvons appliquer la méthode du § 196, p. 394 et la formule n'est pas nécessaire.

II. *Établissement de la formule* (B). — En séparant les facteurs, nous pouvons écrire

$$\text{(C)}\qquad \int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \int x^m(a+bx^n)^{p-1}(a+bx^n)dx$$
$$= a\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx$$
$$+ b\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

Appliquons maintenant la formule (A) au dernier terme de (C) en substituant dans la formule $m+n$ à m et $p-1$ à p. Nous obtenons

$$b\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1}$$
$$-\frac{a(m+1)}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

En substituant ces résultats dans (C) et en réduisant les termes semblables, nous obtenons

$$\textbf{(B)}\qquad \int \mathbf{x}^m(a+b\mathbf{x}^n)^p d\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^{m+1}(a+b\mathbf{x}^n)^p}{np+m+1}$$
$$+\frac{anp}{np+m+1}\int \mathbf{x}^m(a+b\mathbf{x}^n)^{p-1}d\mathbf{x}.$$

Chaque application de la formule (B) diminue p d'une unité. Cette formule est en défaut dans le même cas que la formule (A).

III. *Établissement de la formule* (C). — En résolvant la formule (A) par rapport à

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx,$$

et en substituant $m+n$ à m, nous obtenons

$$\textbf{(C)}\qquad \int \mathbf{x}^m(a+b\mathbf{x}^n)^p d\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^{m+1}(a+b\mathbf{x}^n)^{p+1}}{a(m+1)}$$
$$-\frac{b(np+n+m+1)}{a(m+1)}\int \mathbf{x}^{m+n}(a+b\mathbf{x}^n)^p d\mathbf{x}.$$

Par conséquent, chaque fois que nous appliquons la formule (C), m est remplacé par $m+n$. Quand $m+1=0$, la formule (C) est en défaut, mais alors l'expression différentielle peut être intégrée par la méthode du § 196, p. 394, et l'application de la formule n'est pas nécessaire.

IV. *Établissement de la formule* (D). — En résolvant la formule (B) par rapport à

$$\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx$$

et en substituant $p+1$ à p, nous obtenons

$$\text{(D)} \quad \int x^m(a+bx^n)^p dx = -\frac{x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{np+n+m+1}{an(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}dx.$$

Chaque application de (D) accroît p d'une unité. Évidemment (D) est en défaut quand $p+1=0$, mais alors $p=-1$ et l'expression est rationnelle.

EXEMPLES

1. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$

Solution. Ici $m=3$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=-1$.

Nous appliquons dans ce cas la formule de réduction (A), parce que l'intégration de la différentielle dépend alors de l'intégration de $\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$, laquelle relève de la formule (4), p. 327. Par suite, en substituant dans (A), nous obtenons

$$\int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{3-2+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-1(-1+3+1)} - \frac{1(3-2+1)}{-1(-1+3+1)}\int x^{3-2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= -\tfrac{1}{3}x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{3}\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= -\tfrac{1}{3}x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\tfrac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{8}a^2x\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3}{8}a^4 \arc\sin\frac{x}{a}+C.$

NOTE. — Appliquer (A) deux fois.

3. $\int (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C.$

NOTE. — Ici $m=0$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$, $a=a^2$, $b=1$. Appliquer (B) une fois.

4. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec} x + C.$

NOTE. — Appliquer (C) une fois.

5. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

6. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{3}(x^2-2a^2)\sqrt{a^2+x^2} + C.$

7. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^4}{5}+\frac{4x^2}{15}+\frac{8}{15}\right)\sqrt{1-x^2} + C.$

8. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

NOTE. — Appliquer (A) et ensuite (B).

9. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$

NOTE. — Appliquer (D) une fois.

10. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\log\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

11. $\int \frac{x^3dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2+2a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C.$

12. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{(3a^2-2x^2)x}{3a^4(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} + C.$

13. $\int (x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$

14. $\int x^2(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$

15. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x+3a}{2}(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3a^2}{2}\operatorname{arc\,sin\,vers}\frac{x}{a} + C.$

NOTE. — $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int x^{\frac{3}{2}}(2a-x)^{-\frac{1}{2}}dx.$ Appliquer (A) deux fois.

16. $\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C.$

17. $\int \frac{y^3dy}{\sqrt{2ry-y^2}} = -\frac{2y^2+5r(y+3r)}{6}\sqrt{2ry-y^2} + \frac{5}{2}r^3\operatorname{arc\,sin\,vers}\frac{y}{r} + C.$

18. $\displaystyle\int \frac{tdt}{\sqrt{2at-t^2}} = -(2at-t^2)^{\frac{1}{2}} + a \text{ arc sin vers } \frac{t}{a} + C.$

19. $\displaystyle\int \frac{ds}{(a^2+s^2)^3} = \frac{s}{4a^2(a^2+s^2)^2} + \frac{3s}{8a^4(a^2+s^2)} + \frac{3}{8a^5} \text{ arc tg } \frac{s}{a} + C.$

20. $\displaystyle\int \frac{r^8dr}{\sqrt{1-r^3}} = -\frac{2}{45}(3r^6+4r^3+8)\sqrt{1-r^3} + C.$

21. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^2}.$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

23. $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^3}}.$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}.$

25. $\displaystyle\int t^5\sqrt{a^2+t^3}\,dt.$

26. $\displaystyle\int \frac{z^5dz}{\sqrt{z^4+9}}.$

27. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}\,dx}{x}.$

28. $\displaystyle\int \frac{(1-x^3)^{\frac{5}{2}}\,dx}{x}.$

29. $\displaystyle\int \frac{s^7ds}{(a+bs^4)^{\frac{2}{3}}}.$

30. $\displaystyle\int \frac{\alpha^8d\alpha}{\sqrt{3-\alpha^3}}.$

31. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-y^2}\,dy}{y^4}.$

32. $\displaystyle\int \frac{dt}{t(a^4-t^4)^{\frac{2}{3}}}.$

201. Formules de réduction des différentielles trigonométriques. — La méthode du dernier paragraphe qui fait dépendre l'intégrale donnée d'une autre intégrale de la même forme est appelée *méthode de réduction successive.*

Nous allons maintenant appliquer la même méthode aux différentielles trigonométriques en établissant les *formules de réduction trigonométriques* ci-après, et en illustrant leur emploi au moyen d'exemples :

(E) $$\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

(F) $$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x dx.$$

(G) $$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x \cos^{n+2} x dx.$$

$$\text{(H)} \quad \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x dx.$$

Ici, le lecteur devra noter que

La formule (E) *diminue l'exposant n de 2 unités; elle est en défaut quand $m+n=0$.*

La formule (F) *diminue m de 2; elle est en défaut quand $m+n=0$.*

La formule (G) *accroît n de 2; elle est en défaut quand $n+1=0$.*

La formule (H) *accroît m de 2; elle est en défaut quand $m+1=0$.*

Pour établir ces formules, nous appliquerons comme ci-dessus la formule d'intégration par parties, savoir

$$\text{(A)} \qquad \int u dv = uv - \int v du. \qquad \text{(A), p. 402.}$$

Posons $u = \cos^{n-1} x$, et $dv = \sin^m x \cos x dx$;

alors $du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x dx$, et $v = \dfrac{\sin^{m+1} x}{m+1}$.

En substituant dans (A), nous obtenons

$$\text{(B)} \quad \int \sin^m x \cos^n x dx = +\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx.$$

De même, si nous posons

$$u = \sin^{m-1} x \quad \text{et} \quad dv = \cos^n x \sin x dx,$$

nous obtenons

$$\text{(C)} \quad \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx.$$

Mais $\displaystyle\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx = \int \sin^m x (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x dx$

$$= \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \int \sin^m x \cos^n x dx.$$

En substituant dans (B), en réduisant les termes semblables et en résolvant par rapport à $\int \sin^m x \cos^n x dx$, nous obtenons

$$\text{(E)} \quad \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

En faisant une substitution similaire dans (C), nous obtenons

$$\text{(F)} \quad \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx.$$

En résolvant la formule (E) par rapport à l'intégrale du membre de droite et en augmentant n de 2, nous obtenons

$$\text{(G)} \quad \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x dx.$$

De même, nous obtenons, d'après la formule (F),

$$\text{(H)} \quad \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x dx.$$

Les formules (E) et (F) sont en défaut quand $m+n=0$, la formule (G) quand $n+1=0$ et la formule (H) quand $m+1=0$. Mais, dans ces cas, nous pouvons intégrer par des méthodes qui ont été exposées précédemment.

Il est clair que quand m et n sont entiers, on peut faire dépendre l'intégrale

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

de l'une des intégrales ci-après, en utilisant une des formules de réduction qui précèdent :

$$\int dx, \quad \int \sin x dx, \quad \int \cos x dx, \quad \int \sin x \cos x dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \operatorname{cosec} x dx, \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x dx,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin x}, \quad \int \operatorname{tg} x dx, \quad \int \operatorname{cotg} x dx.$$

Nous avons appris à intégrer toutes ces expressions.

EXEMPLES

1. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = -\frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{\sin x \cos^3 x}{24} + \frac{1}{16}(\sin x \cos x + x) + C.$

Solution. En appliquant d'abord la formule (F), nous obtenons

(A) $$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = -\frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{1}{6}\int \cos^4 x dx.$$

[Ici, $m = 2$, $n = 4$.]

En appliquant la formule (E) à l'intégrale du second membre de (A), nous obtenons

(B) $$\int \cos^4 x dx = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x dx.$$

[Ici, $m = 0$, $n = 4$.]

L'application de la formule (E) au second membre de (B) donne

(C) $$\int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2}.$$

Substituons maintenant le résultat (C) dans (B), et ensuite ce résultat dans (A). On obtient ainsi la réponse indiquée ci-dessus.

2. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \frac{\cos x}{2}\left(\frac{\sin^5 x}{3} - \frac{\sin^3 x}{12} - \frac{\sin x}{8}\right) + \frac{x}{16} + C.$

3. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{cotg} x - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + C.$

4. $\int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^2 x} = -\frac{\operatorname{cotg} x}{2}(3 - \cos^2 x) - \frac{3x}{2} + C.$

5. $\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\log(\sec x + \operatorname{tg} x) + C.$

6. $\int \operatorname{cosec}^3 x dx = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x + \frac{1}{2}\log(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x) + C.$

7. $\int \frac{\cos^4 \alpha d\alpha}{\sin^3 \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - \cos \alpha - \frac{3}{2} \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + C.$

8. $\int \sin^6 \alpha d\alpha = -\frac{\cos \alpha}{2}\left(\frac{\sin^5 \alpha}{3} + \frac{5}{12} \sin^3 \alpha + \frac{5}{8} \sin \alpha\right) + \frac{5\alpha}{16} + C.$

9. $\int \operatorname{cosec}^5 \theta d\theta = -\frac{\cos \theta}{4}\left(\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{3}{2 \sin^2 \theta}\right) + \frac{3}{8} \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + C.$

10. $\int \sec^7 \varphi d\varphi = \frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi}\left(\frac{1}{3 \cos^4 \varphi} + \frac{5}{12 \cos^2 \varphi} + \frac{5}{8}\right) + \frac{5}{16} \log(\sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi) + C.$

11. $\int \cos^8 t dt = \frac{\sin t}{8}\left(\cos^7 t + \frac{7}{6} \cos^5 t + \frac{35}{24} \cos^3 t + \frac{35}{16} \cos t\right) + \frac{35t}{128} + C.$

12. $\int \frac{dy}{\sin^4 y \cos^3 y} = -\frac{1}{\cos^2 y}\left(\frac{1}{3 \sin^3 y} + \frac{5}{3 \sin y} - \frac{5}{2} \sin y\right) + \frac{5}{2} \log(\sec y + \operatorname{tg} y) + C.$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{512}.$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx = \frac{35\pi}{256}.$

15. $\int_0^{\pi} \sin^6 \theta d\theta = \frac{5\pi}{16}.$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 \alpha d\alpha = \frac{35\pi}{256}.$

17. $\int_0^{\pi} \sin^4 x dx = \frac{3\pi}{8}.$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{3\pi}{16}.$

202. Trouver $\int e^{ax} \sin nx dx$ et $\int e^{ax} \cos nx dx$. — Intégrons $e^{ax} \sin nx dx$ par parties, en posant

$$u = e^{ax}, \qquad \text{et} \qquad dv = \sin nx dx;$$

alors

$$du = ae^{ax} dx, \qquad \text{et} \qquad v = -\frac{\cos nx}{n}.$$

En substituant dans la formule (A), p. 402, savoir

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

nous obtenons

$$\text{(A)} \qquad \int e^{ax} \sin nx dx = -\frac{e^{ax} \cos nx}{n} + \frac{a}{n} \int e^{ax} \cos nx dx.$$

Intégrons de nouveau $e^{ax} \sin nx dx$ par parties, en posant

$$u = \sin nx \qquad \text{et} \qquad dv = e^{ax} dx;$$

alors

$$du = n \cos nx dx, \qquad \text{et} \qquad v = \frac{e^{ax}}{a}.$$

En substituant dans (A), p. 402, nous obtenons

$$\text{(B)} \qquad \int e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax} \sin nx}{a} - \frac{n}{a} \int e^{ax} \cos nx dx.$$

En éliminant $\int e^{ax} \cos nx dx$ entre (A) et (B), nous avons

$$(a^2 + n^2) \int e^{ax} \sin nx dx = e^{ax}(a \sin nx - n \cos nx),$$

ou

$$\int e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax}(a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

Nous pouvons obtenir de même

$$\int e^{ax} \cos nx dx = \frac{e^{ax}(n \sin nx + a \cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

En traitant les exemples ci-après, le lecteur ne devra pas employer les formules qui précèdent, mais suivre la méthode par laquelle elles ont été obtenues.

EXEMPLES

1. $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$

2. $\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$

3. $\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x}}{13} (3 \sin 3x + 2 \cos 3x) + C.$

4. $\int \frac{\sin x dx}{e^x} = - \frac{\sin x + \cos x}{2e^x} + C.$

5. $\int \frac{\cos 2x dx}{e^{3x}} = \frac{1}{13e^{3x}} (2 \sin 2x - 3 \cos 2x) + C.$

6. $\int e^x \sin^2 x dx = \frac{e^x}{2}\left(1 - \frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{5}\right) + C.$

7. $\int e^\alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{e^\alpha}{2}\left(1 + \frac{2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{5}\right) + C.$

8. $\int e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = e^{\frac{x}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right) + C.$

9. $\int e^{a\alpha} (\sin a\alpha + \cos a\alpha) d\alpha = \frac{e^{a\alpha} \sin a\alpha}{a} + C.$

10. $\int e^{3x} (\sin 2x - \cos 2x) dx = \frac{e^{3x}}{13} (\sin 2x - 5 \cos 2x) + C.$

11. $\int_0^\infty e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2}$. $\qquad \int_0^\infty e^{-3x} \cos 2x dx = \frac{3}{13}$.

CHAPITRE XXVIII

L'INTÉGRATION DÉFINIE COMME OPÉRATION DE SOMMATION

203. Introduction. — Jusqu'ici nous avons défini l'intégration comme l'*inverse de la différentiation*. Dans un grand nombre d'applications du calcul intégral, il est cependant préférable de définir l'intégration comme une *opération de sommation*. En effet, le calcul intégral a été inventé dans le but de calculer l'aire limitée par des courbes en supposant que l'aire donnée est divisée en un « nombre infini de parties infiniment petites, appelées *éléments*, la somme de tous ces éléments étant l'aire cherchée ». Historiquement, le signe d'intégration est simplement l'S long, employé par d'anciens auteurs pour indiquer « somme ».

Cette nouvelle définition, qui sera développée dans le paragraphe suivant, est d'une importance fondamentale et il est essentiel que le lecteur comprenne complètement sa signification afin de pouvoir appliquer le calcul intégral à des problèmes pratiques.

204. Théorème fondamental du calcul intégral. — On a montré au § 174, p. 363, que si $\varphi(x)$ est la dérivée de $f(x)$, la valeur de l'intégrale définie

$$\text{(A)} \qquad \int_a^b \varphi(x)dx = f(b) - f(a)$$

donne l'aire limitée par la courbe $y = \varphi(x)$, l'axe des x et les ordonnées élevées en $x = a$ et $x = b$.

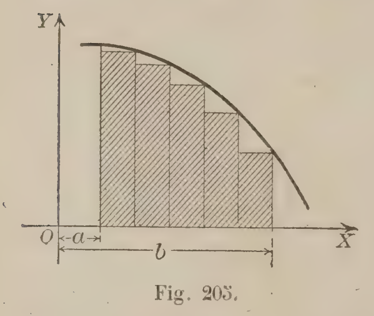


Fig. 205.

Faisons maintenant la construction suivante relativement à cette aire (*fig.* 205). Divisons l'intervalle de $x = a$ à $x = b$ en un nombre quelconque n de sous-intervalles égaux, élevons des ordonnées aux points de division et complétons les rectangles en menant des lignes horizontales par les extrémités des

ordonnées, comme dans la figure 205. Il est clair que la somme des aires de ces n rectangles (la surface ombrée) est une valeur approchée de l'aire en question. Il est encore évident que la *limite* de la somme des aires de ces rectangles quand leur nombre n croît indéfiniment, est *égale* à l'aire comprise sous la courbe.

Exécutons maintenant la construction suivante, plus générale (*fig.* 206). Divisons l'intervalle en n sous-intervalles *non nécessairement égaux,* et élevons des ordonnées aux points de division. Choisissons un point placé *d'une manière quelconque*(*) à l'intérieur de chaque subdivision, élevons des ordonnées en ces points et par leurs extrémités, menons des lignes horizontales pour former des rectangles, comme dans la figure 206. La somme des aires de ces n rectangles (la surface ombrée) est, comme précédemment, approximativement égale à l'aire comprise sous la courbe ; et la *limite de cette somme* quand n croît indéfiniment et que chaque sous-intervalle tend vers zéro, est précisément l'aire comprise sous la courbe. Ces considérations montrent que l'intégrale définie (A) peut être regardée comme la *limite d'une somme*. Exprimons maintenant ce résultat par une formule.

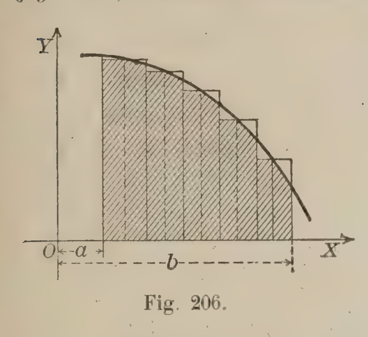


Fig. 206.

(1) Désignons les longueurs des sous-intervalles successifs par

$$\Delta x_1, \quad \Delta x_2, \quad \Delta x_3, \quad \cdots, \quad \Delta x_n.$$

(2) Désignons les abscisses des points choisis dans les sous-intervalles par

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \cdots, \quad x_n.$$

Les ordonnées de la courbe en ces points sont alors

$$\varphi(x_1), \quad \varphi(x_2), \quad \varphi(x_3), \quad \cdots, \quad \varphi(x_n).$$

Fig. 207

(3) Les aires des rectangles successifs sont évidemment

$$\varphi(x_1)\Delta x_1, \quad \varphi(x_2)\Delta x_2, \quad \varphi(x_3)\Delta x_3, \quad \cdots, \quad \varphi(x_n)\Delta x_n.$$

(*) Cette construction comprend le cas précédent comme cas particulier, savoir, quand le point est choisi à une extrémité d'un sous-intervalle.

(4) L'aire comprise sous la courbe est par suite égale à

$$\lim_{n=\infty}\left[\varphi(x_1)\Delta x_1+\varphi(x_2)\Delta x_2+\varphi(x_3)\Delta x_3+\cdots+\varphi(x_n)\Delta x_n\right].$$

Mais, d'après (A), l'aire comprise sous la courbe $=\int_a^b \varphi(x)dx.$

Par conséquent, notre discussion donne

$$\text{(B)}\quad \int_a^b \varphi(x)dx=\lim_{n=\infty}\left[\varphi(x_1)\Delta x_1+\varphi(x_2)\Delta x_2+\cdots+\varphi(x_n)\Delta x_n\right].$$

Cette équation a été établie en faisant usage de la notion d'aire. L'intuition nous a aidés à établir ce résultat. Considérons maintenant (B) *simplement comme un théorème d'analyse ;* il peut être énoncé comme il suit :

Théorème fondamental du calcul intégral. — *Soit $\varphi(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $x=a$ à $x=b$. Divisons cet intervalle en n sous-intervalles dont les longueurs sont Δx_1, Δx_2, $\cdots$, Δx_n, et choisissons un point dans chaque sous-intervalle, les abscisses des points ainsi choisis étant respectivement x_1, x_2, $\cdots$, x_n. Considérons la somme*

$$\text{(C)}\quad \varphi(x_1)\Delta x_1+\varphi(x_2)\Delta x_2+\cdots+\varphi(x_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\Delta x_i.$$

La valeur limite de cette somme quand n croît indéfiniment et que chaque sous-intervalle tend vers zéro est égale à la valeur de l'intégrale définie

$$\int_a^b \varphi(x)dx.$$

L'équation (B) peut s'écrire en abrégé comme il suit

$$\text{(D)}\qquad \int_a^b \varphi(x)dx=\lim_{n=\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\Delta x_i.$$

L'importance de ce théorème résulte du fait que *nous pouvons calculer par intégration toute grandeur qui est la limite d'une somme de la forme* (C).

On peut remarquer que chaque terme de la somme (C) est une expression *différentielle,* puisque les longueurs Δx_1, Δx_2, $\cdots$, Δx_n tendent vers zéro. Chaque terme est également appelé un élément de

la grandeur à calculer. La règle suivante sera utile dans l'application du théorème qui précède aux problèmes pratiques.

Théorème fondamental. Règle. — *1re opération. Diviser la grandeur à calculer en éléments similaires tels qu'il soit évident que le résultat désiré sera trouvé en prenant la limite d'une somme de ces éléments.*

2e opération. Trouver les expressions des grandeurs de ces éléments telles que leur somme soit de la forme (C).

3e opération. Les limites convenables $x = a$ et $x = b$ ayant été choisies, appliquer le théorème fondamental

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\Delta x_i = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

et intégrer.

205. Démonstration analytique du théorème fondamental. — Comme dans le paragraphe précédent, divisons l'intervalle de $x = a$ à $x = b$ en un nombre quelconque n de sous-intervalles, non nécessairement égaux, et désignons les abscisses des points de division par $b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ et les longueurs des sous-intervalles par $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$. Désignons par $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ les abscisses (une dans chaque intervalle) déterminées d'après le théorème de la moyenne (44), p. 188 ; élevons des ordonnées en ces points et par leurs extrémités menons des lignes horizontales pour former des rectangles comme dans la figure 208.

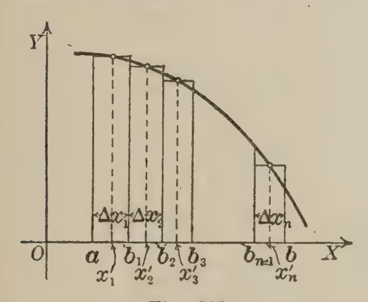


Fig. 208.

Remarquons qu'ici $\varphi(x)$ prend la place de $\varphi'(x)$. En appliquant (44) au premier intervalle ($a = a$, $b = b_1$, et x_1' se trouve compris entre a et b_1), nous avons

$$\frac{f(b_1) - f(a)}{b_1 - a} = \varphi(x_1'),$$

ou, puisque $b_1 - a = \Delta x_1$,

$$f(b_1) - f(a) = \varphi(x_1')\Delta x_1.$$

Nous avons également

$$f(b_2) - f(b_1) = \varphi(x_2')\Delta x_2, \text{ pour le deuxième intervalle,}$$
$$f(b_3) - f(b_2) = \varphi(x_3')\Delta x_3, \text{ pour le troisième intervalle,}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{etc.,}$$
$$f(b) - f(b_{n-1}) = \varphi(x_n')\Delta x_n, \text{ pour le } n^e \text{ intervalle.}$$

En additionnant ces égalités, nous obtenons

$$\text{(E)} \qquad f(b) - f(a) = \varphi(x_1')\Delta x_1 + \varphi(x_2')\Delta x_2 + \cdots + \varphi(x_n')\Delta x_n.$$

Mais $\varphi(x'_1) \cdot \Delta x_1 =$ l'aire du premier rectangle,
$\varphi(x'_2) \cdot \Delta x_2 =$ l'aire du deuxième rectangle, etc.

Par suite, la somme du membre droit de (E) est égale à la somme des aires des rectangles.

Mais, d'après (A), p. 418, le membre de gauche de (E) est égal à l'aire comprise entre la courbe $y = \varphi(x)$, l'axe des x et les ordonnées $x = a$ et $x = b$. Donc la somme

$$\text{(F)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \varphi(x'_i)\Delta x_i$$

est égale à cette aire. Et tandis que la somme correspondante

$$\text{(G)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\Delta x_i$$

[Expression dans laquelle x_i est une abscisse *quelconque* du sous-intervalle Δx_i.]

(formée comme au paragraphe précédent) ne donne pas une surface égale, nous pouvons néanmoins montrer que les deux sommes (F) et (G) tendent à devenir égales quand n croît sans limite et que chaque sous-intervalle tend vers zéro ; car la différence $\varphi(x'_i) - \varphi(x_i)$ ne dépasse pas en valeur numérique la différence entre la plus grande et la plus petite ordonnée dans Δx_i.

Et de plus, il est toujours possible (*) de rendre toutes ces différences plus petites en valeur numérique que tout nombre positif quelconque ε, si petit qu'il soit, en poussant assez loin l'opération de subdivision, c'est-à-dire en choisissant n suffisamment grand. Par suite, en choisissant n dans ces conditions, la différence entre les sommes (F) et (G) est plus petite en valeur numérique que $\varepsilon(b - a)$, c'est-à-dire que toute quantité positive assignable, si petite qu'elle soit. Par conséquent, quand n croît sans limite, les sommes (F) et (G) tendent à devenir égales, et puisque (F) est constamment égale à l'aire, il s'ensuit que

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \underset{n=\infty}{\text{limite}} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\Delta x_i,$$

résultat fondamental dans lequel l'intervalle $[a, b]$ est subdivisé d'une manière quelconque et où x_i est une abscisse quelconque du sous-intervalle correspondant.

206. Aires des courbes planes. Coordonnées rectangulaires. — Ainsi qu'on l'a déjà expliqué, l'aire comprise entre une courbe, l'axe des x et les ordonnées $x = a$ et $x = b$ est donnée par la formule

$$\textbf{(A)} \qquad \textbf{aire} = \int_a^b y\,dx,$$

la valeur de y en fonction de x étant substituée d'après l'équation de la courbe. On retient facilement l'équation (**A**) en observant que ydx

(*) On montre dans des ouvrages d'analyse plus avancés que c'est le cas.

représente l'aire d'un rectangle (tel que CR) de base dx et de hauteur y (*fig.* 209). Il convient de considérer l'aire cherchée ABQP comme la limite de la somme de tous les rectangles compris entre les ordonnées AP et BQ.

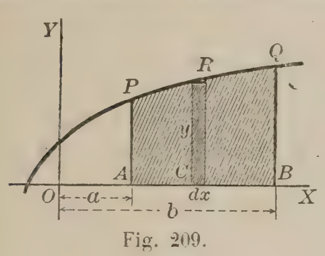


Fig. 209.

Appliquons maintenant le théorème fondamental, p. 420, au calcul de l'aire limitée par la courbe $x = \varphi(y)$, (AB dans la figure 210), l'axe des y et les lignes horizontales $y = c$ et $y = d$.

1re opération. — Construisons les n rectangles comme dans la figure 210. L'aire cherchée est visiblement la limite de la somme des aires de ces rectangles quand leur nombre croît sans limite et que la hauteur de chacun d'eux tend vers zéro.

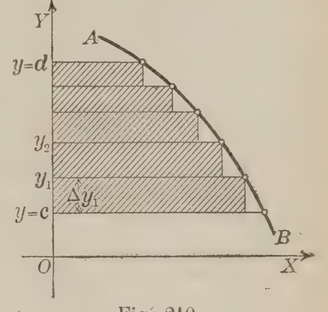


Fig. 210.

2e opération. — Désignons les hauteurs par Δy_1, Δy_2, etc. Considérons les points de l'extrémité supérieure de chaque intervalle et désignons leurs ordonnées par y_1, y_2, etc. Les bases sont alors $\varphi(y_1)$, $\varphi(y_2)$, etc., et la somme des aires des rectangles est

$$\varphi(y_1)\Delta y_1 + \varphi(y_2)\Delta y_2 + \cdots + \varphi(y_n)\Delta y_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)\Delta y_i.$$

3e opération. — L'application du théorème fondamental donne

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}} \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)\Delta y_i = \int_c^d \varphi(y)dy.$$

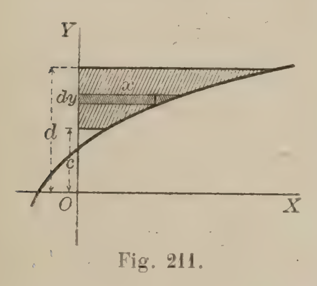


Fig. 211.

Par suite, l'aire comprise entre une courbe, l'axe des y, et les lignes horizontales $y = c$ et $y = d$, est donnée par la formule

$$\textbf{(B)} \qquad \text{aire} = \int_c^d x\,dy,$$

la valeur de x en fonction de y étant substituée d'après l'équation de la courbe. On se rappelle la formule (B) en observant qu'elle représente la limite de la somme de tous les rectangles horizontaux compris dans

la surface demandée, x et dy étant la base et la hauteur d'un quelconque de ces rectangles.

Exemple I. — Trouver l'aire comprise entre la parabole semi-cubique $y^2 = x^3$ et la ligne $x = 4$ (*fig.* 212).

Solution. Trouvons d'abord l'aire OMP qui est égale à la moitié de l'aire cherchée OPP′. Pour la branche supérieure de la courbe $y = \sqrt{x^3}$ et en additionnant toutes les petites bandes comprises entre les limites $x = 0$ et $x = 4$, nous obtenons, en substituant dans (A),

$$\text{aire OMP} = \int_0^4 y dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{64}{5} = 12\tfrac{4}{5}.$$

Par suite, aire $\text{OPP}' = 2 \cdot \frac{64}{5} = 25\tfrac{3}{5}$.

Si l'unité de longueur est le centimètre, l'aire de OPP′ est $25\frac{3}{5}$ centimètres carrés.

Note. — Pour la branche inférieure, $y = -x^{\frac{3}{2}}$; par suite

$$\text{aire OMP}' = \int_0^4 \left(-x^{\frac{3}{2}}\right) dx = -12\tfrac{4}{5}.$$

Fig. 212.

Cette aire se trouve au-dessous de l'axe des x ; elle a un signe négatif, parce que les ordonnées sont négatives.

En trouvant l'aire OMP ci-dessus, *le résultat a été positif* parce que les ordonnées sont positives, *l'aire se trouvant au-dessus de l'axe des x.*

Le résultat qui précède, $25\frac{3}{5}$, représente l'aire totale, abstraction faite du signe.

Comme nous le montrerons dans l'exemple suivant, il est important de noter le signe de l'aire quand la courbe traverse l'axe des x dans les limites d'intégration.

Exemple II. — Trouver l'aire d'un arc de la sinusoïde $y = \sin x$ (*fig.* 213).

Solution. En posant $y = 0$ et en résolvant par rapport à x, nous trouvons

$$x = 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \text{ etc.}$$

En substituant dans (A), p. 422,

$$\text{aire OAB} = \int_a^b y dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

On a également

$$\text{aire BCD} = \int_a^b y dx = \int_\pi^{2\pi} \sin x dx = -2,$$

et

$$\text{aire OABCD} = \int_a^b y dx = \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0.$$

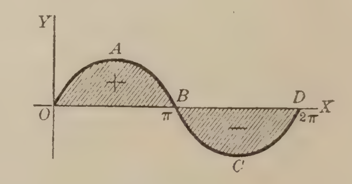


Fig. 213.

Ce dernier résultat tient compte des signes des deux aires séparées composant le tout. L'aire totale, sans tenir compte des signes, est égale à 4.

Exemple III. — Trouver l'aire comprise entre la parabole $x^2 = 4ay$ et la cubique d'Agnesi $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ (*fig.* 214).

Solution. Pour déterminer les limites d'intégration, nous résolvons les équations simultanément afin de trouver les points où les courbes se coupent. On trouve que les coordonnées de A sont $(-2a, a)$ et celles de C $(2a, a)$.

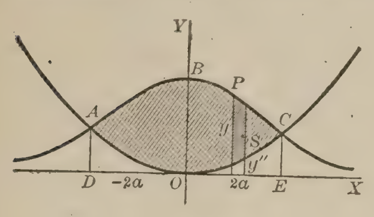


Fig. 214.

D'après la figure 214, on voit que

aire AOCB = aire DECBA — aire DECOA.

Mais,

$$\text{aire DECBA} = 2 \times \text{aire OECB} = 2\int_0^{2a} \frac{8a^3 dx}{x^2 + 4a^2} = 2\pi a^2,$$

et

$$\text{aire DECOA} = 2 \times \text{aire OEC} = 2\int_0^{2a} \frac{x^2}{4a} dx = \frac{4a^2}{3}.$$

Par suite,

$$\text{aire AOCB} = 2\pi a^2 - \frac{4a^2}{3} = 2a^2\left(\pi - \tfrac{2}{3}\right). \qquad \textit{Réponse.}$$

Une autre méthode consiste à considérer la petite portion de surface PS comme un élément de l'aire. Si y' est l'ordonnée correspondant à la cubique d'Agnesi, et y'' l'ordonnée correspondant à la parabole, l'expression différentielle de l'aire de la petite portion de surface PS est égale à $(y' - y'')dx$. En substituant les valeurs de y' et de y'' en fonction de x d'après les équations données, nous obtenons

$$\begin{aligned}\text{aire AOCB} &= 2 \times \text{aire OCB} \\ &= 2\int_0^{2a} (y' - y'')dx = 2\int_0^{2a}\left(\frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} - \frac{x^2}{4a}\right)dx \\ &= 2a^2\left(\pi - \tfrac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

Exemple IV. — Trouver l'aire de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (*fig.* 215).

Solution. Pour trouver l'aire du quadrant OAB, les limites sont $x = 0$, $x = a$: et

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Par suite, en substituant dans (A), p. 422,

$$\begin{aligned}\text{aire OAB} &= \frac{b}{a}\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[\frac{bx}{2a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{ab}{2} \text{arc sin } \frac{x}{a}\right]_0^a \\ &= \frac{\pi ab}{4}.\end{aligned}$$

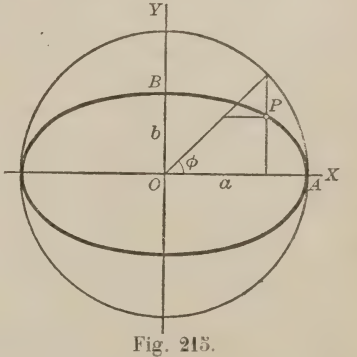


Fig. 215.

Par conséquent, l'aire entière de l'ellipse est égale à πab.

207. Calcul de l'aire quand l'équation de la courbe est donnée sous forme paramétrique. — Si l'équation de la courbe est donnée sous forme paramétrique

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

nous avons alors

$$y = \varphi(t) \qquad \text{et} \qquad dx = f'(t)dt.$$

La substitution (*) dans (A), p. 422, donne

$$\textbf{(A)} \qquad \textbf{aire} = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f'(t)dt,$$

expression dans laquelle

$$t = t_1 \text{ quand } x = a \qquad \text{et} \qquad t = t_2 \text{ quand } x = b.$$

Nous pouvons employer cette formule (**A**) pour trouver l'aire limitée par une courbe qui est donnée sous forme paramétrique, ou bien, nous pouvons trouver y et dx d'après les équations paramétriques de la courbe en fonction de t et de dt, et ensuite substituer les résultats directement dans (**A**), p. 422.

Ainsi, pour trouver l'aire de l'ellipse dans l'exemple IV, p. 425, il aurait été plus simple d'utiliser les équations paramétriques de l'ellipse

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi,$$

dans lesquelles l'angle excentrique φ est le paramètre (§ 66, p. 88).

Ici, $\qquad y = b \sin \varphi \qquad$ et $\qquad dx = -a \sin \varphi d\varphi.$

Quand $\qquad x = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$

et quand $\qquad x = a, \quad \varphi = 0.$

En substituant dans (A), ci-dessus, nous obtenons

$$\text{aire OAB} = \int_0^a y dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi ab}{4}.$$

Par suite, l'aire entière est égale à πab. *Réponse.*

EXEMPLES

1. Trouver l'aire limitée par la ligne $y = 5x$, l'axe des x et l'ordonnée $x = 2$. *Rép.* 10.

2. Trouver l'aire limitée par la parabole $y^2 = 4x$, l'axe des y et les lignes $y = 4$ et $y = 6$. *Rép.* $12\frac{2}{3}$.

3. Trouver l'aire du cercle $x^2 + y^2 = r^2$. *Rép.* πr^2.

4. Trouver l'aire limitée par $y^2 = 9x$ et $y = 3x$. *Rép.* $\frac{1}{2}$.

5. Trouver l'aire limitée par les axes de coordonnées et la courbe $y = e^x$. *Rép.* 1.

6. Trouver l'aire limitée par la courbe $y = \log x$, l'axe des y et les lignes $y = 0$ et $y = 2$. *Rép.* $e^2 - 1$.

(*) Pour une démonstration rigoureuse de cette substitution, le lecteur consultera des traités d'analyse plus avancés.

7. Trouver l'aire entière limitée par la courbe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Rép.* $\frac{3}{8}\pi a^2$.

8. Trouver l'aire comprise entre la chaînette $y = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right]$, l'axe des y, l'axe des x et la ligne $x = a$. *Rép.* $\frac{a^2}{2e}(e^2 - 1)$.

9. Trouver l'aire comprise entre la courbe $y = \log x$, l'axe des x et les ordonnées $x = 1$ et $x = a$. *Rép.* $a(\log a - 1) + 1$.

10. Trouver l'aire limitée par la courbe $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$. *Rép.* $\frac{3\pi ab}{4}$.

11. Trouver l'aire entière limitée par la courbe $a^2y^2 = x^3(2a - x)$. *Rép.* πa^2.

12. Trouver l'aire limitée par les courbes

$$x(y - e^x) = \sin x \quad \text{et} \quad 2xy = 2 \sin x + x^3,$$

l'axe des y et l'ordonnée $x = 1$.

Rép. $\int_0^1 (e^x - \frac{1}{2}x^2)dx = e - \frac{7}{6} = 1{,}55 + \cdots$

13. Trouver l'aire comprise entre la cubique d'Agnesi $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ et l'axe des x, son asymptote. *Rép.* $4\pi a^2$.

14. Trouver l'aire comprise entre la cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ et son asymptote, la ligne $x = 2a$. *Rép.* $3\pi a^2$.

15. Trouver l'aire limitée par $y = x^3$, $y = 8$ et l'axe des y. *Rép.* 12.

16. Trouver l'aire comprise entre les deux paraboles $y^2 = 2px$ et $x^2 = 2py$. *Rép.* $\frac{4p^2}{3}$.

17. Trouver l'aire comprise entre la parabole $y^2 = 2x$ et le cercle $y^2 = 4x - x^2$, extérieurement à la parabole. *Rép.* 0,475.

18. Trouver l'aire limitée par $y = x^2$, $y = x$, $y = 2x$. *Rép.* $\frac{7}{6}$.

19. Trouver une expression de l'aire limitée par l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = a^2$, l'axe des x et une ligne menée de l'origine à un point quelconque (x, y). *Rép.* $\frac{a^2}{2} \log \frac{x + y}{a}$.

20. Trouver par intégration l'aire du triangle limité par l'axe des y et les lignes $2x + y + 8 = 0$ et $y = -4$. *Rép.* 4.

21. Trouver l'aire du cercle

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

θ étant le paramètre. *Rép.* πr^2.

22. Trouver l'aire de l'ellipse

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi,$$

l'angle excentrique φ étant le paramètre. *Rép.* πab.

23. Trouver l'aire de la cardioïde

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t),$$
$$y = a(2 \sin t - \sin 2t).$$

Rép. $\frac{3}{2}\pi a^2$.

24. Trouver l'aire d'un arc de la cycloïde

$$x = a(\theta - \sin\theta),$$
$$y = a(1 - \cos\theta),$$

θ étant le paramètre.

NOTE. — Puisque x varie de 0 à $2\pi a$, θ varie de 0 à 2π.

Rép. $3\pi a^2$; c'est-à-dire trois fois l'aire du cercle générateur.

25. Le lieu de A dans la figure 30, p. 92, est appelé la « compagne de la cycloïde ». Ses équations sont

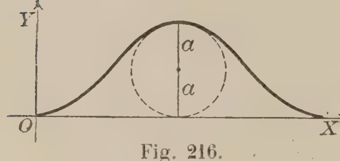


Fig. 216.

$$x = a\theta,$$
$$y = a(1 - \cos\theta).$$

Trouver l'aire d'un arc. *Rép.* $2\pi a^2$.

26. Trouver l'aire de l'hypocycloïde

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta,$$

θ étant le paramètre. *Rép.* $\frac{3\pi a^2}{8}$, c'est-à-dire les trois huitièmes de l'aire du cercle circonscrit.

27. Trouver l'aire de la boucle du folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$ (*fig.* 217).

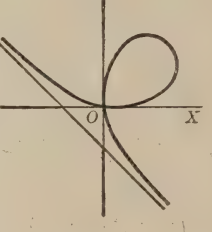


Fig. 217.

NOTE. — Posons $y = tx$; alors $x = \frac{3at}{1+t^3}$,

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad \text{et} \quad dx = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\,3a\,dt.$$

Les limites de t sont 0 et ∞.

28. Trouver par intégration les aires limitées par les lieux géométriques ci-après :

(*a*) $(y - x)^2 = x^3$, $y = 0$. *Rép.* $\frac{1}{10}$.
(*b*) $(x - y^2)^2 = y^5$, $x = 0$. $\frac{1}{21}$.
(*c*) $a^2y = x(x^2 - a^2)$, $y = 0$. $\frac{1}{2}a^2$.
(*d*) $x(1 + y^2) = 1$, $x = 0$. π.
(*e*) $y = x(1 - x^2)$, $y = 0$. $\frac{1}{2}$.
(*f*) $x = y^2(y - 1)$, $x = 0$. $\frac{1}{12}$.
(*g*) $y^2 = x^4(2x + 1)$. Aire de la boucle : $\frac{4}{105}$.
(*h*) $y^2 = x^2(2x + 1)$. Aire de la boucle : $\frac{2}{15}$.
(*i*) $y = x + 4$, $y = 2x + 4$, $y = 0$.
(*j*) $y = x^2 + 5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$.
(*k*) $y = 2x^3$, $x = 0$, $y = 2$, $y = 4$.
(*l*) $x^2 = y + 9$, $y = 0$.
(*m*) $y^2 - 4 + x = 0$, $x = 0$.
(*n*) $xy = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$.
(*o*) $xy = 4$, $y = 1$, $y = 5$.
(*p*) $x = 10^y$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 2$.

208. Aires des courbes planes. Coordonnées polaires. — Supposons qu'on demande de chercher l'aire limitée par une courbe et deux de ses rayons vecteurs. Nous emploierons à cet effet les coordonnées polaires. Supposons que l'équation de la courbe soit

$$\rho = f(\theta),$$

et soient OP et OD les deux rayons (*fig.* 218). Désignons par α et β

les angles que les rayons font avec l'axe polaire et appliquons le théorème fondamental, p. 420.

1re opération. L'aire demandée est évidemment la limite de la somme des secteurs circulaires construits comme dans la figure 218.

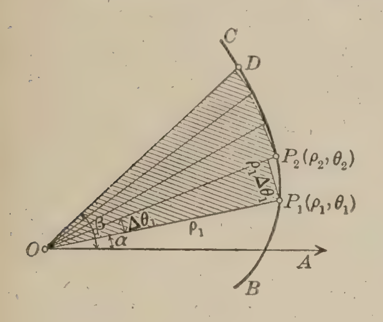


Fig. 218.

2e opération. Supposons que les angles des secteurs successifs soient $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, etc., et leurs rayons ρ_1, ρ_2, etc. La somme des aires des secteurs (*) est alors

$$\frac{1}{2}\rho_1^2\Delta\theta_1 + \frac{1}{2}\rho_2^2\Delta\theta_2 + \cdots + \frac{1}{2}\rho_n^2\Delta\theta_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_i.$$

3e opération. En appliquant le théorème fondamental,

$$\lim_{n=\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_i = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2 d\theta.$$

Par suite, la surface balayée par le rayon vecteur de la courbe en se déplaçant de la position OP_1 à la position OD est donnée par la formule

$$\textbf{(A)} \qquad \text{aire} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta,$$

la valeur de ρ en fonction de θ étant substituée d'après l'équation de la courbe.

Exemple. — Trouver l'aire entière de la lemniscate $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ (*fig.* 219).

Solution. Puisque la figure est symétrique par rapport à OX et à OY, l'aire totale $= 4$ fois l'aire de OAB.

Comme $\rho = 0$ quand $\theta = \frac{\pi}{4}$, nous voyons que si θ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, le rayon vecteur OP balaie l'aire OAB. Par suite, en substituant dans (A),

Fig. 219.

$$\text{aire entière} = 4 \times \text{aire OAB} = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = a^2;$$

(*) L'aire d'un secteur circulaire $= \frac{1}{2}$ rayon $\times$ arc. Par suite, l'aire du premier secteur $= \frac{1}{2}\rho_1 \cdot \rho_1\Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\rho_1^2\Delta\theta_1$, etc.

c'est-à-dire que l'aire des deux boucles est égale à l'aire d'un carré construit sur OA comme côté.

EXEMPLES

1. Trouver l'aire balayée dans une révolution par le rayon vecteur de la spirale d'Archimède $\rho = a\theta$, en partant de $\theta = 0$. Quelle est l'aire additionnelle balayée dans la seconde révolution ? *Rép.* $\frac{4\pi^3 a^2}{3}$; $8\pi^3 a^2$.

2. Trouver l'aire d'une boucle de la courbe $\rho = a \cos 2\theta$. *Rép.* $\frac{\pi a^2}{8}$.

3. Montrer que l'aire entière de la courbe $\rho = a \sin 2\theta$ est égale à la moitié de l'aire du cercle circonscrit.

4. Trouver l'aire entière de la cardioïde $\rho = a(1 - \cos\theta)$.

Rép. $\frac{3\pi a^2}{2}$, c'est-à-dire six fois l'aire du cercle générateur.

5. Trouver l'aire du cercle $\rho = a \cos\theta$. *Rép.* $\frac{\pi a^2}{4}$.

6. Démontrer que l'aire des trois boucles de $\rho = a \sin 3\theta$ est égale au quart de l'aire du cercle circonscrit.

7. Démontrer que l'aire engendrée par le rayon vecteur de la spirale $\rho = e^\theta$ est égale au quart de l'aire du carré construit sur le rayon vecteur.

8. Trouver l'aire de la partie de la parabole $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ qui est interceptée entre la courbe et la perpendiculaire à l'axe à une distance du sommet égale au paramètre. *Rép.* $\frac{8a^2}{3}$.

9. Montrer que l'aire limitée par deux rayons vecteurs quelconques de la spirale hyperbolique $\rho\theta = a$ est proportionnelle à la différence entre les longueurs de ces rayons.

10. Trouver l'aire de l'ellipse $\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}$. *Rép.* πab.

11. Trouver l'aire entière de la courbe $\rho = a(\sin 2\theta + \cos 2\theta)$. *Rép.* πa^2.

12. Trouver l'aire d'une boucle de la courbe $\rho^2 \cos\theta = a^2 \sin 3\theta$.

Rép. $\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \log 2$.

13. Trouver l'aire au-dessous de OX limitée par la courbe $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$.

Rép. $(10\pi + 27\sqrt{3})\frac{a^2}{64}$.

14. Trouver l'aire limitée par $\rho^2 = a^2 \sin 4\theta$. *Rép.* a^2.

15. Trouver l'aire limitée par les courbes ci-après et les rayons vecteurs donnés :

(*a*) $\rho = \operatorname{tg}\theta$, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. (*b*) $\rho = e^{\frac{\theta}{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(c) $\rho = a^2 \sec^2 \frac{\theta}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$. (e) $\rho = \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}$, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

(d) $\rho = \sec \theta + \operatorname{tg} \theta$, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. (f) $\rho = a \sin \theta + b \cos \theta$, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

16. Trouver l'aire limitée par chacune des courbes suivantes :

(a) $\rho^2 = 4 \sin 2\theta$. (d) $\rho = 1 + 2 \cos \theta$. (g) $\rho^2 = a^2(1 - \cos \theta)$.
(b) $\rho = a \cos 3\theta$. (e) $\rho = 3 + \cos \theta$. (h) $\rho = a(1 + \sin \theta)$.
(c) $\rho = 8 \sin 4\theta$. (f) $\rho = 2 - \sin \theta$. (i) $\rho = a \cos 5\theta$.

209. Longueur d'une courbe. — Par *longueur d'une ligne droite*, nous entendons communément le nombre de fois que nous pouvons superposer sur elle une autre ligne droite prise comme unité de longueur, de même que le charpentier mesure la longueur d'une planche en appliquant son mètre bout à bout un certain nombre de fois.

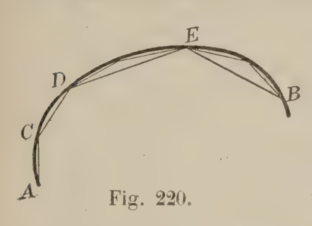


Fig. 220.

Comme il est impossible de faire coïncider une ligne droite avec un arc de courbe, nous ne pouvons mesurer les courbes de la même façon que nous mesurons les lignes droites.

Nous procédons alors comme il suit :

On divise la courbe (telle que AB) de n'importe quelle façon, en un nombre quelconque de parties (comme en C, D, E) et l'on joint les points de division adjacents, ce qui forme des cordes (telles que AC, CD, DE, EB).

La longueur de la courbe est définie comme étant la limite de la somme des cordes quand le nombre des points de division croît indéfiniment, de telle façon que chaque corde tende séparément vers zéro en même temps.

Puisque cette limite est également la mesure d'une certaine ligne droite, l'opération qui consiste à chercher la longueur d'une courbe est également appelée « rectification de la courbe ».

Le lecteur a déjà employé cette définition en Géométrie pour la longueur d'une courbe. Ainsi, la circonférence d'un cercle est définie comme étant la limite du périmètre d'un polygone régulier inscrit (ou circonscrit) quand le nombre des côtés croît indéfiniment.

La méthode employée au paragraphe suivant pour trouver la longueur d'une courbe plane est basée sur la définition qui précède et le lecteur devra noter soigneusement comment elle est appliquée.

210. Longueurs des courbes planes. Coordonnées rectangulaires. — Nous allons maintenant exprimer, sous forme analytique, la définition du paragraphe précédent, en faisant usage du théorème fondamental.

La courbe $y = f(x)$ étant donnée et sur elle les points $P'(a, c)$, $Q(b, d)$, pour trouver la longueur de l'arc $P'Q$, on opère comme il suit :

1re opération. — On prend un nombre quelconque n de points sur la courbe entre P' et Q et l'on trace les cordes joignant les points adjacents, comme dans la figure 221. La longueur cherchée de l'arc $P'Q$ est évidemment la limite de la somme des longueurs de ces cordes.

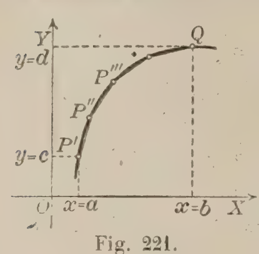


Fig. 221.

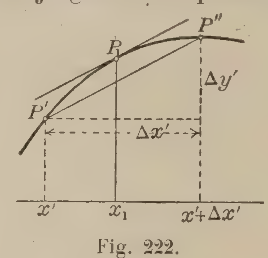


Fig. 222.

2e opération. — On considère une quelconque de ces cordes, $P'P''$ par exemple (*fig.* 222).

Soient $P'(x', y')$ et $P''(x' + \Delta x', y' + \Delta y')$

les coordonnées de P' et de P''.

Alors, comme au § 90, p. 151,

$$P'P'' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2},$$

ou

$$P'P'' = \left[1 + \left(\frac{\Delta y'}{\Delta x'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x'.$$

[En divisant sous le radical par $(\Delta x')^2$ et en multipliant à l'extérieur par $\Delta x'$.]

Mais d'après le théorème de la moyenne, (44), p. 188 (si on désigne $\Delta y'$ par $f(b) - f(a)$ et $\Delta x'$ par $b - a$), nous obtenons

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x'} = f'(x_1), \qquad x' < x_1 < x' + \Delta x',$$

x_1 étant l'abscisse d'un point P_1 de la courbe, *entre* P' et P'', où la tangente est parallèle à la corde.

En substituant,

$$P'P'' = [1 + f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x' = \text{longueur de la première corde.}$$

De même,

$$P''P''' = \left[1 + f'(x_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x'' = \text{longueur de la deuxième corde.}$$

. . . .

$$P^{(n)}Q = \left[1 + f'(x_n)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x^{(n)} = \text{longueur de la } n^e \text{ corde.}$$

La longueur de la ligne brisée inscrite joignant P′ et Q (somme des cordes) est alors la somme de ces expressions, savoir :

$$\left[1 + f'(x_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x' + \left[1 + f'(x_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x'' + \cdots + \left[1 + f'(x_n)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \left[1 + f'(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x^{(i)}.$$

3e *opération*. — En appliquant le théorème fondamental,

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}} \sum_{i=1}^{n} \left[1 + f'(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x^{(i)} = \int_a^b \left[1 + f'(x)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Par suite, en désignant la longueur de l'arc P′Q par s, nous avons la *formule de la longueur de l'arc*

$$s = \int_a^b \left[1 + f'(x)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx,$$

ou

$$\textbf{(A)} \qquad s = \int_a^b \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx,$$

expression dans laquelle $\frac{dy}{dx}$ doit être trouvé en fonction de x d'après l'équation de la courbe donnée.

Quelquefois, il est plus commode d'utiliser y comme variable indépendante. Pour établir une formule qui convienne à ce cas, nous savons d'après (**35**), p. 168, que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}; \quad \text{par suite} \quad dx = \frac{dx}{dy} dy.$$

En substituant cette valeur de dx dans (**A**) et en notant que les

limites correspondantes de y sont c et d, nous obtenons (*) la *formule de la longueur de l'arc*

$$\text{(B)} \qquad s = \int_c^d \left[\left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} dy,$$

expression dans laquelle $\frac{dx}{dy}$ en fonction de y doit être trouvée d'après l'équation de la courbe donnée.

Exemple. — Trouver la longueur du cercle $x^2 + y^2 = r^2$ (*fig.* 223).

Solution. En différentiant, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

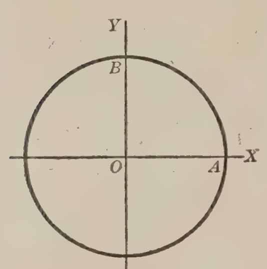


Fig. 223.

En substituant dans (A), il vient

$$\text{arc BA} = \int_0^r \left[1 + \frac{x^2}{y^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_0^r \left[\frac{x^2 + y^2}{y^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^r \left[\frac{r^2}{r^2 - x^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

[En substituant $y^2 = r^2 - x^2$, d'après l'équation du cercle, afin d'obtenir tout en fonction de x.]

$$\text{arc AB} = r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \left[r \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = \frac{\pi r}{2}.$$

Par suite, la longueur totale du cercle est égale à $2\pi r$. *Réponse.*

EXEMPLES

1. Trouver la longueur de l'arc de parabole semi-cubique $ay^2 = x^3$ depuis l'origine jusqu'à l'ordonnée $x = 5a$. *Rép.* $\frac{335a}{27}$.

2. Trouver la longueur totale de l'hypocycloïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Rép.* $6a$.

3. Rectifier la chaînette $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ depuis $x = 0$ jusqu'au point (x, y).
Rép. $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

4. Trouver la longueur d'un arc complet de la cycloïde

$$x = r \operatorname{arc\,sin\,vers} \frac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}. \qquad \textit{Rép. } 8r.$$

Note. — Utiliser (B). Ici $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}}$.

(*) $s = \int_c^d \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{dy} dy = \int_c^d \left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dy = \int_c^d \left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} dy.$

5. Trouver la longueur de l'arc de la parabole $y^2 = 2px$ depuis le sommet jusqu'au point de la parabole qui a pour abscisse le paramètre.

Rép. $\frac{p\sqrt{2}}{2} + \frac{p}{2}\log(1+\sqrt{2})$.

6. Rectifier la courbe $9ay^2 = x(x-3a)^2$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=3a$.

Rép. $2a\sqrt{3}$.

7. Trouver la longueur d'un quadrant de la courbe $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

Rép. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

8. Trouver la longueur de la courbe $e^y = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ entre $x=a$ et $x=b$.

Rép. $\log\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1} + a - b$.

9. Les équations de la développante d'un cercle sont

$$\begin{cases} x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta), \\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta). \end{cases}$$

Trouver la longueur de l'arc depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \theta_1$. *Rép.* $\frac{1}{2}a\theta_1^2$.

10. Trouver la longueur de l'arc de la courbe $\begin{cases} x = e^\theta\sin\theta, \\ y = e^\theta\cos\theta \end{cases}$ depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Rép. $\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$.

11. Trouver les longueurs des arcs des courbes ci-après :

(*a*) $y = \log\frac{e^x-1}{e^x+1}$; $x=1$, $x=2$.

(*b*) $y = \log(1-x^2)$; $x=0$, $x=\frac{1}{2}$.

(*c*) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\log x$; $x=1$, $x=2$.

(*d*) $y = \log x$; $x=1$, $x=4$.

(*e*) $y = \log\sec x$; $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$.

(*f*) $y = \log\operatorname{cosec} x$; $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

211. Longueurs des courbes planes. Coordonnées polaires. — Les formules (**A**) et (**B**) du paragraphe précédent pour trouver les longueurs des courbes dont les équations sont données en coordonnées rectangulaires comprennent les expressions différentielles

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx \quad \text{et} \quad \left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1\right]^{\frac{1}{2}}dy.$$

Dans chaque cas, si nous introduisons sous le radical la différentielle de la variable indépendante, elles se réduisent à la forme

$$[dx^2+dy^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Transformons maintenant cette expression en coordonnées polaires au moyen des substitutions

$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \sin \theta.$$

Alors
$$dx = -\rho \sin \theta d\theta + \cos \theta d\rho,$$
$$dy = \rho \cos \theta d\theta + \sin \theta d\rho,$$

et nous avons

$$\left[dx^2 + dy^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[(-\rho \sin \theta d\theta + \cos \theta d\rho)^2 + (\rho \cos \theta d\theta + \sin \theta d\rho)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left[\rho^2 d\theta^2 + d\rho^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'équation de la courbe est

$$\rho = f(\theta),$$

alors
$$d\rho = f'(\theta) d\theta = \frac{d\rho}{d\theta} d\theta.$$

En substituant dans l'équation différentielle ci-dessus, nous obtenons

$$\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Si α et β sont les limites de la variable indépendante θ correspondant aux limites dans (**A**) et (**B**), p. 433 et 434, nous obtenons la *formule de la longueur de l'arc*

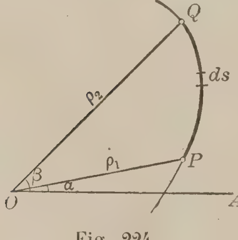


Fig. 224.

$$(\mathbf{A}) \qquad s = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

expression dans laquelle ρ et $\frac{d\rho}{d\theta}$ en fonction de θ doivent être substitués d'après l'équation de la courbe donnée.

Quand il est plus commode de prendre ρ comme variable indépendante et que l'équation est de la forme

$$\theta = \varphi(\rho),$$

alors
$$d\theta = \varphi'(\rho) d\rho = \frac{d\theta}{d\rho} d\rho.$$

En substituant dans $\left[\rho^2 d\theta^2 + d\rho^2\right]^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\left[\rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} d\rho.$$

Par suite, si ρ_1 et ρ_2 sont les limites correspondantes de la variable indépendante ρ, nous obtenons pour *formule de la longueur de l'arc,*

$$\text{(B)} \qquad s = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} d\rho,$$

expression dans laquelle $\frac{d\theta}{d\rho}$ en fonction de ρ doit être substitué d'après l'équation de la courbe donnée.

Exemple. — Trouver la longueur de la cardioïde $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

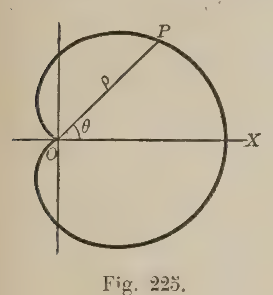


Fig. 225.

Solution. Ici $\frac{d\rho}{d\theta} = - a \sin\theta$.

Si nous faisons varier θ de 0 à π, le point P (*fig.* 225) engendrera la moitié de la courbe. En substituant dans (A), p. 436, il vient

$$\frac{s}{2} = \int_0^{\pi} [a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta]^{\frac{1}{2}} d\theta$$

$$= a \int_0^{\pi} [(2 + 2\cos\theta)]^{\frac{1}{2}} d\theta = 2a \int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta = 4a.$$

$s = 8a.$ *Réponse.*

EXEMPLES

1. Trouver la longueur de la spirale d'Archimède $\rho = a\theta$, depuis l'origine jusqu'à la fin de la première révolution.

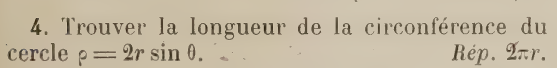
Rép. $\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \log\left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\right)$.

2. Rectifier la spirale $\rho = e^{a\theta}$ depuis l'origine jusqu'au point (ρ, θ).

Rép. $\frac{\rho}{a}\sqrt{a^2 + 1}$.

Note. — Utiliser (B).

3. Trouver la longueur de la courbe $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$. *Rép.* $\left(\sqrt{2} + \log \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}\right) a$.



4. Trouver la longueur de la circonférence du cercle $\rho = 2r \sin\theta$. *Rép.* $2\pi r$.

5. Trouver la longueur de la spirale hyperbolique $\rho\theta = a$ depuis (ρ_1, θ_1) jusqu'à (ρ_2, θ_2).

Rép. $\sqrt{a^2 + \rho_1^2} - \sqrt{a^2 + \rho_2^2} + a \log \frac{\rho_1\left(a + \sqrt{a^2 + \rho_2^2}\right)}{\rho_2\left(a + \sqrt{a^2 + \rho_1^2}\right)}$.

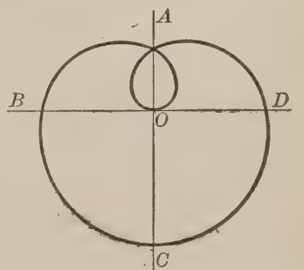


Fig. 226.

6. Montrer que la longueur totale de la courbe $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ est $\frac{3\pi a}{2}$. Montrer que OA, AB, BC sont en progression arithmétique (*fig.* 226).

7. Trouver la longueur de l'arc de la cissoïde $\rho = 2a \operatorname{tg}\theta \sin\theta$ depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{4}$.

212. Volumes des solides de révolution. — Désignons par V le volume du solide engendré par la révolution de la surface plane ABCD autour de l'axe des x, l'équation de la courbe plane DC étant

$$y = f(x).$$

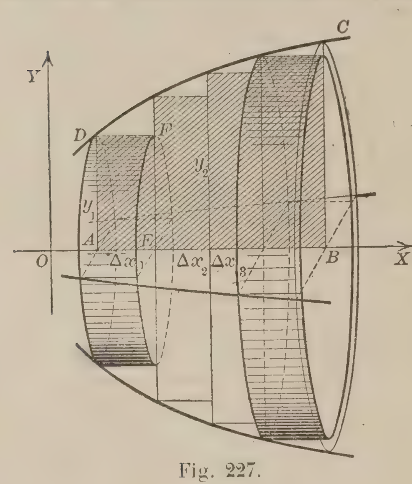


Fig. 227.

1re opération. — Construisons des rectangles à l'intérieur de l'aire plane ABCD, comme dans la figure 227. Quand cette aire tourne autour de l'axe des x, chaque rectangle engendre un cylindre de révolution. Le volume cherché est évidemment égal à la *limite* de la somme des volumes de ces cylindres.

2e opération. — Désignons les bases des rectangles par Δx_1, Δx_2, etc., et les hauteurs correspondantes par y_1, y_2, etc. Alors le volume du cylindre engendré par le rectangle AEFD est $\pi y_1^2 \Delta x_1$, et la somme des volumes de tous ces cylindres est

$$\pi y_1^2 \Delta x_1 + \pi y_2^2 \Delta x_2 + \cdots + \pi y_n^2 \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i.$$

3e opération. — En appliquant le théorème fondamental (les limites étant $\mathrm{OA} = a$ et $\mathrm{OB} = b$), il vient

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi y^2 dx.$$

Par suite, le volume engendré par la révolution autour de l'axe des x de l'aire limitée par la courbe, l'axe des x et les ordonnées $x = a$ et $x = b$ est donné par la formule

$$\text{(A)} \qquad \mathbf{V}_x = \pi \int_a^b y^2 dx,$$

expression dans laquelle la valeur de y en fonction de x doit être substituée d'après l'équation de la courbe donnée. Cette formule est facilement retenue si nous considérons une tranche ou disque du solide compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe de révolution comme un élément du volume et que nous le considérions comme un cylindre de hauteur infinitésimale dx avec une base d'aire πy^2 et par suite, de volume $\pi y^2 dx$.

De même, quand OY est l'axe de révolution, nous utilisons la formule

$$\text{(B)} \qquad V_y = \pi \int_c^d x^2 dy,$$

expression dans laquelle la valeur de x en fonction de y doit être substituée d'après l'équation de la courbe donnée.

Exemple. — Trouver le volume engendré par la révolution de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

autour de l'axe des x (*fig.* 228).

Solution. Puisque $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ et que le volume demandé est égal à deux fois le volume engendré par OAB, nous obtenons, en substituant dans (A),

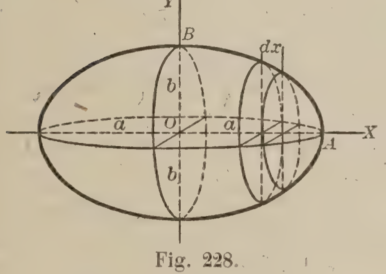


Fig. 228.

$$\frac{V_x}{2} = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx$$

$$= \frac{2\pi ab^2}{3},$$

$$V_x = \frac{4\pi ab^2}{3}.$$

Pour vérifier ce résultat, posons $b = a$. Alors $V_x = \frac{4\pi a^3}{3}$, expression du volume de la sphère, qui n'est qu'un cas particulier de l'ellipsoïde. Quand l'ellipse tourne autour de son grand axe, le solide engendré est appelé un sphéroïde allongé et quand elle tourne autour de son petit axe, un sphéroïde aplati.

EXEMPLES

1. Trouver le volume de la sphère engendrée par la révolution du cercle $x^2 + y^2 = r^2$ autour d'un diamètre. *Rép.* $\frac{4}{3}\pi r^3$.

2. Trouver par intégration le volume du cône droit engendré par la révolution autour de OX du triangle dont les sommets sont $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b). Trouver également le volume engendré par la révolution de ce triangle autour de OY. Vérifier les résultats géométriquement.

3. Trouver le volume du tore (anneau) engendré par la révolution du cercle $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ autour de OX. *Rép.* $2\pi^2 a^2 b$.

4. Trouver par intégration le volume du cylindre droit engendré par la révolution de l'aire limitée par $x = 0$, $y = 0$, $x = 6$, $y = 4$, (a) autour de OX ; (b) autour de OY. Vérifier les résultats géométriquement.

5. Trouver par intégration le volume du tronc de cône engendré par la révolution de l'aire limitée par $y = 6 - x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$ autour de OX. Vérifier géométriquement.

6. Trouver le volume du paraboloïde de révolution engendré par la révolution autour de son axe de l'arc de la parabole $y^2 = 4ax$ compris entre l'origine et le point (x_1, y_1).

Rép. $2\pi a x_1^2 = \frac{\pi y_1^2 x_1}{2}$, c'est-à-dire la moitié du volume du cylindre circonscrit.

7. Trouver le volume engendré par la révolution de l'arc de l'ex. 6 autour de l'axe des y.

Rép. $\frac{\pi y_1^5}{80a^2} = \frac{1}{5}\pi x_1^2 y_1$, c'est-à-dire le cinquième du cylindre de hauteur y_1 et de rayon de base x_1.

8. Trouver par intégration le volume du cône engendré par la révolution autour de OX de la partie de la ligne $4x - 5y + 3 = 0$ qui est interceptée entre les axes de coordonnées. *Rép.* $\frac{9\pi}{100}$.

9. Trouver le volume engendré par la révolution autour de OX de la courbe

$$(x - 4a)y^2 = ax(x - 3a)$$

entre les limites $x = 0$ et $x = 3a$. *Rép.* $\frac{\pi a^3}{2}(15 - 16 \log 2)$.

10. Trouver le volume engendré par la révolution autour de OX des aires limitées par les lieux géométriques ci-après :

(a) L'hypocycloïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Rép.* $\frac{32\pi a^3}{105}$.

(b) La parabole $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, $x = 0$, $y = 0$. $\frac{\pi a^3}{15}$.

(c) Un arc de $y = \sin x$. $\frac{\pi^2}{2}$.

(d) La parabole $y^2 = 4x$, $x = 4$. 32π.

(e) $y = xe^x$, $x = 1$, $y = 0$. $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

(f) $y^2 = 9x$, $y = 3x$. $\frac{3\pi}{2}$.

(g) La cubique d'Agnesi $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, $y = 0$. $4\pi^2 a^3$.

(h) $y^2(4 + x^2) = 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \infty$.

(i) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$.

(j) $y^2(6 - x) = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

(k) $4y^2 = x^3$, $x = 4$.

(l) $y(1 + x^2) = x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 8$.

(m) $y(x - 2)^2 = 1$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 4$.

(n) $y^2 = (x + 2)^3$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$.

(o) $(x - 1)y = 2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 5$.

11. Trouver le volume engendré par la révolution des aires limitées par les lieux géométriques ci-après :

		Autour de OX	*Autour de* OY
(*a*)	$y = e^x,\ x = 0,\ y = 0.$	*Rép.* $\frac{\pi}{2}$.	2π.
(*b*)	$y = x^3,\ x = 2,\ y = 0.$	$\frac{128\pi}{7}$.	$\frac{64\pi}{5}$.
(*c*)	$ay^2 = x^3,\ y = 0,\ x = a.$	$\frac{1}{4}\pi a^3$.	$\frac{4}{7}\pi a^3$.
(*d*)	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$	48π.	64π.
(*e*)	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$	$\frac{32}{35}\pi ab^2$.	$\frac{4}{5}\pi a^2 b$.

(*f*) $y^2 = 9x,\ y = 0,\ x = 9.$

(*g*) $y^2 = 4 - x,\ x = 0.$

(*h*) $y^2 = x + 9,\ x = 0.$

(*i*) $x^2 = 1 + y,\ y = 0.$

(*j*) $x^2 = 16 - y,\ y = 0.$

(*k*) $x^2 + 9y^2 = 36.$

(*l*) $y = 2x,\ y = 0,\ x = 3.$

(*m*) $y = x + 2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3.$

12. Trouver le volume engendré par la révolution d'un arc de la cycloïde

$$x = r \text{ arc sin vers } \frac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$$

autour de OX, sa base.

Note. — Substituer $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ry - y^2}}$ et les limites $y = 0$ et $y = 2r$, dans (A), p. 438. *Rép.* $5\pi^2 r^3$.

13. Trouver le volume engendré par la révolution de la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

autour de l'axe des x depuis $x = 0$ jusqu'à $x = b$.

Rép. $\frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2}$.

14. Trouver le volume du solide engendré par la révolution de la cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ autour de son asymptote $x = 2a$. *Rép.* $2\pi^2 a^3$.

15. Étant donnée la pente de la tangente à la tractrice $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$, trouver le solide engendré par sa révolution autour de OX. *Rép.* $\frac{2}{3}\pi a^3$.

16. Montrer que le volume d'un chapeau conique de hauteur a découpé du solide engendré par l'hyperbole rectangulaire $x^2 - y^2 = a^2$, autour de OX, est égale au volume d'une sphère de rayon a.

17. En utilisant les équations paramétriques de l'hypocycloïde $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$, trouver le volume du solide engendré par sa révolution autour de OX.

Rép. $\frac{32\pi a^3}{105}$.

18. Trouver le volume engendré par la révolution d'un arc de la cycloïde

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta)$$

autour de sa base OX. *Rép.* $5\pi^2 a^3$.

Montrer que si la révolution s'effectue autour de OY, le volume engendré est $6\pi^3 a^3$.

19. Montrer que le volume de l'*œuf* engendré par la révolution de la courbe

$$x^2y^2 + (x-a)(x-b) = 0, \quad (a < b)$$

autour de OX est $\pi \left\{ (a+b) \log \frac{b}{a} - 2(b-a) \right\}$.

20. Trouver le volume engendré par la révolution de la courbe

$$x^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0$$

autour de OX. *Rép.* $\frac{4\pi a^3}{15}$.

213. Aires des surfaces de révolution. — Une surface de révolution est engendrée par la révolution de l'arc CD de la courbe

$$y = f(x)$$

autour de l'axe des x (*fig.* 229).

On demande de mesurer cette surface en utilisant le théorème fondamental.

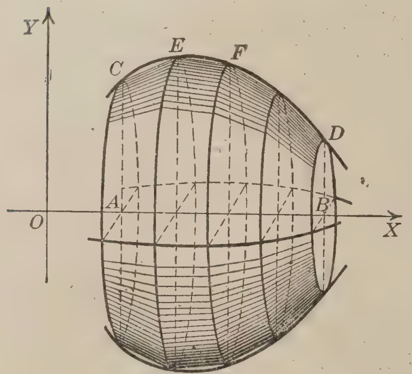


Fig. 229.

1re opération. Comme précédemment, divisons l'intervalle AB en sous-intervalles Δx_1, Δx_2, etc., et élevons des ordonnées aux points de division. Traçons les cordes CE, EF, etc., de la courbe. Quand la courbe tourne autour de l'axe des x, chaque corde engendre la surface latérale d'un tronc de cône de révolution. La surface de révolution demandée est définie comme étant la limite de la somme des surfaces latérales de ces troncs de cône.

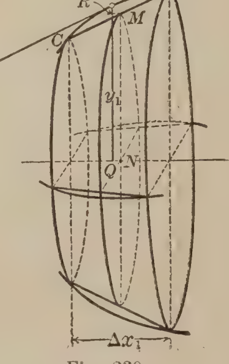


Fig. 230.

2e opération. Pour éclairer ce qui précède, traçons le premier tronc de cône à une plus grande échelle (*fig.* 230). Soit M le milieu de la corde CE. Alors

(A) aire latérale $= 2\pi \text{NM} \cdot \text{CE}$. (*)

Pour appliquer le théorème fondamental, il est nécessaire d'exprimer

(*) L'aire latérale d'un tronc de cône de révolution est égale à la circonférence de la section moyenne multipliée par l'apothème.

ce produit comme une fonction de l'abscisse d'un certain point de l'intervalle Δx_1. Comme au § 210, p. 432, nous obtenons, en utilisant le théorème de la moyenne, la longueur de la corde

$$\text{(B)} \qquad \text{CE} = \left[1 + f'(x_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_1,$$

expression dans laquelle x_1 est l'abscisse du point $P_1(x_1, y_1)$ de l'arc CE, où la tangente est parallèle à la corde CE. Soit la ligne horizontale passant par M qui coupe QP_1 en R et désignons RP_1 par ε_1 (*). Alors

$$\text{(C)} \qquad \text{NM} = y_1 - \varepsilon_1.$$

En substituant (B) et (C) dans (A), nous obtenons

$$2\pi(y_1 - \varepsilon_1)\left[1 + f'(x_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_1 = \text{aire latérale du premier tronc de cône.}$$

De même,

$$2\pi(y_2 - \varepsilon_2)\left[1 + f'(x_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_2 = \text{aire latérale du deuxième tronc de cône.}$$

. . . .

$$2\pi(y_n - \varepsilon_n)\left[1 + f'(x_n)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_n = \text{aire latérale du dernier tronc de cône.}$$

Par suite,

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi(y_i - \varepsilon_i)\left[1 + f'(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i = \text{somme des aires latérales des troncs de cône.}$$

Cette relation peut s'écrire

$$\text{(D)} \qquad \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i\left[1 + f'(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\left[1 + f'(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i.$$

3e opération. En appliquant le théorème fondamental à la première somme (les limites étant $OA = a$ et $OB = b$), nous obtenons

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i\left[1 + f'(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i = \int_a^b 2\pi y\left[1 + f'(x)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

La limite de la seconde somme de (D), quand $n \doteq \infty$, est zéro (**).

(*) Le lecteur devra observer que quand Δx_1 tend vers zéro, ε_1 tend également vers zéro.

(**) On peut le voir aisément comme suit. Désignons la seconde somme par S_n. Si ε est égal au plus grand des nombres positifs $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \ldots, |\varepsilon_n|$, alors

$$S_n < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left[1 + f'(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i.$$

La somme de droite est, d'après (B), p. 443, égale à la somme des cordes CE, EF, etc. Soit l_n

Par suite, l'aire de la surface de révolution engendrée par l'arc CD tournant autour de OX est donnée par la formule

$$\text{(E)} \qquad S_x = 2\pi \int_a^b y\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx,$$

dans laquelle y et $\frac{dy}{dx}$ en fonction de x doivent être substitués d'après l'équation de la courbe de révolution, et S désigne l'aire cherchée. Nous pouvons encore écrire la formule sous la forme

$$S = 2\pi \int_a^b y ds,$$

en nous rappelant que

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx. \qquad (27), \text{ p. } 152.$$

Cette formule se retient aisément si nous considérons une étroite bande de la surface comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe de révolution comme élément d'aire, et que nous la regardions comme la surface convexe d'un tronc de cône de révolution d'apothème infiniment petit ds, avec une section moyenne dont la circonférence est égale à $2\pi y$, et par suite d'aire $2\pi y ds$.

De même, quand OY est l'axe de révolution, nous utilisons la formule

$$\text{(F)} \qquad S_y = 2\pi \int_c^d x\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy,$$

dans laquelle la valeur de x et celle de $\frac{dx}{dy}$ en fonction de y doivent être substituées d'après l'équation de la courbe donnée.

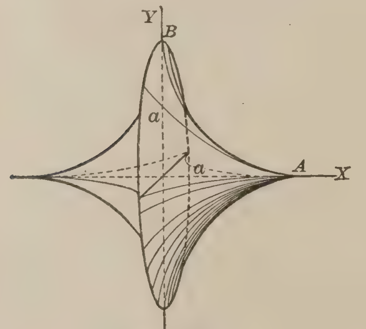


Fig. 231.

Exemple. — Trouver l'aire de la surface de révolution engendrée par l'hypocycloïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ tournant autour de l'axe des x (*fig.* 231).

Solution. Ici $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

---

cette somme. Alors $S_n < \varepsilon l_n$. Puisque $\lim_{n=\infty} \varepsilon = 0$, S_n est un infiniment petit et, par suite, $\lim_{n=\infty} S_n = 0$.

En substituant dans (E), p. 444, et en notant que l'arc BA n'engendre que la moitié de la surface, nous obtenons

$$\frac{S_x}{2} = 2\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 2\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} dx = 2\pi a^{\frac{1}{3}} \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{3}} dx$$

$$= \frac{6\pi a^2}{5}.$$

$$S_x = \frac{12\pi a^2}{5}.$$

EXEMPLES

1. Trouver l'aire de la surface de la sphère engendrée par la révolution du cercle $x^2 + y^2 = r^2$ autour d'un diamètre. *Rép.* $4\pi r^2$.

2. Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution de la parabole $y^2 = 4ax$ autour de OX, depuis l'origine jusqu'au point où $x = 3a$. *Rép.* $\frac{56}{3}\pi a^2$.

3. Trouver par intégration l'aire de la surface du cône engendré par la révolution autour de OX de la ligne joignant l'origine au point (a, b).

Rép. $\pi b\sqrt{a^2 + b^2}$.

4. Trouver par intégration l'aire de la surface du cône engendré par la révolution de la ligne $y = 2x$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2$:

(a) autour de OX ;
(b) autour de OY.

Vérifier les résultats géométriquement.

5. Trouver par intégration l'aire latérale du cylindre engendré par la révolution de la ligne $x = 4$ autour de OY depuis $y = 0$ jusqu'à $y = 6$ et vérifier les résultats géométriquement.

6. Trouver par intégration l'aire latérale du tronc de cône de révolution engendré par la ligne $2y = x - 4$ tournant autour de OX depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 5$ et vérifier les résultats géométriquement.

7. Des miroirs et des réflecteurs paraboliques ont la forme d'un paraboloïde de révolution. Trouver l'aire de la surface réfléchissante d'un de ces miroirs ayant deux mètres de profondeur et 6 mètres de largeur. *Rép.* $\frac{49}{4}\pi$.

Cette surface est égale à celle d'un cercle de 7 mètres de diamètre.

8. Trouver la surface du tore (anneau) engendré par la révolution du cercle $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ autour de OX. *Rép.* $4\pi^2 ab$.

NOTE. — La valeur positive de $\sqrt{a^2 - x^2}$ donne la surface extérieure, et la valeur négative, la surface intérieure.

9. Trouver la surface engendrée par la révolution d'un arc de la cycloïde

$$x = r \text{ arc sin vers } \frac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$$

autour de sa base. *Rép.* $\frac{64\pi r^2}{3}$.

10. Trouver l'aire de la surface de révolution engendrée par chacune des lignes suivantes tournant autour de OX :

(a) $y = x^3$, de $x = 0$ à $x = 2$. *Rép.* $\frac{\pi}{27}\left[(145)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$.

(b) $y = e^{-x}$, de $x = 0$ à $x = \infty$. $\pi\left[\sqrt{2} + \log\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$.

(c) La boucle de $9ay^2 = x(3a - x)^2$. $3\pi a^2$.

(d) $6a^2xy = x^4 + 3a^4$, de $x = a$ à $x = 2a$. $\frac{47}{16}\pi a^2$.

(e) La boucle de $8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$. $\frac{\pi a^2}{4}$.

(f) $y^2 + 4x = 2 \log y$, de $y = 1$ à $y = 2$. $\frac{10}{3}\pi$.

(g) $y = e^x$, de $x = -\infty$ à $x = 0$. $\pi\left[\sqrt{2} + \log\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$.

(h) La cycloïde $\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta). \end{cases}$ $\frac{64\pi a^2}{3}$.

(i) La cardioïde $\begin{cases} x = a(2 \cos \theta - \cos 2\theta), \\ y = a(2 \sin \theta - \sin 2\theta). \end{cases}$ $\frac{128\pi a^2}{5}$.

(j) $y + 2x = 4$, de $x = 0$ à $x = 2$.

(k) $3y - 2x = 6$, de $x = 0$ à $x = 2$.

(l) $y = x^3$, de $x = 0$ à $x = 1$.

(m) $x^2 + 4y^2 = 16$.

(n) $9x^2 + y^2 = 36$.

(o) $y^2 = 9x$, de $x = 0$ à $x = 1$.

11. Trouver l'aire de la surface de révolution engendrée par chacune des lignes suivantes tournant autour de OY :

(a) $x + 2y = 6$, de $y = 0$ à $y = 3$.

(b) $3x + 2y = 12$, de $y = 0$ à $y = 4$.

(c) $x^2 = 4y$, de $y = 0$ à $y = 3$.

(d) $x^2 + 16y^2 = 16$.

(e) $4x^2 + y^2 = 100$.

(f) $3x = y^3$, de $y = 0$ à $y = 1$.

(g) $x = y^3$, de $y = 0$ à $y = 3$. *Rép.* $\frac{\pi}{27}\left[(730)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$.

(h) $6a^2xy = x^4 - 3a^4$, de $x = a$ à $x = 3a$. $(20 + \log 3)\pi a^2$.

(i) $4y = x^2 - 2 \log x$, de $x = 1$ à $x = 4$. 24π.

(j) $2y = x\sqrt{x^2 - 1} + \log\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$, de $x = 2$ à $x = 5$. 78π.

12. Trouver l'aire de la surface de révolution engendrée par chacune des courbes suivantes tournant : (*a*) autour de OX ; (*b*) autour de OY.

	Autour de OX.	*Autour de* OY.
(*a*) L'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.	$2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{e}\operatorname{arc\,sin} e$.	$2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}\log\frac{1+e}{1-e}$.
NOTE. $e=$ excentricité de l'ellipse $=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.		
(*b*) La chaînette $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, de $x=0$ à $x=a$.	$\frac{\pi a^2}{4}(e^2+4-e^{-2})$.	$2\pi a^2(1-e^{-1})$.
(*c*) $x^4+3=6xy$, de $x=1$ à $x=2$.	$\frac{47}{16}\pi$.	$\pi(\frac{15}{4}+\log 2)$.
(*d*) $\begin{cases} x=e^\theta \sin\theta, \\ y=e^\theta\cos\theta, \end{cases}$ de $\theta=0$ à $\frac{\pi}{2}$.	$\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{5}(e^\pi-2)$.	$\frac{4\pi}{5}(2e^\pi+1)$.
(*e*) $3x^2+4y^2=3a^2$.	$\left(\frac{3}{2}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\pi a^2$.	$(4+3\log 3)\frac{\pi a^2}{2}$.
(*f*) $x+y=4$, de $x=0$ à $x=4$.		
(*g*) $y=2x+4$, de $y=4$ à $y=8$.		
(*h*) $x^2+2y^2=16$.		

214. Applications diverses. — Au § 212, on a montré comment se calcule le volume d'un solide de révolution au moyen d'une seule intégration. Évidemment, nous pouvons considérer un solide de révolution comme engendré par un cercle de rayon variable, dont le centre se déplace sur l'axe de révolution, le plan de ce cercle étant perpendiculaire à l'axe. Ainsi dans la figure 232, on peut supposer que le cercle ABCD dont le plan est perpendiculaire à OX, engendre le solide de révolution O — EGFH, quand son centre se déplace depuis 0 jusqu'à N, le rayon MC($=y$) variant continuellement avec OM($=x$) suivant l'équation de la courbe plane tournant autour de OX.

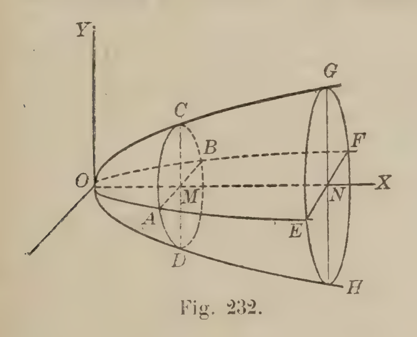


Fig. 232.

Nous allons montrer maintenant comment cette idée peut être étendue au calcul des volumes qui ne sont pas des solides de révolution quand il est possible d'exprimer l'aire de sections planes parallèles du solide comme fonction de leurs distances à un point fixe. Suppo-

sons que nous divisions le solide représenté par la figure 233 en n tranches par des sections perpendiculaires à OX et prenons l'origine comme point fixe. Soit FDE une face d'une de ces tranches. Construisons un prisme droit sur FDE comme base, la seconde base s'appuyant sur l'autre face de la tranche.

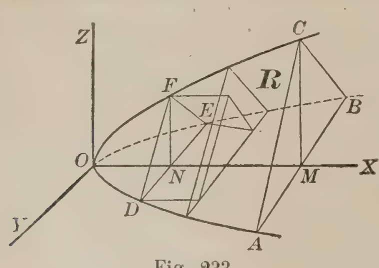


Fig. 233.

Puisque, par hypothèse, l'aire de FDE est une fonction de ON, ou x, soit $f(x) =$ l'aire de FDE $=$ l'aire de la base du prisme, et soit $\Delta x =$ la hauteur du prisme.

Par suite $f(x)\Delta x =$ le volume du prisme, et $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i =$ somme des volumes de tous les prismes. Il est évident que le volume cherché est la limite de cette somme. Par conséquent, d'après le théorème fondamental,

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int f(x)dx,$$

et nous avons la formule

$$\text{(A)} \qquad \mathbf{V} = \int \boldsymbol{f(x)dx},$$

dans laquelle $f(x)$ est l'aire d'une section du solide perpendiculaire à OX, exprimée en fonction de sa distance ($= x$) à l'origine, les limites de x étant choisies de façon à s'étendre sur toute la région R occupée par le solide.

Évidemment, le solide O — ABC (*fig.* 233) peut être considéré comme étant engendré par la section plane DEF variant continuellement quand ON($= x$) varie de zéro à OM. Les exemples suivants illustreront ce principe.

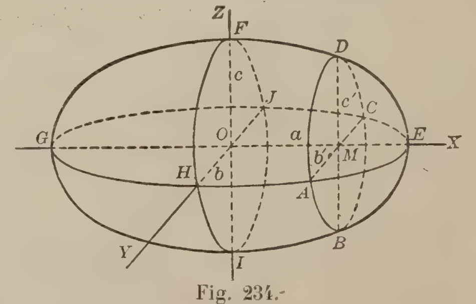


Fig. 234.

Exemple I. — Calculer le volume de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

au moyen d'une seule intégration (*fig.* 234).

Solution. Considérons une section de l'ellipsoïde perpendiculaire à OX, telle que ABCD, avec b' et c

comme demi-axes. L'équation de l'ellipse HEJG dans le plan XOY est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

La résolution de cette équation par rapport à $y(=b')$ en fonction de $x(=OM)$ donne

$$b'=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

De même, d'après l'équation de l'ellipse EFGI dans le plan XOZ, nous obtenons

$$c'=\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Par suite, l'aire de l'ellipse (section) ABCD est

$$\pi b'c'=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)=f(x).$$

En substituant dans (A), il vient

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi abc. \quad \textit{Rép.}$$

Nous pouvons donc imaginer l'ellipsoïde comme étant engendré par une ellipse variable ABCD se déplaçant de G en E, son centre étant constamment sur OX et son plan perpendiculaire à OX.

EXEMPLE II. — Trouver le volume d'un conoïde droit à base circulaire, le rayon de base étant r et la hauteur a (*fig.* 235).

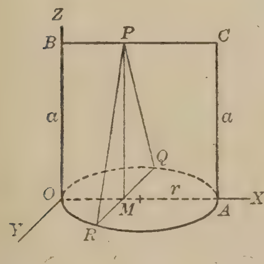


Fig. 235.

Solution. Le conoïde étant placé comme l'indique la figure 235, considérons une section PQR perpendiculaire à OX. Cette section est un triangle isocèle, et comme $RM=\sqrt{2rx-x^2}$ (on le trouve en résolvant par rapport à y l'équation du cercle ORAQ, $x^2+y^2=2rx$) et $MP=a$, l'aire de la section est

$$a\sqrt{2rx-x^2}=f(x).$$

En substituant dans (A), p. 448, on a

$$V=a\int_0^{2r}\sqrt{2rx-x^2}\,dx=\frac{\pi r^2 a}{2}. \quad \textit{Rép.}$$

Ce volume est la moitié de celui du cylindre de même base et de même hauteur.

Nous allons maintenant aborder l'étude de la *pression fluide* et apprendre à calculer la pression d'un fluide sur une paroi verticale.

Supposons que ABCD représente une partie de l'aire de la surface verticale de la paroi d'un réservoir. On demande de déterminer la pression fluide totale sur cette aire. Traçons les axes comme dans la

figure 236, l'axe des Y coïncidant avec la surface du fluide. Divisons AB en n sous-intervalles et construisons des rectangles horizontaux à l'intérieur de l'aire. L'aire d'un rectangle (tel que EP) est alors $y\Delta x$. Si ce rectangle est horizontal et à la profondeur x, la pression fluide sur lui est

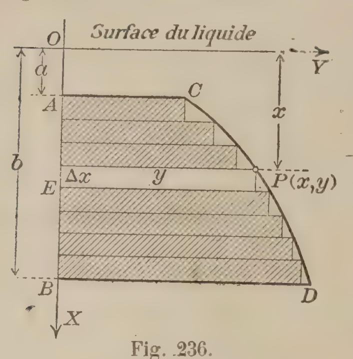


Fig. 236.

$$W x y \Delta x\,(*).$$

expression dans laquelle W = le poids d'une unité de volume du fluide. Puisque la pression fluide est la même dans toutes les directions, il s'ensuit que $Wxy\Delta x$ est approximativement la pression sur le rectangle EP dans sa position verticale. Par suite la somme

$$\sum_{i=1}^{n} W x_i y_i \Delta x_i$$

représente approximativement la pression sur tous les rectangles. La pression sur l'aire ABCD est évidemment la limite de cette somme. Par suite, en vertu du théorème fondamental,

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}} \sum_{i=1}^{n} W x_i y_i \Delta x_i = \int W x y dx.$$

Donc, la pression fluide sur une surface verticale submergée limitée par une courbe, l'axe des x et les deux lignes horizontales $x = a$ et $x = b$, est donnée par la formule

$$\text{(B)} \qquad \textbf{pression fluide} = \mathbf{W} \int_a^b yx\,dx,$$

dans laquelle la valeur de y en fonction de x doit être substituée d'après l'équation de la courbe donnée.

Nous supposerons que le poids d'un mètre cube d'eau est de 1 000 kg. (= W).

Exemple III. — Un conduit circulaire de 6 mètres de diamètre est à moitié rempli d'eau. Trouver la pression sur la paroi qui ferme le conduit (*fig.* 237).

(*) La pression d'un fluide sur une surface horizontale donnée quelconque est égale au poids d'une colonne du fluide ayant cette surface comme base et une hauteur égale à la distance de cette surface à la surface libre du fluide.

Solution. L'équation du cercle est $x^2 + y^2 = 9$.

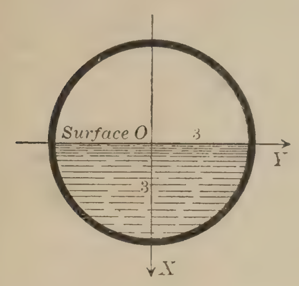


Fig. 237.

Par suite, $y = \sqrt{9 - x^2}$,

$W = 1\,000$,

et les limites vont depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 3$.

En substituant dans (B), nous obtenons la pression sur la droite de l'axe des x, laquelle est

$$\text{pression} = 1\,000 \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \cdot x dx$$

$$= \left[- \frac{1\,000}{3} (9 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 9000.$$

Par suite,

la pression totale $= 2 \times 9000 = 18000$ kg.

Réponse.

Considérons maintenant le problème qui consiste à trouver le travail accompli pour vider des réservoirs ayant la forme de solides de révolution avec leurs axes verticaux. Il est commode de supposer que l'axe des x de la courbe de révolution est vertical et que l'axe des y est au même niveau que le sommet du réservoir (*fig.* 238). Considérons un réservoir tel que celui de la figure 238. Nous voulons calculer le travail accompli quand on le vide d'un fluide de la profondeur a à la profondeur b. Divisons AB en n sous-intervalles, et menons par les points de division des plans perpendiculaires aux axes de révolution ; construisons des cylindres de révolution, comme au § 212, p. 438. Le volume d'un quelconque de ces cylindres est $\pi y^2 \Delta x$ et son poids, $W\pi y^2 \Delta x$, expression dans laquelle $W =$ le poids d'une unité cubique du fluide. Le travail accompli pour enlever ce cylindre de fluide hors du réservoir (la distance du cylindre au sommet du réservoir étant x) est

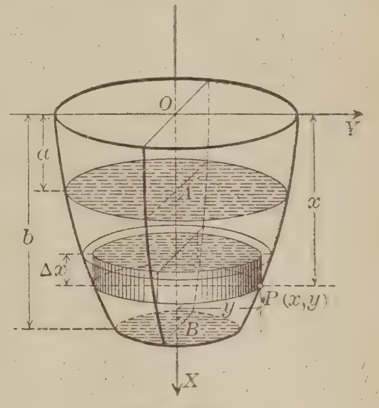


Fig. 238.

$$W\pi y^2 x \Delta x.$$

[Le travail effectué est égal au poids multiplié par la hauteur verticale.]

Le travail accompli en enlevant hors du réservoir tous les cylindres jusqu'au sommet est la somme

$$\sum_{i=1}^{n} W\pi y_i^2 x_i \Delta x_i.$$

Le travail effectué en vidant cette partie du réservoir est évidemment la limite de cette somme. Par suite, en vertu du théorème fondamental,

$$\underset{n=\infty}{\text{limite}} \sum_{i=1}^{n} W\pi y_i^2 x_i \Delta x_i = \int W\pi y^2 x dx.$$

Par conséquent, le travail accompli pour vider un réservoir ayant la forme d'un solide de révolution, de la profondeur a jusqu'à la profondeur b, est donné par la formule

$$\text{(C)} \qquad \textbf{travail} = W\pi \int_a^b y^2 x dx,$$

dans laquelle la valeur de y en fonction de x doit être substituée d'après l'équation de la courbe de révolution.

EXEMPLES

1. Calculer le travail effectué pour pomper l'eau remplissant un réservoir hémisphérique de 10 mètres de profondeur (*fig.* 239).

Solution. L'équation du cercle est

$$x^2 + y^2 = 100.$$

Par suite, $y^2 = 100 - x^2$,

$$W = 1\,000,$$

et les limites vont de $x = 0$ jusqu'à $x = 10$.

En substituant dans (C), nous obtenons

$$\text{Travail} = 1\,000\pi \int_0^{10} (100 - x^2) x dx$$
$$= 2\,500\,000\pi \text{kgm}.$$

Fig. 239.

2. Une auge de 2 mètres de profondeur et de 2 mètres de largeur au sommet a les extrémités semi-elliptiques. Trouver la pression contre l'une des extrémités lorsque l'auge est remplie d'eau. *Rép.* 2 666^{kg},67.

3. Une écluse de 8 mètres carrés a son sommet au même niveau que la surface de l'eau. Trouver la pression sur chacune des deux parties suivant lesquelles le carré est divisé par l'une de ses diagonales.

Rép. 85333^{kg},33, 170666^{kg},67.

4. Trouver la pression sur une face d'un triangle équilatéral vertical submergé de 4 mètres de côté, un des côtés se confondant avec la surface de l'eau.

Rép. 8000^{kg}.

5. Un réservoir à huile horizontal et cylindrique est à moitié plein d'huile. Le diamètre de chaque extrémité est de 4 mètres. Trouver la pression sur une extrémité, l'huile pesant 900 kg. par mètre cube. *Rép.* 4800 kg.

6. Trouver le travail accompli pour pomper l'eau d'un réservoir semi-elliptique rempli d'eau. La partie supérieure est un cercle de 6 mètres de diamètre et de 5 mètres de profondeur. *Rép.* 56 250 kgm.

7. Trouver la pression sur la surface du réservoir dans l'exemple 1.

8. Trouver la pression sur la surface du réservoir dans l'exemple 6.

9. Un réservoir conique de 12 mètres de profondeur est rempli d'un liquide pesant 1300 kg. par mètre cube. La partie supérieure du réservoir est un cercle de 8 mètres de diamètre. Trouver l'énergie dépensée pour le vider.

Rép. $249\,600\,\pi$ kgm.

10. La section droite d'une auge est une parabole dont le sommet est en bas, le paramètre ayant 4 mètres de long. Trouver la pression sur une extrémité de l'auge quand elle est pleine d'un liquide pesant 1100 kg. par mètre cube, sachant que l'auge a 4^{m} de haut *Rép.* 1166 kg.

11. Trouver la pression sur une sphère de 6 mètres de diamètre qui est immergée dans l'eau, son centre étant 10 mètres au-dessous de la surface de l'eau.

NOTE. — Pression $= 2\pi w \int_{-3}^{3} y(10+x)ds$ et $ds = \frac{3}{y}\,dx$.

Rép. $360\,000\,\pi$ kg.

12. Une planche ayant la forme d'un segment parabolique est enfoncée dans l'eau par une corde perpendiculaire à l'axe. Le sommet est à hauteur de la surface et l'axe est vertical. Elle a 20 mètres de profondeur et 12 mètres de largeur. Trouver la pression en tonnes.

13. A quelle profondeur la planche de l'ex. 12 doit-elle être enfoncée pour que la pression soit doublée ? *Rép.* 12 mètres.

14. Un réservoir à eau a la forme d'une demi-sphère de 8 mètres de diamètre surmontée par un cylindre de même diamètre et de 10 mètres de hauteur. Trouver le travail accompli pour le vider quand il est rempli jusqu'à 2 mètres du sommet.

15. Le centre d'un carré se déplace le long d'un diamètre d'un cercle de rayon a, le plan du carré étant perpendiculaire à celui du cercle et sa grandeur variant de telle façon que deux côtés opposés se déplacent sur la circonférence du cercle. Trouver le volume du solide engendré. *Rép.* $\frac{8}{3}a^3$.

16. Un triangle équilatéral variable se déplace, son plan étant perpendiculaire à l'axe des x et les extrémités de sa base sur les points des courbes $y^2 = 16ax$ et $y^2 = 4ax$ respectivement au-dessus de l'axe des x. Trouver le volume engendré par le triangle quand il se déplace depuis l'origine jusqu'aux points dont l'abscisse est a.

Rép. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

17. Un rectangle se déplace à partir d'un point fixe, un côté étant constamment égal à la distance à ce point, et l'autre égal au quart de cette distance. Quel est le volume engendré lorsque le rectangle se déplace de 2 mètres ?

Rép. 4 mètres cubes.

18. Sur les ordonnées doubles de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on décrit des triangles isocèles dont l'angle au sommet est égal à 90° dans des plans perpendiculaires à celui de l'ellipse. Trouver le volume du solide engendré en supposant qu'un de ces triangles variables se déplace d'une extrémité à l'autre du grand axe de l'ellipse. *Rép.* $\frac{4ab^2}{3}$.

19. Déterminer la force d'attraction exercée par une baguette mince, droite, homogène et d'épaisseur uniforme, de longueur l et de masse M, sur un point matériel P de masse m, situé à une distance a d'une extrémité de la baguette dans sa ligne de direction (*fig.* 240).

Fig. 240.

Solution (*). Supposons la baguette divisée en parties égales infiniment petites (éléments) de longueur dx.

$\frac{M}{l}$ = masse d'une unité de longueur de la baguette.

Par suite, $\frac{M}{l}dx$ = masse d'un élément quelconque.

La loi de Newton relative à la mesure de l'attraction entre deux masses quelconques est

$$\text{force d'attraction} = \frac{\text{produit des masses}}{(\text{distance entre elles})^2}.$$

Par conséquent, la force d'attraction entre le point matériel en P et un élément de la baguette est

$$\frac{\frac{M}{l}mdx}{(x+a)^2},$$

expression qui représente un *élément de la force d'attraction cherchée*. L'attraction totale entre le point matériel en P et la baguette étant la limite de la somme de tous ces éléments entre $x=0$ et $x=l$, nous avons

$$\text{force d'attraction} = \int_0^l \frac{\frac{M}{l}mdx}{(x+a)^2} = \frac{Mm}{l}\int_0^l \frac{dx}{(x+a)^2}$$

$$= +\frac{Mm}{a(a+l)}. \text{ *Réponse.*}$$

20. Déterminer la force d'attraction dans l'exemple précédent, si P se trouve sur la perpendiculaire élevée sur la baguette en son milieu à la distance a.

Rép. $\frac{2mM}{al}\,\text{arc tg}\,\frac{l}{2a}$.

21. Un vase ayant la forme d'un cône circulaire droit est rempli d'eau (*fig.* 241). Si h est sa hauteur et r le rayon de sa base, quel temps faudra-t-il pour qu'il se vide par un orifice d'aire a au sommet ?

Solution. En négligeant toutes les résistances, on sait que la vitesse d'écoulement par un orifice est la même que celle acquise par un corps tombant librement d'une hauteur égale à la profondeur de l'eau. Si donc x désigne la profondeur d'eau,

$$v = \sqrt{2gx}.$$

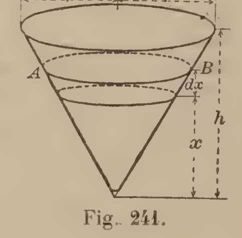


Fig. 241.

Désignons par dQ le volume d'eau écoulé dans le temps

(*) Les deux exemples qui suivent donnent des « méthodes abrégées » communément employées, l'exposition détaillée suivie dans les paragraphes précédents étant omise. Néanmoins, le lecteur devra y suppléer.

dt, et par dx l'abaissement correspondant du niveau de l'eau. Le volume d'eau écoulé par l'orifice dans l'unité de temps est

$$a\sqrt{2gx},$$

ce volume étant mesuré comme celui d'un cylindre droit d'aire de base a et de hauteur $v(=\sqrt{2gx})$.

Par conséquent, dans le temps dt,

$$\text{(A)} \qquad dQ = a\sqrt{2gx}\,dt.$$

En désignant par S l'aire de la surface de l'eau quand la profondeur est x, nous avons, d'après la géométrie,

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{x^2}{h^2}, \quad \text{ou} \quad S = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}.$$

Mais le volume d'eau écoulé dans le temps dt peut également être considéré comme le volume du cylindre AB d'aire de base S et de hauteur dx ; par suite,

$$\text{(B)} \qquad dQ = S\,dx = \frac{\pi r^2 x^2 dx}{h^2}.$$

En égalant (A) et (B) et en résolvant par rapport à dt, nous avons

$$dt = \frac{\pi r^2 x^2 dx}{ah^2\sqrt{2gx}}.$$

Par conséquent,

$$t = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^2 dx}{ah^2\sqrt{2gx}} = \frac{2\pi r^2\sqrt{h}}{5a\sqrt{2g}}. \quad \textit{Réponse.}$$

22. La température demeurant constante, un gaz parfait se dilate dans un cylindre contre une tête de piston, du volume v_0 au volume v_1. Trouver le travail accompli.

Solution. Soit c l'aire de la section droite du cylindre.

Si dv est l'accroissement de volume, alors $\frac{dv}{c}$ = la distance dont la tête de piston se déplace lorsque le volume subit l'accroissement dv.

En vertu de la loi de Boyle (*),

$$pv = k\ (= \text{constante}),$$

$$p = \frac{k}{v} = \text{pression sur la tête de piston.}$$

Par suite,

$$\text{élément de travail effectué} = \frac{k}{v}\cdot\frac{dv}{c}\ (= \text{pression} \times \text{distance}).$$

$$\text{Travail total effectué} = \int_{v_0}^{v_1}\frac{k\,dv}{vc}$$

$$= \frac{k}{c}\int_{v_0}^{v_1}\frac{dv}{v}$$

$$= \frac{k}{c}\log\frac{v_1}{v_0}.$$

(*) Ou loi de Mariotte (note du traducteur).

CHAPITRE XXIX

INTÉGRATION SUCCESSIVE ET PARTIELLE

215. Intégration successive. — A la *différentiation successive* dans le calcul différentiel correspond l'opération inverse d'*intégration successive* dans le calcul intégral. Nous allons illustrer au moyen d'exemples les détails de cette opération et montrer comment il se présente des problèmes dans lesquels il est nécessaire de l'appliquer.

EXEMPLE I. — Étant donné $\frac{d^3y}{dx^3} = 6x$, trouver y.

Solution. L'expression donnée peut s'écrire

$$\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = 6x,$$

ou

$$d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 6xdx.$$

En intégrant, il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int 6xdx,$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 + c_1.$$

Cette dernière expression peut également s'écrire

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 3x^2 + c_1,$$

ou

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = (3x^2 + c_1)dx.$$

En intégrant de nouveau, on a

$$\frac{dy}{dx} = \int (3x^2 + c_1)dx,$$

ou

(A) $$\frac{dy}{dx} = x^3 + c_1x + c_2,$$

ou

$$dy = (x^3 + c_1x + c_2)dx$$

et, en intégrant, on obtient

(B) $$y = \frac{x^4}{4} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3.$$ *Réponse.*

On écrit également le résultat (A) sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \int\int 6x dx dx \quad \left(\text{ou} = \int\int 6x dx^2\right),$$

et on l'appelle une *intégrale double*, tandis qu'on écrit (B) sous la forme

$$y = \int\int\int 6x dx dx dx \quad \left(\text{ou} = \int\int\int 6x dx^3\right)$$

et on l'appelle une *intégrale triple*.

D'une façon générale, une *intégrale multiple* nécessite deux ou plusieurs intégrations successives. Comme précédemment, s'il n'y a pas de limites assignées, comme dans l'exemple ci-dessus, l'intégrale est indéfinie ; s'il y a des limites assignées pour chaque intégration successive, l'intégrale est définie.

Exemple II. — Trouver l'équation d'une courbe pour chaque point de laquelle la dérivée seconde de l'ordonnée par rapport à l'abscisse est égale à 4.

Solution. Ici $\frac{d^2y}{dx^2} = 4.$

En intégrant comme dans l'exemple I, il vient

(C) $$\frac{dy}{dx} = 4x + c_1,$$

(D) $$y = 2x^2 + c_1x + c_2.$$ *Réponse.*

L'expression (D) est l'équation d'une parabole s'étendant vers le haut et dont l'axe est parallèle à OY.

En donnant aux constantes arbitraires d'intégration toutes les valeurs possibles, nous obtenons toutes les paraboles d'équation (D).

Pour déterminer c_1 et c_2, deux conditions supplémentaires sont nécessaires, par exemple :

(*a*) au point où $x = 2$, la pente de la tangente à la parabole est nulle :
(*b*) la parabole passe par le point (2, — 1).

(*a*) La substitution dans (C) de $x = 2$ et de $\frac{dy}{dx} = 0$ donne

$$0 = 8 + c_1.$$

Par suite, $$c_1 = -8,$$
et (D) devient $$y = 2x^2 - 8x + c_2.$$

(*b*) Les coordonnées de (2, — 1) doivent satisfaire à cette équation. Par conséquent,

$$-1 = 8 - 16 + c_2, \quad \text{ou} \quad c_2 = +7.$$

Par suite, l'équation de la parabole particulière qui satisfait aux trois conditions est $y = 2x^2 - 8x + 7.$

EXEMPLES

1. Étant donné $\frac{d^3y}{dx^3} = ax^2$, trouver y. *Rép.* $y = \frac{ax^5}{60} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3.$

2. Étant donné $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, trouver y. $y = \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3.$

3. Étant donné $d^3y = \frac{2dx^3}{x^3}$, trouver y. $y = \log x + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3.$

4. Étant donné $\frac{d^3\rho}{d\theta^3} = \sin\theta$, trouver ρ. $\rho = \cos\theta + \frac{c_1\theta^2}{2} + c_2\theta + c_3.$

5. Étant donné $\frac{d^3s}{dt^3} = 3t^2 - \frac{1}{t^3}$, trouver s. $s = \frac{t^5}{20} - \frac{1}{2}\log t + \frac{c_1t^2}{2} + c_2t + c_3.$

6. Étant donné $d^2\rho = \sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi^2$, trouver ρ. $\rho = \frac{\sin^3\varphi}{9} - \frac{1}{3}\sin\varphi + c_1\varphi + c_2.$

7. Déterminer les équations de toutes les courbes ayant une courbure nulle.

Note. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, d'après (40), p. 178, puisque $K = 0$.

Réponse. $y = c_1x + c_2$, système doublement infini de lignes droites.

8. L'accélération d'un point mobile est constante et égale à f. Trouver la distance (espace) parcourue.

Note. $\frac{d^2s}{dt^2} = f.$ *Rép.* $s = \frac{ft^2}{2} + c_1t + c_2.$

9. Montrer dans l'ex. 8 que c_1 représente la vitesse initiale et c_2 la distance initiale.

10. Trouver l'équation de la courbe en chaque point de laquelle la dérivée seconde de l'ordonnée par rapport à l'abscisse est égale à quatre fois l'abscisse et qui passe par l'origine et le point (2, 4). *Rép.* $3y = 2x(x^2 - 1).$

11. Étant donné $\frac{d^4y}{dx^4} = x\cos x$, trouver y.

Rép. $y = x\cos x - 4\sin x + \frac{c_1x^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + c_4.$

12. Étant donné $\frac{d^3y}{dx^3} = \sin^3 x$, trouver y.

Rép. $y = \frac{7\cos x}{9} - \frac{\cos^3 x}{27} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3.$

216. Intégration partielle. — A la *différentiation partielle* dans le calcul différentiel correspond l'opération inverse d'*intégration partielle* dans le calcul intégral. L'intégration partielle, comme on peut le supposer d'après la nature du sujet, signifie que étant donnée une expression différentielle comprenant deux ou plusieurs variables

indépendantes, nous l'intégrons en considérant d'abord une seule d'entre elles comme variant, toutes les autres restant constantes. Ensuite, nous intégrons le résultat, en en considérant une autre comme variant, les autres restant constantes et ainsi de suite. Ces intégrales sont appelées *double, triple,* etc., suivant le nombre des variables. On les appelle également *intégrales multiples* (*).

Ainsi l'expression

$$u = \iint f(x, y) dy dx$$

indique que nous voulons trouver une fonction u de x et de y telle que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

Dans la solution de ce problème, le seul trait nouveau est que la constante d'intégration a une nouvelle forme. Nous allons illustrer ces considérations au moyen d'exemples. Ainsi, supposons que nous voulions trouver u, étant donné

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + 3.$$

En intégrant cette expression par rapport à x en considérant y comme constant, nous avons

$$u = x^2 + xy + 3x + \varphi,$$

expression dans laquelle φ désigne la constante d'intégration. Mais puisque y a été regardé comme constant pendant l'intégration, il peut arriver que φ dépende de y de quelque façon ; en fait, φ sera en général une fonction de y. Nous indiquerons donc cette dépendance de φ vis-à-vis de y en remplaçant φ par le symbole $\varphi(y)$. Par suite, la forme la plus générale de u est

$$u = x^2 + xy + 3x + \varphi(y),$$

expression dans laquelle $\varphi(y)$ *désigne une fonction arbitraire de* y.

Comme autre problème, cherchons

(A) $$u = \iint (x^2 + y^2) dy dx.$$

(*) Les intégrales de même nom dans le paragraphe précédent sont des cas particuliers de celles-ci, quand nous intégrons par rapport à la même variable.

Cette relation signifie que nous voulons trouver u, étant donné

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2.$$

En intégrant d'abord par rapport à y, considérant x comme constant, nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 y + \frac{y^3}{3} + \psi(x),$$

expression dans laquelle $\psi(x)$ est une fonction arbitraire de x et doit être considérée comme la constante d'intégration.

Intégrons maintenant ce résultat par rapport à x, en regardant y comme constant ; nous avons

$$u = \frac{x^3 y}{3} + \frac{x y^3}{3} + \Psi(x) + \Phi(y),$$

expression dans laquelle $\Phi(y)$ est la constante d'intégration, et

$$\Psi(x) = \int \psi(x) dx.$$

217. Intégrale double définie. Interprétation géométrique. — Soit $f(x, y)$ une fonction continue et à valeur unique de x et de y. Géométriquement,

(A) $z = f(x, y)$

est l'équation d'une surface telle que KL (*fig.* 242).

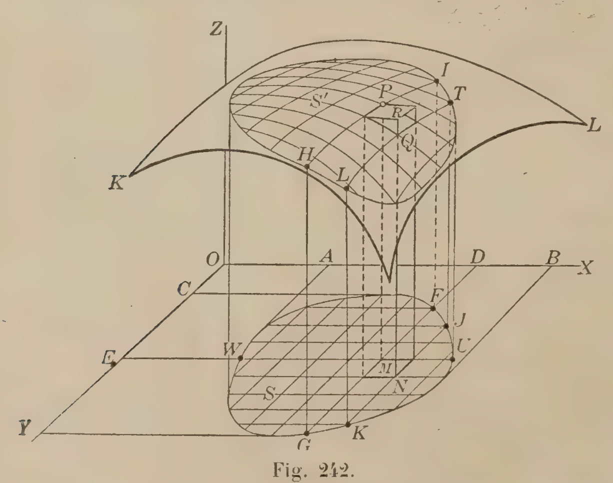


Fig. 242.

Prenons une certaine aire S dans le plan XY et construisons sur S comme base, le cylindre droit dont les génératrices sont, en conséquence, parallèles à OZ. Supposons que ce cylindre coupe la surface KL suivant l'aire S' et cherchons maintenant le volume V du solide limité par S, S' et la surface cylindrique. Nous procéderons comme il suit :

A des distances également éloignées ($=\Delta x$) dans l'aire S, tirons une série de lignes parallèles à OY et, ensuite, une seconde série de lignes parallèles à OX à des distances également éloignées ($=\Delta y$). Par ces lignes faisons passer des plans respectivement parallèles à YOZ et à XOZ. A l'intérieur des aires S et S′, nous avons un réseau de lignes, comme dans la figure 242, le réseau de S étant composé de rectangles dont la surface commune est $\Delta x \,.\, \Delta y$. Cette construction divise le cylindre en un certain nombre de colonnes verticales, telles que MNPQ, dont les bases supérieures et inférieures correspondent respectivement à des parties du réseau en S′ et S. Comme les bases supérieures de ces colonnes sont curvilignes, nous ne pouvons pas, naturellement, calculer directement le volume de ces colonnes. Remplaçons-les par des prismes dont les bases supérieures sont trouvées comme il suit :

Chaque colonne est coupée par un plan parallèle à OXY passant par le sommet de la base supérieure pour lequel x et y ont les plus petites valeurs numériques. Ainsi, la colonne MNPQ est remplacée par le prisme droit MNPR, la base supérieure étant dans un plan passant par P parallèlement au plan XOY.

Si les coordonnées de P sont (x, y, z), alors $\text{MP} = z = f(x, y)$ et, par suite,

$$\text{(B)} \qquad \text{volume de MNPR} = f(x, y)\Delta y \,.\, \Delta x.$$

En calculant le volume de chacun des autres prismes formés de la même manière en remplaçant x et y dans (B) par des valeurs correspondantes, et en additionnant les résultats, nous obtenons un volume V′ approximativement égal à V, c'est-à-dire

$$\text{(C)} \qquad V' = \sum\sum f(x, y)\Delta y \,.\, \Delta x,$$

expression dans laquelle le double signe de sommation $\sum\sum$ indique qu'il y a *deux variables* dans la quantité à sommer.

Si maintenant, dans la figure 242, nous faisons croître indéfiniment le nombre des divisions du réseau dans S en faisant décroître Δx et Δy indéfiniment et que nous calculions dans chaque cas la double somme (C), V′ tendra évidemment vers V comme limite, et par suite, nous avons le résultat fondamental suivant :

$$\text{(D)} \qquad V = \underset{\substack{\Delta y = 0 \\ \Delta x = 0}}{\text{limite}} \sum\sum f(x, y)\Delta y \,.\, \Delta x.$$

Le volume cherché peut également être trouvé comme il suit :

Considérons une quelconque des tranches successives suivant lesquelles le solide est divisé par les plans parallèles à OYZ, par exemple la tranche dont les faces sont FIGH et TLJK. L'épaisseur de cette tranche est Δx. Or, les valeurs de z le long de la courbe HI se trouvent en écrivant $x = \text{OD}$ dans l'équation $z = f(x, y)$, c'est-à-dire que le long de HI,

$$z = f(\text{OD}, y).$$

Par suite,

$$\text{aire FIGH} = \int_{\text{DF}}^{\text{DG}} f(\text{OD}, y)dy.$$

Le volume de la tranche en question est approximativement égal à celui d'un prisme dont la base est FIGH et la hauteur Δx, c'est-à-dire égal à

$$\Delta x \cdot \text{aire FIGH} = \Delta x \int_{\text{DF}}^{\text{DG}} f(\text{OD}, y)dy.$$

Le volume cherché de tout le solide est évidemment la limite de la somme de tous les prismes construits de la même manière, quand $x (= \text{OD})$ varie de OA à OB, c'est-à-dire

$$\text{(E)} \qquad V = \int_{\text{OA}}^{\text{OB}} dx \int_{\text{DF}}^{\text{DG}} f(x, y)dy.$$

De même, on peut montrer que

$$\text{(F)} \qquad V = \int_{\text{OC}}^{\text{OV}} dy \int_{\text{EW}}^{\text{EU}} f(x, y)dx.$$

Les intégrales (E) et (F) s'écrivent également sous la forme plus compacte

$$\int_{\text{OA}}^{\text{OB}} \int_{\text{DF}}^{\text{DG}} f(x, y)dydx$$

et

$$\int_{\text{OC}}^{\text{OV}} \int_{\text{EW}}^{\text{EU}} f(x, y)dxdy.$$

Dans (E), les limites DF et DG sont des fonctions de x, puisqu'on les trouve en résolvant par rapport à y l'équation de la courbe limitant la base du solide.

De même, en (F), les limites EW et EU sont des fonctions de y.

La comparaison de (D), (E) et (F) donne le résultat suivant :

$$(G) \qquad V = \lim_{\substack{\Delta y = 0 \\ \Delta x = 0}} \sum \sum f(x, y)\Delta y \,.\, \Delta x$$

$$= \int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y) dy dx$$

$$= \int_{b_2}^{b_1} \int_{v_2}^{v_1} f(x, y) dx dy,$$

expressions dans lesquelles v_1 et v_2 sont, en général, des fonctions de y, et u_1 et u_2, des fonctions de x, le second signe d'intégration s'appliquant à la première différentielle et étant calculé en premier lieu.

Notre résultat peut être énoncé de la façon suivante :

L'intégrale double définie

$$\int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y) dy dx$$

peut être considérée comme la portion du volume d'un cylindre droit tronqué comprise entre le plan XOY et la surface

$$z = f(x, y),$$

la base du cylindre étant l'aire limitée par les courbes

$$y = u_1, \quad y = u_2, \quad x = a_1, \quad x = a_2.$$

De même pour la seconde intégrale.

Il est intéressant de considérer comme il suit la méthode qui précède relative à la recherche du volume d'un solide :

Considérons une colonne de base infiniment petite $dydx$ et de hauteur z, comme un élément du volume. En additionnant tous les éléments depuis $y = \mathrm{DF}$ jusqu'à $y = \mathrm{DG}$, x étant une constante (soit $= \mathrm{OD}$), on obtient le volume d'une tranche infiniment mince ayant comme face FGHI. Le volume du solide entier se trouve alors en additionnant toutes les tranches depuis $x = \mathrm{OA}$ jusqu'à $x = \mathrm{OB}$.

Dans l'intégration partielle comprenant deux variables, l'ordre d'intégration indique que les limites du second signe d'intégration correspondent à la variable dont la différentielle est écrite en premier lieu, les différentielles des variables et leurs limites correspondantes sous les signes d'intégration étant écrites dans l'ordre renversé.

EXEMPLE. — Trouver la valeur de l'intégrale double définie

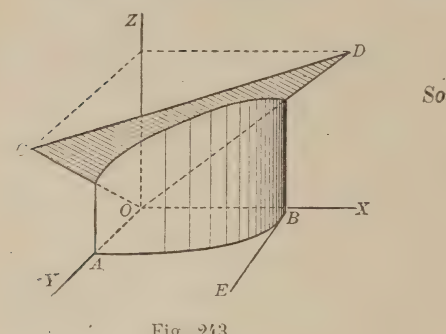


Fig. 243.

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)dydx \ (fig.\ 243).$$

Solution. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)dydx$

$$= \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)dy \right] dx$$

$$= \int_0^a \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int_0^a \left(x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2-x^2}{2} \right) dx$$

$$= \frac{2a^3}{3}. \ \textit{Rép.}$$

L'interprétation géométrique de ce résultat signifie que nous avons trouvé le volume du solide de forme cylindrique s'appuyant sur OAB comme base et limité au sommet par la surface (plan) $z = x + y$.

Nous appelons maintenant tout particulièrement l'attention du lecteur sur la manière dont les limites encerclent la base AOB qui correspond à l'aire S de la figure 242, p. 460. Ici, notre solide (*fig.* 243) repose sur une base dans le plan XY, limitée par

$y = 0$ (ligne OB), $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (quadrant de cercle AB) } limites de y;

$x = 0$ (ligne OA), $x = a$ (ligne BE) } limites de x.

218. Valeur d'une intégrale double définie prise dans l'étendue d'une région S. — Dans le paragraphe précédent, nous avons représenté l'intégrale double définie comme un volume. Cela ne signifie pas nécessairement que toute intégrale double définie est un volume, car l'interprétation physique du résultat dépend de la nature des quantités représentées par x, y, z. Ainsi, lorsque x, y, z sont simplement considérés comme les coordonnées d'un point de l'espace, et rien de plus, le résultat est en effet un volume. Afin de donner à l'intégrale double définie en question une interprétation n'impliquant pas nécessairement le concept géométrique de volume, nous observons immédiatement que la variable z ne figure pas explicitement dans l'intégrale et que, par suite, nous pouvons nous limiter au plan XY. En effet, considérons simplement une région S dans le plan XY et une fonction donnée $f(x, y)$. En traçant un réseau comme précédemment, calculons la valeur de

$$f(x, y)\Delta y \Delta x$$

pour chaque point(*) *du réseau* et faisons la somme : nous trouvons de cette façon

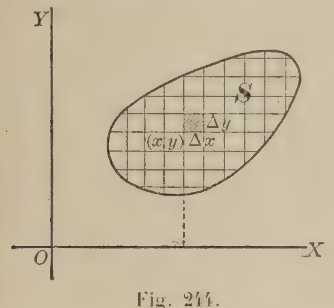


Fig. 244.

$$\sum\sum f(x, y)\Delta y\Delta x,$$

et finalement nous passons à la limite quand Δx et Δy tendent vers zéro. On appelle cette opération *intégrer la fonction $f(x, y)$ dans l'étendue de la région* S, et on la désigne par le symbole

$$\iint_S f(x, y)dydx.$$

Si la région S est limitée par les courbes $x = a_1$, $x = a_2$, $y = u_1$, $y = u_2$, alors, d'après (G), nous avons

$$\iint_S f(x, y)dydx = \int_{a_1}^{a_2}\int_{u_1}^{u_2} f(x, y)dydx.$$

Nous pouvons énoncer notre résultat comme il suit :

Théorème. — *Pour intégrer une fonction donnée $f(x, y)$ dans l'étendue d'une région donnée* S *prise dans le plan* XOY, *on calcule la valeur de*

$$\underset{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0}}{\text{limite}} \sum\sum f(x, y)\Delta y\Delta x$$

comme il est expliqué ci-dessus, et le résultat est égal à l'intégrale double définie

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{u_1}^{u_2} f(x, y)dydx, \quad \text{ou,} \quad \int_{b_1}^{b_2}\int_{v_1}^{v_2} f(x, y)dxdy,$$

les limites étant choisies de telle sorte que la région entière S *soit couverte. Cette opération est indiquée brièvement par*

$$\iint_S f(x, y)dydx.$$

(*) Plus généralement, divisons l'intervalle sur OX en sous-intervalles $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$, et sur OY en sous-intervalles $\Delta y_1, \Delta y_2, \cdots, \Delta y_n$. Traçons le réseau et dans chaque rectangle $\Delta x_i\,\Delta y_k$, choisissons un point x_i, y_k (pas nécessairement un sommet). Il est évident *intuitivement* que

$$\iint_S f(x, y)dxdy = \underset{\substack{m=\infty \\ n=\infty}}{\text{limite}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k.$$

Nous montrerons dans ce qui va suivre comment l'aire de la région elle même et son moment d'inertie peuvent être calculés de cette façon.

Avant d'essayer d'appliquer l'intégration partielle à des problèmes pratiques, il est préférable que le lecteur acquière par l'exercice quelque habileté pour calculer les intégrales multiples définies.

Exemple I. — Vérifier $\int_b^{2b}\int_0^a (a-y)x^2dydx = \frac{7a^2b^3}{6}$.

Solution. $\int_b^{2b}\int_0^a (a-y)x^2dydx = \int_b^{2b}\left[ay-\frac{y^2}{2}\right]_0^a x^2dx = \int_b^{2b}\frac{a^2}{2}x^2dx = \frac{7a^2b^3}{6}$.

Exemple II. — Vérifier $\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} xdydx = \frac{2a^3}{3}$.

Solution. $\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} xdydx = \int_0^a\Big[xy\Big]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$

$$= \int_0^a 2x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{2}{3}a^3.$$

Dans l'intégration partielle comprenant trois variables, l'ordre d'intégration est indiqué de la même manière que pour deux variables ; c'est-à-dire que l'ordre des limites sur les signes d'intégration, lu de l'intérieur à la gauche, est le même que l'ordre des variables correspondantes dont les différentielles sont lues de l'intérieur à la droite.

Exemple III. — Vérifier $\int_2^3\int_1^2\int_2^5 xy^2dzdydx = \frac{35}{2}$.

Solution.

$$\int_2^3\int_1^2\int_2^5 xy^2dzdydx = \int_2^3\int_1^2\left[\int_2^5 xy^2dz\right]dydx = \int_2^3\int_1^2\Big[xy^2z\Big]_2^5 dydx$$

$$= 3\int_2^3\int_1^2 xy^2dydx = 3\int_2^3\left[\int_1^2 xy^2dy\right]dx$$

$$= 3\int_2^3\left[\frac{xy^3}{3}\right]_1^2 dx = 7\int_2^3 xdx = \frac{35}{2}.$$

EXEMPLES

Vérifier les intégrations suivantes :

1. $\int_0^a\int_0^b xy(x-y)dydx = \frac{a^2b^2}{6}(a-b)$.

2. $\int_{\frac{b}{2}}^{b}\int_0^{\frac{r}{b}} rd\theta dr = \frac{7b^2}{24}$.

3. $\int_0^a\int_{y-a}^{2y} xydxdy = \frac{11a^4}{24}$.

4. $\int_b^a \int_0^b \int_a^{2a} x^2y^2z\,dz\,dy\,dx = \frac{a^2b^3}{6}(a^3 - b^3).$

5. $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \int_0^{\frac{x^2+y^2}{a}} dz\,dy\,dx = \frac{3\pi a^3}{4}.$

6. $\int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta = \frac{4a^3}{3}.$

7. $\int_0^b \int_t^{10t} \sqrt{st - t^2}\,ds\,dt = 6b^3.$

8. $\int_a^{2a} \int_v^{\frac{v^2}{a}} (w + 2v)\,dw\,dv = \frac{143a^3}{30}.$

9. $\int_0^1 \int_0^{v^2} e^{\frac{w}{v}}\,dw\,dv = \frac{1}{2}.$

10. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx = \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}.$

11. $\int_0^a \int_{2x}^{x^{\frac{3}{2}}} xy^2\,dy\,dx = \frac{2}{3}a^5\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{13} - \frac{4}{5}\right).$

12. $\int_0^a \int_0^x \int_0^y x^3y^2z\,dz\,dy\,dx = \frac{a^9}{90}.$

13. $2a \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-ax}} \frac{dz\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = 4a^2.$

14. $\int_{-a}^a \int_0^{\frac{y^2}{a}} (x + y)\,dx\,dy = \frac{a^3}{5}.$

15. $\int_0^{\pi} \int_0^{a\cos\theta} \rho \sin\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{a^2}{3}.$

16. $\int_0^{2a} \int_0^x (x^2 + y^2)\,dy\,dx = \frac{16a^4}{3}.$

17. $\int_0^a \int_{\frac{x^2}{a}}^x \frac{x\,dx\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{a}{2}\log 2.$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{a\cos\theta}^a \rho^4\,d\rho\,d\theta = \left(\pi - \frac{16}{15}\right)\frac{a^5}{10}.$

19. $\int_b^a \int_\beta^\alpha r^2 \sin\theta\,d\theta\,dr = \frac{a^3 - b^3}{3}(\cos\beta - \cos\alpha).$

20. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z}\,dz\,dy\,dx = \frac{e^4 - 3}{8} - \frac{3e^2}{4} + e.$

21. $\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2)\,dz\,dy\,dx = \frac{abc}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$

22. $\int_0^b \int_y^{10y} \sqrt{xy - y^2}\,dx\,dy = 6b^3.$

23. $\int_1^2 \int_0^z \int_0^{x\sqrt{3}} \frac{x\,dy\,dx\,dz}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2}.$

219. L'aire plane considérée comme une intégrale double définie. Coordonnées rectangulaires. — Comme application simple du théorème du paragraphe précédent (p. 465), nous allons maintenant déterminer par double intégration l'aire de la région S elle-même dans le plan XOY (*) (*fig.* 245).

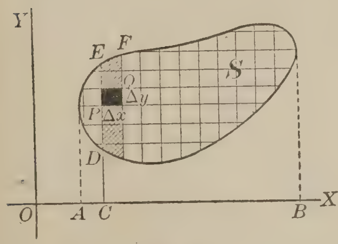


Fig. 245.

Comme précédemment, tirons des lignes parallèles à OX et à OY aux

(*) Quelques-uns des exemples qui seront donnés dans cet article et dans les suivants peuvent être résolus au moyen d'une simple intégration par des méthodes déjà expliquées. La seule raison, en pareils cas, d'employer l'intégration successive, est de familiariser le lecteur avec une nouvelle méthode de solution qui est quelquefois la seule possible.

distances respectives Δx et Δy. Considérons maintenant un des rectangles formés de cette façon ; nous avons alors

$$\text{élément d'aire} = \text{aire du rectangle PQ} = \Delta y \cdot \Delta x,$$

les coordonnées de P étant (x, y). Désignons par A l'aire totale de la région S ; nous avons, en utilisant la notion de double sommation,

$$\text{(A)} \qquad A = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0}} \sum\sum \Delta y \cdot \Delta x.$$

Nous calculons cette expression d'après le théorème de la page 465, en posant $f(x, y) = 1$ et nous obtenons

$$\text{(B)} \qquad A = \int_{OA}^{OB} \int_{CD}^{CE} dy dx,$$

expression dans laquelle CD et CE sont généralement des fonctions de x, et OA et OB des constantes donnant les valeurs extrêmes de x, ces quatre quantités étant déterminées d'après les équations de la courbe ou des courbes qui limitent la région S.

Il est intéressant d'interpréter géométriquement cette intégrale double en se reportant à la figure. Quand nous intégrons d'abord par rapport à y, en considérant $x (= OC)$ comme constant, nous additionnons tous les éléments d'une petite bande verticale de surface (telle que DF). Pour intégrer ensuite le résultat par rapport à x, nous additionnons toutes les petites bandes de surface verticales comprises dans la région et cette opération donne évidemment l'aire totale de la région S.

Si nous changeons l'ordre d'intégration, nous avons

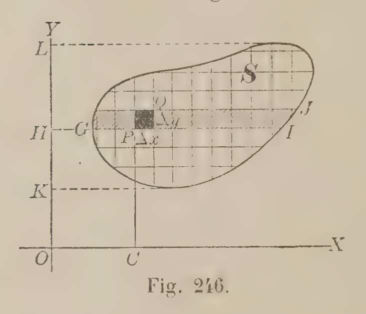


Fig. 246.

$$\text{(C)} \qquad A = \int_{OK}^{OL} \int_{HG}^{HI} dx dy,$$

expression dans laquelle HG et HI sont généralement des fonctions de y, et OK et OL, des constantes donnant les valeurs extrêmes de y, ces quatre quantités étant déterminées d'après les équations de la courbe ou des courbes qui limitent la région S (*fig.* 246). Géométriquement, cette relation signifie que nous commençons d'abord par sommer tous les éléments d'une petite bande horizontale de surface

(telle que GJ) et qu'ensuite nous trouvons l'aire totale en additionnant toutes ces petites bandes de surface à l'intérieur de la région.

La notation et les figures ci-après (*fig.* 247 et 248) qui correspondent aux deux ordres de sommation (intégration) qui précèdent, sont quelquefois employées :

(D) $$\mathrm{A} = \iint_{\mathrm{S}} dy dx, \qquad \mathrm{A} = \iint_{\mathrm{S}} dx dy.$$

Fig. 247.

Fig. 248.

En nous reportant au résultat énoncé p. 465, nous pouvons dire :

L'aire d'une région quelconque est la valeur de l'intégrale double de la fonction $f(x, y) = 1$ *prise dans l'étendue de cette région* ou, également, d'après le § 217, p. 460,

L'aire est numériquement égale au volume d'un cylindre droit ayant pour hauteur l'unité et élevé sur la base S.

Exemple I. — Calculer l'aire du cercle $x^2 + y^2 = r^2$ par double intégration (*fig.* 249).

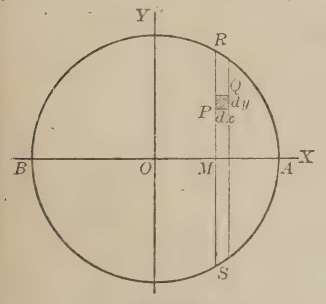


Fig. 249.

Solution. En additionnant d'abord les éléments suivant une petite bande verticale de surface, nous avons d'après (B), p. 468,

$$\mathrm{A} = \int_{\mathrm{OB}}^{\mathrm{OA}} \int_{\mathrm{MS}}^{\mathrm{MR}} dy dx.$$

D'après l'équation de la courbe de démarcation (cercle), nous obtenons

$$\mathrm{MR} = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \mathrm{MS} = -\sqrt{r^2 - x^2},$$
$$\mathrm{OB} = -r, \quad \mathrm{OA} = r.$$

Par suite,

$$\mathrm{A} = \int_{-r}^{+r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} dy dx = 2 \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \pi r^2. \quad \textit{Réponse.}$$

Quand la région dont on veut trouver l'aire est symétrique par

rapport à l'un des axes de coordonnées ou par rapport à tous les deux, on simplifie quelquefois le travail en calculant seulement l'aire d'une partie de la région. Dans l'exemple qui précède, nous pouvons choisir nos limites de façon à couvrir seulement un quart de cercle et multiplier ensuite le résultat par 4. Ainsi,

$$\frac{A}{4} = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dydx = \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{4},$$

$$A = \pi r^2. \qquad \textit{Réponse.}$$

EXEMPLE II. — Calculer la portion d'aire qui est située au-dessus de OX et limitée par la parabole semi-cubique $y^2 = x^3$ et la ligne droite $y = x$ (*fig.* 250).

Fig. 250.

Solution. En additionnant d'abord les éléments suivant une petite bande horizontale de surface, nous avons d'après (C), p. 468,

$$A = \int_0^{OD} \int_{AB}^{AC} dxdy.$$

D'après l'équation de la ligne, $AB = y$ et d'après l'équation de la courbe, $AC = y^{\frac{2}{3}}$, en résolvant chacune de ces équations par rapport à x. Pour déterminer OD, résolvons les deux équations simultanément afin de trouver le point d'intersection E. On obtient ainsi le point (1, 1); par suite, $OD = 1$. Donc,

$$A = \int_0^1 \int_y^{y^{\frac{2}{3}}} dxdy = \int_0^1 \left(y^{\frac{2}{3}} - y\right) dy = \left[\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{y^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}. \quad \textit{Réponse.}$$

EXEMPLES

1. Trouver par double intégration l'aire comprise entre la droite OA et la parabole ayant pour sommet O, pour axe OX et passant, comme OA, par le point A (a, b).

Rép. $\int_0^a \int_{\frac{bx}{a}}^{b\sqrt{\frac{x}{a}}} dydx = \frac{ab}{6}$.

2. Trouver par double intégration l'aire comprise entre les deux paraboles

$3y^2 = 25x$ et $5x^2 = 9y$. *Rép.* 5.

3. On demande l'aire qui se trouve comprise dans le premier quadrant, entre la parabole $y^2 = ax$ et le cercle $y^2 = 2ax - x^2$.

Rép. $\frac{\pi a^2}{4} - \frac{2a^2}{3}$.

4. Résoudre les problèmes 2 et 3 en sommant d'abord tous les éléments sui-

vant une petite bande horizontale de surface et ensuite en additionnant toutes les bandes horizontales.

Rép. Ex. 2, $\int_0^5 \int_{\frac{3y^2}{25}}^{3\sqrt{\frac{y}{5}}} dxdy = 5$. Ex. 3, $\int_0^a \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{y^2}{a}} dxdy = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{2a^2}{3}$.

5. Trouver par double intégration les aires limitées par les lieux géométriques ci-après :

(*a*) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, $x + y = a$. *Rép.* $\frac{a^2}{3}$.

(*b*) $y^2 = 9 + x$, $y^2 = 9 - 3x$. 48.

(*c*) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$. $\sqrt{2} - 1$.

(*d*) $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, $2y = x$, $x = 0$. $a^2(\pi - 1)$.

(*e*) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x + y = a$. $\frac{a^2}{2} - \frac{3\pi a^2}{32}$.

(*f*) $y^2 = x + 4$, $y^2 = 4 - 2x$.

(*g*) $y^2 = 4a^2 - x^2$, $y^2 = 4a^2 - 4ax$.

(*h*) $x^2 + y^2 = 25$, $27y^2 = 16x^3$.

(*i*) $4y^2 = x^3$, $y = x$.

(*j*) $y^2 = ax$, $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

(*k*) $x^2 - y^2 = 14$, $x^2 + y^2 = 36$.

220. L'aire plane considérée comme une intégrale double définie. Coordonnées polaires. — Supposons que les équations de la courbe ou des courbes qui limitent la région S soient données en coordonnées polaires (*fig.* 251). La région peut alors être divisée en carreaux limités par des lignes radiales menées par l'origine et par des cercles concentriques ayant leurs centres à l'origine. Posons $PS = \Delta\rho$ et angle $POR = \Delta\theta$. Alors arc $PR = \rho\Delta\theta$ et la surface du carré ombré, considéré comme un rectangle, est $\rho\Delta\theta \cdot \Delta\rho$. La somme des aires de tous les carreaux de la région est

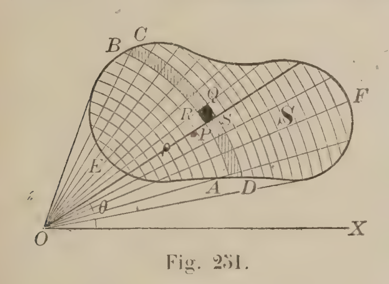


Fig. 251.

$$\sum \rho\Delta\rho \cdot \Delta\theta.$$

Comme l'aire cherchée est évidemment la limite de cette somme, nous avons la formule

$$\text{(A)} \qquad \mathbf{A} = \iint_S \rho d\rho \cdot d\theta.$$

Ici, encore, la sommation (intégration) peut être effectuée de deux manières.

Quand nous intégrons d'abord par rapport à θ, ρ restant constant, cela signifie que nous additionnons tous les éléments (carreaux) contenus dans un segment d'un anneau circulaire (tel que ABCD) et en intégrant ensuite, par rapport à ρ, que nous additionnons tous les anneaux contenus dans la région entière. Les limites se présentent dès lors comme il suit :

(B) $$A = \int_{OE}^{OF} \int_{\text{angle XOA}}^{\text{angle XOB}} \rho\, d\theta\, d\rho,$$

les angles XOA et XOB étant généralement des fonctions de ρ, et OE et OF des constantes donnant les valeurs extrêmes de ρ.

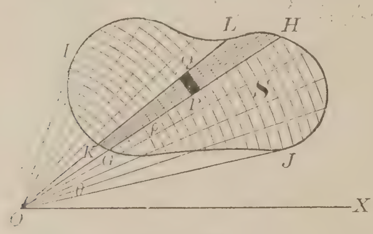


Fig. 252.

Supposons, maintenant, que nous renversions l'ordre d'intégration. Intégrer d'abord par rapport à ρ, θ restant constant, revient à additionner tous les éléments (carreaux) contenus dans une petite bande en forme de coin (telle que GKLH). Intégrer ensuite, par rapport à θ, revient à additionner toutes les petites bandes contenues dans la région S (*fig.* 252). Ici,

(C) $$A = \int_{\text{angle XOJ}}^{\text{angle XOI}} \int_{OG}^{OH} \rho\, d\rho \cdot d\theta,$$

OH et OG étant généralement des fonctions de θ, et les angles XOJ et XOI étant des constantes donnant les valeurs extrêmes de θ.

Correspondant aux deux ordres de sommation (intégration), la notation et les figures ci-après (*fig.* 253 et 254) peuvent être commodément employées :

(D) $$A = \iint_S \rho\, d\rho \cdot d\theta, \qquad A = \iint_S \rho\, d\theta \cdot d\rho.$$

Fig. 253.

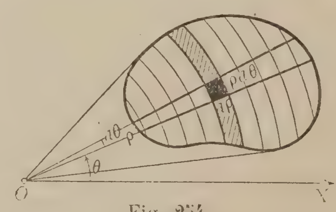


Fig. 254.

On se souviendra facilement de ces formules, si nous considérons les éléments (carreaux) de l'aire cherchée, comme étant des rectangles de dimensions $\rho d\theta$ et $d\rho$, et par suite d'aire $\rho d\theta \cdot d\rho$.

Exemple. — Trouver l'aire du cercle $\rho = 2r \cos \theta$ par double intégration (*fig.* 255).

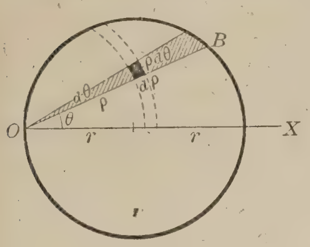


Fig. 255.

Solution. En additionnant tous les éléments contenus dans un secteur (tel que OB), les limites sont 0 et $2r \cos \theta$; et en additionnant tous ces secteurs, les limites sont 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour le demi-cercle OXB. En substituant dans (D) il vient

$$\frac{A}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2r\cos\theta} \rho d\rho \cdot d\theta = \frac{\pi r^2}{2},$$

ou $A = \pi r^2$. *Réponse.*

EXEMPLES

1. Dans l'exemple ci-dessus, trouver l'aire en intégrant par rapport à θ.

2. Trouver par double intégration l'aire entière dans les exemples 1-16, pp. 426, 427.

3. Trouver par double intégration l'aire de la partie de la parabole $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ interceptée entre la courbe et la perpendiculaire à l'axe qui a pour abscisse le paramètre.

Rép. $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\sec^2\frac{\theta}{2}} \rho d\rho \cdot d\theta = \frac{8a^2}{3}$.

4. Trouver par double intégration l'aire comprise entre les deux cercles $\rho = a \cos \theta$, $\rho = b \cos \theta$, $b > a$; intégrer d'abord par rapport à ρ.

Rép. $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta} \rho d\rho \cdot d\theta = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2)$.

5. Résoudre le problème précédent en intégrant d'abord par rapport à θ.

6. Trouver par double intégration l'aire limitée par les lieux géométriques ci-après :

(*a*) $\rho = 6 \sin \theta$, $\rho = 12 \sin \theta$. *Rép.* 27π.

(*b*) $\rho \cos \theta = 4$, $\rho = 8$. $\frac{64\pi}{3} - 16\sqrt{3}$.

(*c*) $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$, $\rho = 2a$. $2a^2\pi - \frac{8a^2}{3}$.

(*d*) $\rho = a(1 + \cos \theta)$, $\rho = 2a \cos \theta$. $\frac{\pi a^2}{2}$.

(*e*) $\rho \sin \theta = 5$, $\rho = 10$.

(*f*) $\rho = 8 \cos \theta$, $\rho \cos \theta = 2$.

(*g*) $\rho = 2 \cos \theta$, $\rho = 8 \cos \theta$.

221. Moment d'aire. — Considérons un élément d'aire de la région S, tel que PQ (*fig.* 256), les coordonnées de P étant (x, y). En multipliant l'aire de cet élément $(= \Delta y \Delta x)$ par la distance de P à l'axe des $Y (= x)$, nous obtenons le produit

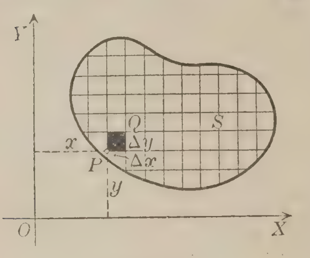


Fig. 256.

(A) $$x \Delta y \Delta x,$$

qui est appelé le *moment* de l'élément PQ par rapport à l'axe des Y. Formons un produit semblable pour chacun des éléments de la région S et additionnons tous ces produits par une double sommation. Alors, la limite de cette somme, savoir

(B) $$\lim_{\substack{\Delta y = 0 \\ \Delta x = 0}} \sum \sum x \Delta y \Delta x = \iint x dy dx.$$

définit le moment d'aire de la région S *par rapport à l'axe des* y.

En désignant ce moment par M_y, nous obtenons

(C) $$M_y = \iint x dy dx,$$

les limites d'intégration étant déterminées de la même manière que pour trouver l'aire.

De même, si nous désignons par M_x le moment d'aire par rapport à l'axe des x, nous obtenons

(D) $$M_x = \iint y dy dx (*),$$

les limites étant les mêmes que pour (C).

222. Centre d'aire. — Le centre d'aire est défini comme étant le point $(\bar{x}, \bar{y})$ donné par les formules

(E) $$\bar{x} = \frac{M_y}{\text{aire}}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{\text{aire}},$$

(*) D'après le résultat de la page 465, nous pouvons dire que M_x est la valeur de l'intégrale double de la fonction $f(x, y) = y$ prise dans l'étendue de la région. De même, M_y est la valeur quand $f(x, y) = x$.

ou

$$\text{(F)} \qquad \bar{x} = \frac{\iint x\,dy\,dx}{\iint dy\,dx}, \qquad \bar{y} = \frac{\iint y\,dy\,dx}{\iint dy\,dx}.$$

D'après (E), aire $\cdot \bar{x} = M_y$ et aire $\cdot \bar{y} = M_x$.

Par suite, *si nous supposons que l'aire d'une région est concentrée en* $(\bar{x}, \bar{y})$, *les moments d'aire par rapport aux axes de coordonnées demeurent invariables.*

Le centre d'aire d'un plateau homogène mince ou lame se confond avec son *centre de masse* (ou *centre de gravité*) (*).

Si un axe de coordonnées est un axe de symétrie de l'aire, il est évident que la coordonnée correspondante du centre d'aire est nulle.

En coordonnées polaires $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, et l'élément d'aire $= \rho \Delta\rho \Delta\theta$ remplace $\Delta y \Delta x$. Par suite, les formules (F) deviennent

$$\text{(G)} \qquad \bar{x} = \frac{\iint \rho^2 \cos \theta\, d\rho\, d\theta}{\iint \rho\, d\rho\, d\theta}, \qquad \bar{y} = \frac{\iint \rho^2 \sin \theta\, d\rho\, d\theta}{\iint \rho\, d\rho\, d\theta},$$

les limites étant les mêmes et déterminées (comme précédemment) de la même façon que pour trouver l'aire.

Exemple. — Trouver le centre de l'aire limitée par $y^2 = 4x$, $x = 4$, $y = 0$ et située au-dessus de OX (*fig.* 257).

Solution. D'après (C), p. 474,

$$M_y = \int_0^4 \int_0^{2x^{\frac{1}{2}}} x\,dy\,dx = \frac{128}{5}.$$

D'après (D), p. 474,

$$M_x = \int_0^4 \int_0^{2x^{\frac{1}{2}}} y\,dy\,dx = 16.$$

$$\text{Aire} = \int_0^4 \int_0^{2x^{\frac{1}{2}}} dy\,dx = \frac{32}{3}.$$

Fig. 257.

En substituant dans (E), p. 474, il vient

$$\bar{x} = \frac{128}{5} : \frac{32}{3} = \frac{12}{5} \quad \text{et} \quad \bar{y} = 16 : \frac{32}{3} = \frac{3}{2}. \quad \textit{Rép.}$$

(*) Si le plateau est supporté librement par un axe horizontal passant par son centre de gravité, il n'aura aucune tendance à tourner, quelle que soit la position du plateau.

EXEMPLES

1. Trouver les centres des aires limitées par les lieux géométriques ci-après :

(a) le quadrant d'un cercle. *Rép.* $\bar{x} = \frac{4r}{3\pi} = \bar{y}$.

(b) le quadrant d'une ellipse. $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$, $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$.

(c) $y = \sin x$, $y = 0$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$. $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$, $\bar{y} = \frac{\pi}{8}$.

(d) un quadrant de $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $\bar{x} = \frac{256a}{315\pi} = \bar{y}$.

(e) $y^2 = 4ax$, $x = h$. $\bar{x} = \frac{3}{5}h$, $y = 0$.

(f) $y = 2x$, $y = 0$, $x = 3$. $\bar{x} = 2 = \bar{y}$.

(g) $y^2 = 8x$, $y = 0$, $y + x = 6$. $\bar{x} = 2{,}48$, $\bar{y} = 1{,}4$.

(h) $(2a - x)y^2 = x^3$, $x = 2a$. $\bar{x} = \frac{5a}{3}$, $\bar{y} = 0$.

(i) $y^2(a^2 - x^2) = a^4$, $x = 0$. $\bar{x} = \frac{2a}{\pi}$, $\bar{y} = 0$.

(j) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, $x = 0$, $y = 0$. $\bar{x} = \frac{a}{5} = \bar{y}$.

(k) Cycloïde $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$. $\bar{x} = a\pi$, $\bar{y} = \frac{5a}{6}$.

2. Trouver les centres des aires limitées par les courbes ci-après :

(a) Une boucle de $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. *Rép.* $\bar{x} = \frac{\pi\sqrt{2}a}{8}$, $\bar{y} = 0$.

(b) Une boucle de $\rho = a \sin 2\theta$. $\bar{x} = \frac{128a}{105\pi} = \bar{y}$.

(c) Cardioïde $\rho = a(1 + \cos\theta)$. $\bar{x} = \frac{5a}{6}$, $\bar{y} = 0$.

(d) $\rho = 6 \sin\theta$, $\rho = 12 \sin\theta$.

(e) $\rho \cos\theta = 4$, $\rho = 8$.

(f) $\rho = 8 \cos\theta$, $\rho \cos\theta = 2$.

(g) $\rho = 2 \cos\theta$, $\rho = 8 \cos\theta$.

223. Moment d'inertie des aires planes. — Considérons un élément d'aire de la région S, tel que PQ (*fig.* 258), les coordonnées de P étant (x, y). En multipliant l'aire de cet élément $(= \Delta y \Delta x)$ par le *carré* de la distance $(= x)$ de P à l'axe des y, nous obtenons le produit

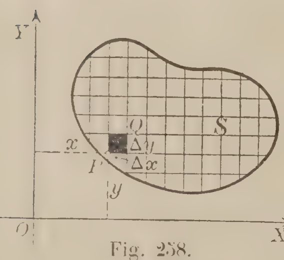


Fig. 258.

(A) $$x^2 \Delta y \Delta x,$$

qui est appelé le *moment d'inertie* (*) de l'élément PQ par rapport à l'axe des y.

(*) Parce que l'élément d'aire est multiplié par le *carré* de sa distance à l'axe des y, il est quel-

Formons un produit semblable pour chacun des éléments de la région et additionnons tous ces produits par une double sommation. Alors, la limite de cette somme, savoir :

$$\text{(B)} \qquad \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0}} \sum\sum x^2 \Delta y \Delta x = \iint x^2 dy dx,$$

définit le moment d'inertie de l'aire de S par rapport à l'axe des y.

En désignant ce moment par I_y, nous obtenons

$$\text{(C)} \qquad I_y = \iint x^2 dy dx,$$

les limites d'intégration étant déterminées de la même façon que pour trouver l'aire.

De même, si nous désignons par I_x *le moment d'inertie de l'aire par rapport à l'axe des* x, nous obtenons

$$\text{(D)} \qquad I_x = \iint y^2 dy dx,$$

les limites étant les mêmes que pour (C).

224. Moment d'inertie polaire. Coordonnées rectangulaires. — Considérons un élément d'aire de la région S, tel que PQ (*fig.* 259). Si les coordonnées de P sont (x, y), la distance de P au point O est $\sqrt{x^2+y^2}$. En multipliant l'aire de l'élément $(= \Delta y \Delta x)$ par le carré de la distance de P à l'origine, nous avons le produit

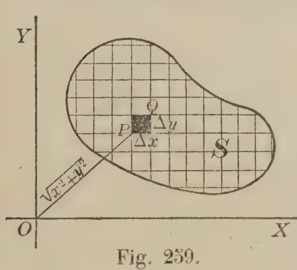


Fig. 259.

$$(x^2 + y^2)\Delta y \Delta x,$$

qui est appelé le *moment d'inertie polaire* de l'élément PQ par rapport à l'origine. La valeur de la double somme

$$\text{(E)} \qquad \lim_{\substack{\Delta y = 0 \\ \Delta x = 0}} \sum\sum (x^2+y^2)\Delta y \Delta x = \iint (x^2+y^2) dy dx$$

définit le moment d'inertie polaire de l'aire de la région S *par rapport à l'origine.*

---

quefois appelé le *second moment*, en conformité avec la définition du moment d'aire (§ 221, p. 474).

En désignant ce moment d'inertie par I_0, nous obtenons

(F) $$I_0 = \iint (x^2 + y^2) dy dx \text{ (*)},$$

les limites d'intégration étant déterminées de la même façon que pour trouver l'aire.

D'après (F),

$$I_0 = \iint (x^2 + y^2) dy dx = \iint x^2 dy dx + \iint y^2 dy dx.$$

Par comparaison avec (C) et (D), nous obtenons

(G) $$I_0 = I_x + I_y,$$

d'où le théorème suivant :

Théorème. — *Le moment d'inertie polaire d'une aire plane par rapport à un point quelconque est égal à la somme de ses moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires quelconques passant par ce point.*

225. Moment d'inertie polaire. Coordonnées polaires. — Comme l'élément d'aire est alors $\rho \Delta\rho \Delta\theta$ et que $x^2 + y^2 = \rho^2$, nous obtenons par substitution dans (E),

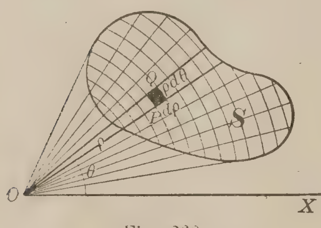


Fig. 260.

(H) $$I_0 = \iint \rho^3 d\rho d\theta,$$

les limites d'intégration étant les mêmes que pour trouver l'aire.

Puisque l'élément d'aire $(= \Delta y \Delta x = \rho \Delta\rho \Delta\theta)$ est essentiellement positif et que x^2, y^2, ρ^2 sont toujours positifs, il en résulte que le moment d'inertie n'est jamais nul, mais toujours un nombre positif. Les moments d'inertie se présentent fréquemment dans les problèmes du génie, la principale application étant le calcul de l'énergie d'un corps qui tourne.

EXEMPLES

1. Trouver I_0 pour la surface limitée par les lignes $x = a$, $y = 0$, $y = \frac{b}{a} x$ (*fig.* 261).

(*) Nous pouvons alors dire que I_0 est la valeur de l'intégrale double de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ prise dans l'étendue de l'aire.

Solution. Ces lignes déterminent un triangle OAB.

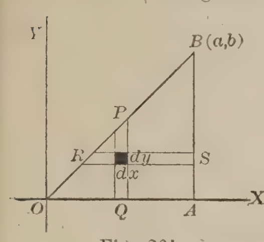


Fig. 261.

En additionnant tous les éléments contenus dans une bande verticale (telle que PQ), les limites de y sont 0 et $\frac{b}{a}x$ (trouvées d'après l'équation de la ligne OB). En additionnant toutes ces bandes à l'intérieur de la région (triangle), les limites de x sont zéro et $a(=\text{OA})$. Par suite, d'après (F),

$$I_0 = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} (x^2+y^2)dydx = ab\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{12}\right). \text{ *Réponse.*}$$

Si nous supposons le triangle composé de bandes horizontales (telles que RS)

$$I_0 = \int_0^b \int_{\frac{ay}{b}}^a (x^2+y^2)dxdy = ab\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{12}\right). \text{ *Réponse.*}$$

2. Trouver I_0 pour le rectangle limité par les lignes $x=a$, $y=b$ et les axes de coordonnées.

$$\textit{Rép.} \int_0^a \int_0^b (x^2+y^2)dydx = \frac{a^3b+ab^3}{3}.$$

3. Trouver I_0 pour le triangle rectangle formé par les axes de coordonnées et la ligne joignant les points $(a, 0)$, $(0, b)$.

$$\textit{Rép.} \int_0^a \int_0^{\frac{b(a-x)}{a}} (x^2+y^2)dydx = \frac{ab(a^2+b^2)}{12}.$$

4. Trouver I_x pour la région comprise à l'intérieur du cercle $x^2+y^2=r^2$.

Rép. $\frac{\pi r^4}{4}$.

5. Trouver I_y pour l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *Rép.* $\frac{\pi a^3 b}{4}$.

6. Trouver I_0 pour la région comprise entre la ligne droite OA et une parabole ayant pour sommet O, pour axe OX, et passant, comme OA, par le point A (a, b).

$$\textit{Rép.} \int_0^a \int_{\frac{bx}{a}}^{b\sqrt{\frac{x}{a}}} (x^2+y^2)dydx = \frac{ab}{4}\left(\frac{a^2}{7}+\frac{b^2}{5}\right).$$

7. Trouver I_0 pour la région limitée par la parabole $y^2=4ax$, la ligne $x+y-3a=0$ et OX.

$$\textit{Rép.} \int_0^a \int_0^{2\sqrt{ax}} (x^2+y^2)dydx + \int_a^{3a} \int_0^{3a-x} (x^2+y^2)dydx = \frac{314a^4}{35},$$

$$\text{ou} \int_0^{2a} \int_{y^2}^{3a-y} (x^2+y^2)dxdy = \frac{314a^4}{35}.$$

8. Trouver I_0 pour la région limitée par le cercle $\rho = 2r\cos\theta$ (*fig.* 262).

Solution. En additionnant les éléments compris dans la bande de forme triangulaire OP, les limites de ρ sont zéro et $2r\cos\theta$ (trouvées d'après l'équation du cercle).

En additionnant toutes ces bandes, les limites de θ sont $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Par suite, d'après (H),

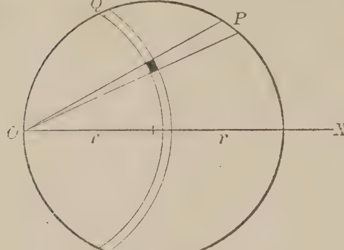


Fig. 262.

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2r\cos\theta} \rho^3 d\rho d\theta = \frac{3\pi r^4}{2}. \quad \textit{Réponse.}$$

En additionnant d'abord les éléments contenus dans une bande circulaire (telle que QR), nous avons

$$I_0 = \int_0^{2r} \int_{-\arccos\frac{\rho}{2r}}^{\arccos\frac{\rho}{2r}} \rho^3 d\theta d\rho = \frac{3\pi r^4}{2}. \quad \textit{Réponse.}$$

9. Trouver I_0 pour l'aire limitée par la parabole $\rho = a\sec^2\frac{\theta}{2}$, la perpendiculaire à l'axe qui a pour abscisse le paramètre et l'axe polaire OX.

$$\textit{Rép.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\sec^2\frac{\theta}{2}} \rho^3 d\rho d\theta = \frac{48a^4}{35}.$$

10. Trouver I_0 pour l'aire entière de la cardioïde $\rho = a(1-\cos\theta)$.

$$\textit{Rép.}\ 2\int_0^{\pi} \int_0^{a(1-\cos\theta)} \rho^3 d\rho d\theta = \frac{35\pi a^4}{16}.$$

11. Trouver I_0 pour la lemniscate $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$. *Rép.* $\frac{\pi a^4}{8}$.

12. Trouver I_x et I_y pour l'aire limitée par $y^2 = 4ax$, $y = 0$ et $x = x_1$.

$$\textit{Rép.}\ I_x = \frac{2x_1y_1^3}{15}, \quad I_y = \frac{2x_1^3y_1}{7}.$$

13. Trouver le moment d'inertie de l'aire d'un triangle rectangle par rapport au sommet de l'angle droit, a et b étant les longueurs des côtés de l'angle droit.

Rép. $\frac{ab}{12}(a^2+b^2)$.

14. Trouver I_y pour l'aire limitée par $y^2 = 4ax$, $x + y = 3a$, $y = 0$.

Rép. $I_y = \frac{46}{7}a^4$.

15. Trouver le moment d'inertie d'un rectangle dont les côtés sont $2a$, $2b$, par rapport à un axe passant par son centre parallèlement au côté $2b$; au côté $2a$.

Rép. $\frac{a^3b}{3}$; $\frac{ab^3}{3}$.

16. Trouver I_x pour $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Rép.* $\frac{21}{512}\pi a^4$.

17. Trouver I_0 pour l'aire d'une boucle de $\rho = a\cos 2\theta$.

226. Méthode générale pour trouver les aires des surfaces. — La méthode donnée au § 213 pour trouver l'aire d'une surface

s'applique seulement aux surfaces de révolution. Nous allons maintenant donner une méthode plus générale. Soit

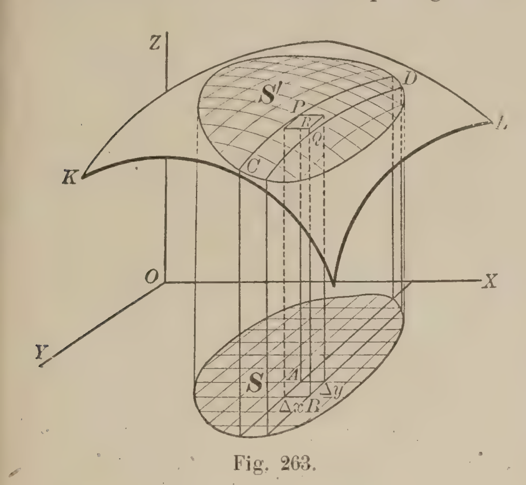


Fig. 263.

(A) $z = f(x, y)$

l'équation de la surface KL dans la figure 263 et supposons qu'il soit demandé de calculer l'aire de la région S' se trouvant sur cette surface.

Désignons par S la région du plan XOY qui est la projection orthogonale de S' sur ce plan. Maintenant, faisons passer des plans parallèlement à YOZ et XOZ aux distances respectives Δx et Δy. Comme au § 217, ces plans forment des prismes tronqués (tels que PB) limités au sommet par une portion (telle que PQ) de la surface donnée dont la projection sur le plan XOY est un rectangle d'aire $\Delta x \Delta y$ (tel que AB), lequel forme également la base inférieure du prisme, les coordonnées de P étant (x, y, z).

Considérons maintenant le plan tangent en P à la surface KL. Evidemment, le même rectangle AB est la projection sur le plan XOY de cette portion du plan tangent (PR) qui est interceptée par le prisme PB. En supposant que γ soit l'angle que le plan tangent fait avec le plan XOY, nous avons

$$\text{aire AB} = \text{aire PR} \cdot \cos\gamma,$$

[La projection d'une aire plane sur un second plan est égale à l'aire de la portion projetée multipliée par le cosinus de l'angle formé par les deux plans.]

ou $$\Delta x \Delta y = \text{aire PR} \cdot \cos\gamma.$$

Mais, $$\cos\gamma = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}};$$

[Cosinus de l'angle formé par le plan tangent, (72), p. 308, et le plan XOY trouvé par la méthode donnée en géométrie analytique dans l'espace.]

par suite, $$\Delta y \Delta x = \frac{\text{aire PR}}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

ou $$\text{aire PR} = \left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta y \Delta x,$$

que nous prenons comme élément d'aire de la région S′. Nous définirons ensuite l'aire de la région S′ comme

$$\underset{\substack{\Delta y = 0 \\ \Delta x = 0}}{\text{limite}} \sum\sum \left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta y \Delta x,$$

la sommation s'étendant à la région S, comme au § 217. En désignant par A l'aire de la région S′, nous avons

(B) $$A = \iint_S \left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy dx,$$

les limites d'intégration dépendant *de la projection sur le plan* XOY *de la région dont nous voulons déterminer l'aire.* Ainsi pour (B) nous choisirons nos limites d'après la courbe ou les courbes qui limitent la région S dans le plan XOY précisément comme nous l'avons fait dans les quatre paragraphes précédents.

S'il est plus commode de projeter l'aire cherchée sur le plan XOZ, on emploie la formule

(C) $$A = \iint_S \left[\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz dx,$$

dans laquelle les limites sont trouvées d'après la ligne de démarcation de la région S, qui est maintenant la projection de l'aire cherchée sur le plan XOZ.

De même, nous pouvons utiliser

(D) $$A = \iint_S \left[1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz dy,$$

les limites étant trouvées en projetant l'aire cherchée sur le plan YOZ.

Dans certains problèmes, on demande de trouver l'aire d'une portion de surface interceptée par une deuxième surface. En pareil cas, les dérivées partielles cherchées pour la substitution dans la formule

devront être trouvées d'après l'équation de la surface dont l'aire partielle est demandée.

Puisque les limites sont trouvées en projetant l'aire demandée sur un des plans de coordonnées, on doit se souvenir que :

Pour trouver la projection de l'aire cherchée sur le plan XOY, *on élimine z entre les équations des surfaces dont les intersections forment la limite de l'aire.*

De même, on élimine y pour trouver la projection sur le plan XOZ, *et x pour la trouver sur le plan* YOZ.

Cette aire d'une surface donne une illustration nouvelle de l'*intégration d'une fonction dans l'étendue d'une aire donnée.* Ainsi, dans (B), p. 482, nous intégrons la fonction

$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

dans l'étendue de la projection sur le plan XOY de la surface curviligne cherchée.

Exemple I. — Trouver l'aire de la surface de la sphère $x^2+y^2+z^2=r^2$ par double intégration.

Solution. Supposons que ABC dans la figure 264 représente le huitième de la surface de la sphère. Ici,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},$$

et $$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}=\frac{r^2}{r^2-x^2-y^2}.$$

La projection de l'aire cherchée sur le plan XOY est AOB, région limitée par $x=0$, (OB); $y=0$, (OA); $x^2+y^2=r^2$, (BA).

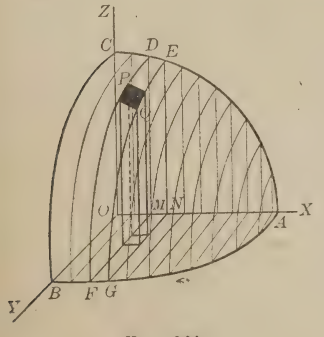


Fig. 264.

En intégrant d'abord par rapport à y, nous additionnons tous les éléments d'une bande (telle que DEFG) qui est projetée sur le plan XOY suivant une bande également (telle que MNFG), c'est-à-dire que les limites de y sont zéro et MF$(=\sqrt{r^2-x^2})$. Alors, en intégrant par rapport à x, nous additionnons toutes les bandes composant la surface ABC, c'est-à-dire que les limites de x sont zéro et OA $(=r)$. En substituant dans (B), nous obtenons

$$\frac{A}{8}=\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{r\,dy\,dx}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\frac{\pi r^2}{2}$$

ou $$A=4\pi r^2.\ \textit{Réponse.}$$

Exemple II. — Le centre d'une sphère de rayon r est sur la surface d'un cylindre

droit dont le rayon de base est $\frac{r}{2}$. Trouver la surface du cylindre interceptée par la sphère (*fig.* 265).

Solution. En prenant l'origine comme centre de la sphère, une génératrice du cylindre pour l'axe des z et un diamètre d'une section droite du cylindre pour l'axe des x, l'équation de la sphère est

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

et celle du cylindre, $\qquad x^2 + y^2 = rx.$

ODAPB est évidemment un quart de la surface cylindrique cherchée. Puisque cette surface se projette suivant l'arc semi-circulaire ODA sur le plan XOY, il n'y a aucune région S dont nous puissions nous servir pour déterminer nos limites dans ce plan ; en conséquence, nous projetterons notre aire sur le plan XOZ, par exemple. Alors, la région S, dans l'étendue de laquelle nous intégrons, est OACB laquelle est limitée par $z = 0$, (OA); $x = 0$, (OB); $z^2 + rx = r^2$, (ACB), la dernière équation étant obtenue en éliminant y entre les équations des deux surfaces. En intégrant d'abord par rapport à z, nous additionnons tous les éléments contenus dans une bande verticale (telle que PD), les limites de z étant zéro et $\sqrt{r^2 - rx}$. En intégrant ensuite par rapport à x, nous additionnons toutes ces bandes, les limites de x étant zéro et r. Puisque la surface demandée se trouve sur le cylindre, les dérivées partielles cherchées pour la formule (C), p. 482, doivent être trouvées d'après l'équation du cylindre.

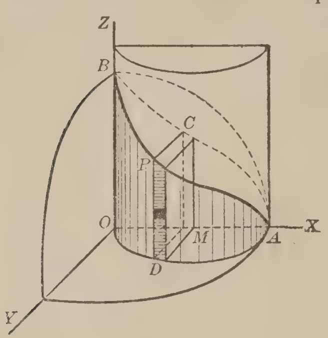


Fig. 265.

Par suite, $\qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r - 2x}{2y}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = 0.$

En substituant dans (C), p. 482, il vient

$$\frac{A}{4} \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \left[1 + \left(\frac{r - 2x}{2y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dzdx.$$

En substituant la valeur de y en fonction de x d'après l'équation du cylindre, nous avons

$$A = 2r \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - rx}} \frac{dzdx}{\sqrt{rx - x^2}} = 2r \int_0^r \frac{\sqrt{r^2 - rx}}{\sqrt{rx - x^2}} dx = 2r \int_0^r \sqrt{\frac{r}{x}}\, dx = 4r^2.$$

EXEMPLES

1. Dans l'exemple précédent trouver la surface de la sphère interceptée par le cylindre.

Rép. $4r \int_0^r \int_0^{\sqrt{rx - x^2}} \frac{dydx}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = 2(\pi - 2)r^2.$

2. Les axes de deux cylindres circulaires droits égaux, de rayon de base r, se coupent à angles droits. Trouver la surface de l'un de ces cylindres interceptée par l'autre.

NOTE. — Prendre $x^2 + z^2 = r^2$ et $x^2 + y^2 = r^2$ comme équations des cylindres.

Rép. $8r \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{dydx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 8r^2.$

3. Trouver par intégration l'aire de la portion de surface de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 100$$

qui se trouve comprise entre les plans parallèles $x = -8$ et $x = 6$.

4. Trouver la surface du cylindre $x^2 + y^2 = r^2$ comprise entre le plan $z = mx$ et le plan XOY. *Rép.* $4r^2m$.

5. Trouver la surface du cylindre $z^2 + (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 = r^2$ qui est située dans le compartiment positif des axes de coordonnées.

NOTE. — L'axe de ce cylindre est la ligne $z = 0$, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0$ et le rayon de base est r.

Rép. $\frac{r^2}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

6. Trouver l'aire de la partie du plan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ qui est interceptée par les plans de coordonnées.

Rép. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$.

7. Trouver l'aire de la surface du paraboloïde $y^2 + z^2 = 4ax$ interceptée par le cylindre parabolique $y^2 = ax$ et le plan $x = 3a$. *Rép.* $\frac{56}{9}\pi a^2$.

8. Dans l'exemple précédent, trouver l'aire de la surface du cylindre interceptée par le paraboloïde et le plan. *Rép.* $(13\sqrt{13} - 1)\frac{a^2}{\sqrt{3}}$.

9. Trouver l'aire de la portion de la surface du cylindre $y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ limitée par une courbe dont la projection sur le plan XY est $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Rép.* $\frac{12}{5}a^2$.

10. Trouver l'aire de la portion de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$ coupée par une nappe du cône $x^2 + z^2 = y^2$. *Rép.* $2\pi a^2$.

227. Volumes trouvés par triple intégration. — Dans beaucoup de cas, le volume d'un solide limité par des surfaces dont les équations sont données peut être calculé au moyen de trois intégrations successives, la méthode étant simplement une extension des méthodes employées dans les paragraphes précédents de ce chapitre.

Supposons que le solide en question soit divisé par des plans menés parallèlement aux plans de coordonnées en parallélépipèdes rectangles ayant les dimensions Δz, Δy, Δx. Le volume d'un de ces parallé-

lépipèdes est $\Delta z \cdot \Delta y \cdot \Delta x$ et nous le choisissons comme élément de volume. Additionnons maintenant tous les éléments compris dans la région R limitée par les surfaces données en additionnant d'abord tous les éléments contenus dans une colonne parallèle à l'un des axes de coordonnées. Additionnons ensuite toutes les colonnes contenues dans une tranche parallèle à l'un des plans de coordonnées contenant cet axe, et, finalement, additionnons toutes les tranches comprises dans la région en question. Le volume V du solide sera alors la limite de cette triple somme quand Δz, Δy et Δx tendent vers zéro, c'est-à-dire que

$$V = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0 \\ \Delta z = 0}} \sum \sum_{R} \sum \Delta z \Delta y \Delta x,$$

les sommations étant étendues à toute la région R limitée par les surfaces données, ou, ce qui revient au même,

$$\mathbf{V} = \iiint_{R} \mathbf{dzdydx},$$

les limites d'intégration dépendant des équations des surfaces de démarcation. Ainsi, par extension du principe du § 218, p. 464, nous dirons que le volume est le résultat de l'intégration de la fonction $f(x, y, z) = 1$ *dans toute l'étendue d'une région donnée.*

Plus généralement, beaucoup de problèmes demandent l'intégration d'une fonction *variable* de x, de y et de z dans toute l'étendue d'une région donnée, ce qu'on exprime par la notation

$$\iiint_{R} f(x, y, z) dz dy dx$$

qui est, bien entendu, la limite d'une triple somme analogue aux doubles sommes que nous avons déjà discutées. La méthode pour évaluer cette intégrale triple est précisément analogue à celle déjà expliquée pour les intégrales doubles au § 218, p. 464.

Exemple I. — Trouver le volume de la portion de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

qui se trouve dans le premier octant (*fig.* 266).

Solution. Soit O — ABC la portion de l'ellipsoïde dont on demande le volume, les équations des surfaces qui le limitent étant

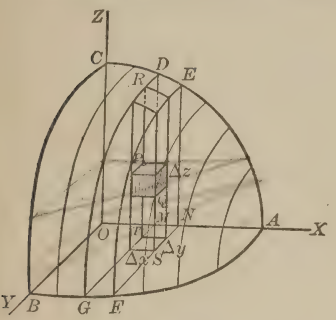


Fig. 266.

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, (ABC),

(2) $z=0$, (OAB),

(3) $y=0$, (OAC),

(4) $x=0$, (OBC).

PQ est un élément, puisque c'est un des parallélépipèdes rectangles de dimensions Δz, Δy, Δx suivant lesquels des plans parallèles aux plans de coordonnées divisent la région.

En intégrant d'abord par rapport à z, nous additionnons tous les éléments contenus dans une colonne (telle que RS), les limites de z étant zéro [d'après (2)] et $TR=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ [d'après (1), en résolvant par rapport à z].

En intégrant ensuite par rapport à y, nous additionnons toutes les colonnes contenues dans une tranche (telle que DEMNGF), les limites de y étant zéro [d'après (3)] et $MG=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ [d'après l'équation de la courbe AGB, savoir $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, en résolvant par rapport à y].

Enfin, en intégrant par rapport à x nous additionnons toutes les tranches contenues dans la région entière O — ABC, les limites de x étant zéro [d'après (4)] et $OA=a$.

Par suite

$$V=\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dzdydx$$

$$=c\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}dydx$$

$$=\frac{\pi cb}{4a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{\pi abc}{6}.$$

Par conséquent, le volume de l'ellipsoïde entier est $\frac{4\pi abc}{3}$.

Exemple II. — Trouver le volume du solide compris entre

le paraboloïde de révolution $x^2+y^2=az$,

le cylindre $x^2+y^2=2ax$,

et le plan $z=0$.

Solution. Les limites de z (*fig.* 267) sont zéro et NP $\left(=\frac{x^2+y^2}{a}\right.$, trouvé en résolvant l'équation du paraboloïde par rapport à z).

Les limites de y sont zéro et MN$(=\sqrt{2ax-x^2}$, trouvé en résolvant l'équation du cylindre par rapport à y).

Les limites de x sont zéro et OA$(=2a)$.

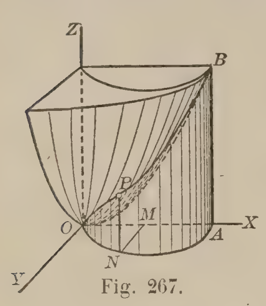


Fig. 267.

Les limites ci-dessus s'appliquent au solide ONAB, qui est la moitié du solide dont on cherche le volume.

Par suite,

$$\frac{V}{2}=\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\int_0^{\frac{x^2+y^2}{a}} dzdydx=\frac{3\pi a^3}{4}.$$

Donc

$$V=\frac{3\pi a^3}{2}.$$

EXEMPLES

1. Trouver, par triple intégration, le volume de la sphère $x^2+y^2+z^2=r^2$.
Rép. $\frac{4\pi r^3}{3}$.

2. Trouver le volume de l'un des deux coins enlevés du cylindre $x^2+y^2=r^2$ par les plans $z=0$ et $z=mx$. *Rép.* $2\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_0^{mx} dzdydx=\frac{2r^3m}{3}$.

3. Trouver le volume d'un cylindre elliptique droit dont l'axe coïncide avec l'axe des x et dont la hauteur est $2a$, l'équation de la base étant $c^2y^2+b^2z^2=b^2c^2$.

Rép. $8\int_0^a\int_0^b\int_0^{\frac{c}{b}\sqrt{b^2-y^2}} dzdydx=2\pi abc$.

4. Trouver le volume entier limité par la surface $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{2}}=1$ et les plans de coordonnées.
Rép. $\frac{abc}{90}$.

5. Trouver le volume entier limité par la surface $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.
Rép. $\frac{4\pi a^3}{35}$.

6. Trouver le volume découpé dans une sphère de rayon a par un cylindre circulaire droit de rayon de base b et dont l'axe passe par le centre de la sphère.
Rép. $\frac{4\pi}{3}\left[a^3-(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}\right]$.

7. Trouver par triple intégration le volume du solide limité par les plans $x=a$, $y=b$, $z=mx$ et les plans de coordonnées XOY et XOZ. *Rép.* $\frac{1}{2}mba^2$.

8. Le centre d'une sphère de rayon r est sur la surface d'un cylindre circulaire droit dont le rayon de la base est $\frac{r}{2}$. Trouver le volume de la portion du cylindre interceptée par la sphère.
Rép. $\frac{2}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)r^3$.

9. Trouver le volume limité par le paraboloïde hyperbolique $cz = xy$, le plan XOY et les plans $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$. *Rép.* $\frac{(a_2^2 - a_1^2)(b_2^2 - b_1^2)}{4c}$.

10. Trouver le volume commun aux deux cylindres $x^2 + y^2 = r^2$ et $x^2 + z^2 = r^2$. *Rép.* $\frac{16r^3}{3}$.

11. Trouver le volume du tétraèdre limité par les plans de coordonnées et le plan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. *Rép.* $\frac{1}{6}abc$.

12. Trouver le volume limité par le paraboloïde $x^2 + y^2 - z = 1$ et le plan XY. *Rép.* $\frac{\pi}{2}$.

13. Trouver le volume commun au paraboloïde $y^2 + z^2 = 4ax$ et au cylindre $x^2 + y^2 = 2ax$. *Rép.* $2\pi a^3 + \frac{16}{3}a^3$.

14. Trouver le volume compris entre le paraboloïde $y^2 + z^2 = 4ax$, le cylindre parabolique $y^2 = ax$ et le plan $x = 3a$. *Rép.* $(6\pi + 9\sqrt{3})a^3$.

15. Trouver le volume entier à l'intérieur de la surface $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

16. Calculer le volume d'une colonne cylindrique reposant sur la surface commune aux deux paraboles $x = y^2$, $y = x^2$ comme base et découpée par la surface $z = 12 + y - x^2$.

17. Trouver le volume limité par les surfaces $y^2 = x + 1$, $y^2 = -x + 1$, $z = -2$, $z = x + 4$.

18. Trouver le volume limité par $z = x^2 + 2y^2$, $x + y = 1$ et les plans de coordonnées.

19. Étant donné un cylindre circulaire droit de hauteur a et de rayon de base r, par un diamètre de la base supérieure passent deux plans qui touchent la base inférieure sur les côtés opposés. Trouver le volume du cylindre compris entre ces deux plans. *Rép.* $\left(\pi - \frac{4}{3}\right)ar^2$.

CHAPITRE XXX

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES (*)

228. Équations différentielles. Ordre et degré. — Une équation différentielle est une équation comprenant des dérivées ou des différentielles. Des équations différentielles ont été fréquemment employées dans cet ouvrage ; celles qui suivent en sont des exemples :

(1) $$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$ Ex., p. 171

(2) $$\left(3a\frac{dy}{dx} + 2\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left(a\frac{dy}{dx} + 1\right)\frac{dy}{dx}.$$

(3) $$\operatorname{tg}\psi \frac{d\rho}{d\theta} = \rho.$$ (A), p. 94

(4) $$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(2x - 1).$$ Ex. 1, p. 113

(5) $$dy = \frac{b^2x}{a^2y}dx.$$ Ex. 2, p. 157

(6) $$d\rho = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{\rho}d\theta.$$ Ex. 3, p. 157

(7) $$d^2y = (20x^3 - 12x)dx^2.$$ Ex., p. 158

(8) $$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 5u.$$ Ex. 7, p. 223

(9) $$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial x}.$$ Ex. 8, p. 236

(10) $$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)u.$$ Ex. 7, p. 236

En fait, tout le chapitre XI dans le calcul différentiel et tout le chapitre XXIII dans le calcul intégral, traitent des équations différentielles.

(*) Un petit nombre d'équations différentielles seulement sont considérées dans ce chapitre, à savoir celles que le lecteur est appelé à rencontrer dans des ouvrages élémentaires de Mécanique et de Physique.

Une *équation différentielle ordinaire* comprend seulement une variable indépendante. Les sept premiers des exemples ci-dessus sont des équations différentielles ordinaires.

Une *équation différentielle partielle* comprend plus d'une variable indépendante, telles sont les équations (8), (9) et (10). Dans ce chapitre, nous nous occuperons seulement des équations différentielles ordinaires.

L'*ordre* d'une équation différentielle est celui de la plus haute dérivée (ou différentielle) qu'elle comprend. Ainsi (3), (5), (6), (8) sont du *premier ordre;* (1), (4), (7) sont du *second ordre* et (2), (10) sont du *troisième ordre.*

Le *degré* d'une équation différentielle qui a des dérivées (ou différentielles) algébriques est la puissance de la plus haute dérivée (ou différentielle) qu'elle contient quand l'équation n'a plus de radicaux ni de fractions. Ainsi, tous les exemples donnés ci-dessus sont des équations différentielles du *premier degré,* excepté (2) qui est du *second degré.*

229. Solutions des équations différentielles. Constantes d'intégration. — Une *solution* ou *intégrale* d'une équation différentielle est une relation entre les variables comprises dans cette équation et d'après laquelle l'équation est satisfaite identiquement. Ainsi

(A) $$y = c_1 \sin x$$

est une solution de l'équation différentielle

(B) $$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Car, en différentiant (A), il vient

(C) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -c_1 \sin x.$$

Si maintenant, nous substituons (A) et (C) dans (B), nous obtenons

$$-c_1 \sin x + c_1 \sin x = 0,$$

relation qui montre que (A) satisfait (B) identiquement. Ici c_1 est une constante arbitraire. On peut montrer de la même façon que

(D) $$y = c_2 \cos x$$

est une solution de (B) pour une valeur quelconque de c_2. La relation

$$\text{(E)} \qquad y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

est encore une solution plus générale de (B). En effet, en donnant des valeurs particulières à c_1 et à c_2, on voit que la solution (E) comprend les solutions (A) et (D).

Les constantes arbitraires c_1 et c_2 qui apparaissent dans ces solutions sont appelées *constantes d'intégration*. Une solution telle que (E) qui contient un nombre de constantes essentiellement arbitraires égal à l'ordre de l'équation (deux, dans ce cas) est appelée *solution générale* ou *intégrale complète* (*). Les solutions que l'on obtient en donnant des valeurs particulières aux constantes sont appelées *solutions particulières* ou *intégrales particulières*.

La solution d'une équation différentielle est considérée comme ayant été effectuée quand elle a été réduite à une expression comprenant des intégrales, que les intégrations réelles puissent être effectuées ou non.

230. Vérification des solutions des équations différentielles. — Avant d'aborder le problème de résolution des équations différentielles, il est préférable que le lecteur soit familiarisé d'une façon plus approfondie avec ce qu'il faut entendre par la solution d'une équation différentielle en vérifiant un certain nombre de solutions données.

EXEMPLE. — Montrer que

$$(1) \qquad y = c_1 x \cos \log x + c_2 x \sin \log x + x \log x$$

est une solution de l'équation différentielle

$$(2) \qquad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = x \log x.$$

Solution. En différentiant (1) nous obtenons

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = (c_2 - c_1) \sin \log x + (c_2 + c_1) \cos \log x + \log x + 1.$$

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -(c_2 + c_1)\frac{\sin \log x}{x} + (c_2 - c_1)\frac{\cos \log x}{x} + \frac{1}{x}.$$

En substituant (1), (3), (4) dans (2), nous trouvons que l'équation est satisfaite identiquement.

(*) On montre dans les ouvrages sur les équations différentielles que la solution générale a n constantes arbitraires quand l'équation différentielle est du n^e ordre.

EXEMPLES

Vérifier les solutions suivantes des équations différentielles correspondantes :

	Équations différentielles.	*Solutions.*
1.	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} + y = 0.$	$y = cx + c - c^2.$
2.	$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$	$y^2 = 2cx + c^2.$
3.	$xy\left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = (x^2 - y^2 - a^2)\frac{dy}{dx}.$	$y^2 - cx^2 + \frac{a^2c}{1+c} = 0.$
4.	$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{3}{x}\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$	$y = c_1x + \frac{c_2}{x} + c_3.$
5.	$\frac{d^2y}{dx^2} - 2k\frac{dy}{dx} + k^2y = e^x.$	$y = (c_1 + c_2x)e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}.$
6.	$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 0.$	$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)e^x.$
7.	$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + 5y = \frac{1}{x}.$	$4y = \frac{1}{3x} + c_1x^5 + c_2x.$
8.	$x\frac{dy}{dx} - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0.$	$\text{arc sin}\,\frac{y}{x} = c - x.$
9.	$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$	$y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}.$
10.	$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$	$y = c_1e^{a\,\text{arc sin}\,x} + c_2e^{-a\,\text{arc sin}\,x}.$
11.	$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0.$	$y = \frac{c_1}{x} + c_2.$

231. Équations différentielles du premier ordre et du premier degré. — Une telle équation peut être ramenée à la forme $Mdx + Ndy = 0$, dans laquelle M et N sont des fonctions de x et de y. Les équations différentielles qui rentrent dans cette catégorie peuvent être divisées suivant les types ci-après :

Type I. Variables séparables. — Quand les termes d'une équation différentielle peuvent être arrangés de façon qu'elle prenne la forme

$$\text{(A)} \qquad f(x)dx + F(y)dy = 0,$$

où $f(x)$ est une fonction de x seulement et $F(y)$ une fonction de y seulement, la méthode est appelée *séparation des variables* et la solu-

tion est obtenue par intégration directe. Ainsi, en intégrant (A), nous obtenons la solution générale

$$\text{(B)} \qquad \int f(x)dx + \int F(y)dy = c,$$

dans laquelle c est une constante arbitraire. Des équations qui ne sont pas données sous la forme simple (A) peuvent souvent être ramenées à cette forme au moyen de la *règle suivante pour séparer les variables :*

1[re] *opération. Chasser les dénominateurs des fractions et si l'équation comprend des dérivées, multiplier par la différentielle de la variable indépendante.*

2[e] *opération. Réunir tous les termes contenant la même différentielle en un seul terme. Si, alors, l'équation prend la forme*

$$XYdx + X'Y'dy = 0,$$

où X, X' *sont des fonctions de* x *seulement et* Y, Y' *des fonctions de* y *seulement, elle peut être ramenée à la forme* (A) *en divisant par* X'Y.

3[e] *opération. Intégrer chaque partie séparément, comme dans* (B).

Exemple 1. — Résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}.$$

Solution. 1[re] opération. $(1+x^2)xydy = (1+y^2)dx.$

2[e] opération. $(1+y^2)dx - x(1+x^2)ydy = 0.$

Pour séparer les variables nous divisons par $x(1+x^2)(1+y^2)$, ce qui donne

$$\frac{dx}{x(1+x^2)} - \frac{ydy}{1+y^2} = 0.$$

3[e] opération.

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} - \int \frac{ydy}{1+y^2} = C,$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} - \int \frac{ydy}{1+y^2} = C, \qquad \text{p. 380}$$

$$\log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\log(1+y^2) = C,$$

$$\log(1+x^2)(1+y^2) = 2\log x - 2\,C.$$

Ce résultat peut s'écrire sous une forme plus compacte si nous remplaçons $-2C$ par $\log c$, c'est-à-dire si nous donnons simplement une nouvelle forme à la constante arbitraire. Notre solution devient alors

$$\log(1+x^2)(1+y^2) = \log x^2 + \log c,$$

$$\log(1+x^2)(1+y^2) = \log cx^2,$$

$$(1+x^2)(1+y^2) = cx^2. \quad \textit{Rép.}$$

EXEMPLE II. — Résoudre l'équation

$$a\left(x\frac{dy}{dx}+2y\right)=xy\frac{dy}{dx}.$$

Solution. 1re opération. $axdy+2aydx=xydy.$

2e opération. $2aydx+x(a-y)\,dy=0.$

Pour séparer les variables, nous divisons par xy, ce qui donne

$$\frac{2adx}{x}+\frac{(a-y)dy}{y}=0.$$

3e opération.

$$2a\int\frac{dx}{x}+a\int\frac{dy}{y}-\int dy=\mathrm{C},$$

$$2a\log x+a\log y-y=\mathrm{C},$$

$$a\log x^2y=\mathrm{C}+y,$$

$$\log_e x^2y=\frac{\mathrm{C}}{a}+\frac{y}{a}.$$

En passant des logarithmes aux exponentielles, ce résultat peut être écrit sous la forme

$$x^2y=e^{\frac{\mathrm{C}}{a}+\frac{y}{a}},$$

ou

$$x^2y=e^{\frac{\mathrm{C}}{a}}\cdot e^{\frac{y}{a}}.$$

En désignant la constante $e^{\frac{\mathrm{C}}{a}}$ par c, nous obtenons notre solution sous la forme

$$x^2y=ce^{\frac{y}{a}}.\ \textit{Réponse.}$$

EXEMPLES

Équations différentielles.	*Solutions.*
1. $ydx-xdy=0.$	$y=cx.$
2. $(1+y)dx-(1-x)dy=0.$	$(1+y)(1-x)=c.$
3. $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0.$	$\log xy+x-y=c.$
4. $(x^2-a^2)\,dy-ydx=0.$	$y^{2a}=c\dfrac{x-a}{x+a}.$
5. $(x^2-yx^2)\dfrac{dy}{dx}+y^2+xy^2=0.$	$\dfrac{x+y}{xy}+\log\dfrac{y}{x}=c.$
6. $u^2dv+(v-a)\,du=0.$	$v-a=ce^{\frac{1}{u}}.$
7. $\dfrac{du}{dv}=\dfrac{1+u^2}{1+v^2}.$	$u=\dfrac{v+c}{1-cv}.$
8. $(1+s^2)dt-t^{\frac{1}{2}}\,ds=0.$	$2t^{\frac{1}{2}}-\text{arc tg}\,s=c.$
9. $d\rho+\rho\,\text{tg}\,\theta d\theta=0.$	$\rho=c\cos\theta.$

10. $\sin\theta\cos\varphi d\theta - \cos\theta\sin\varphi d\varphi = 0$.	$\cos\varphi = c\cos\theta$.
11. $\sec^2\theta\,\text{tg}\,\varphi d\theta + \sec^2\varphi\,\text{tg}\,\theta d\varphi = 0$.	$\text{tg}\,\theta\,\text{tg}\,\varphi = c$.
12. $\sec^2\theta\,\text{tg}\,\varphi d\varphi + \sec^2\varphi\,\text{tg}\,\theta d\theta = 0$.	$\sin^2\theta + \sin^2\varphi = c$.
13. $xydx - (a+x)(b+y)\,dy = 0$.	$x - y = c + \log(a+x)^a y^b$.
14. $(1+x^2)dy - \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$.	$\text{arc}\sin y - \text{arc}\,\text{tg}\,x = c$.
15. $\sqrt{1-x^2}\,dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$.	$y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2} = c$.
16. $3e^x\,\text{tg}\,ydx + (1-e^x)\sec^2 ydy = 0$.	$\text{tg}\,y = c(1-e^x)^3$.
17. $2x^2ydy = (1+x^2)dx$.	$y^2 = -\frac{1}{x} + x + c$.
18. $(x - y^2x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.	$x^2 + y^2 = x^2y^2 + c$.
19. $(x^2y + x)dy + (xy^2 - y)dx = 0$.	$xy + \log\frac{y}{x} = c$.

Type II. Équations homogènes. — L'équation différentielle

$$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$$

est dite homogène quand M et N sont des fonctions homogènes de x et de y du même degré (*). Les équations différentielles de cette nature peuvent être résolues en faisant la substitution

$$y = vx,$$

ce qui donne une équation différentielle en v et x dans laquelle les fonctions sont séparables et où, par suite, nous pouvons suivre la règle de la p. 494.

Exemple. — Résoudre l'équation

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}.$$

Solution. $$y^2dx + (x^2 - xy)\,dy = 0.$$

Puisque nous avons affaire à une équation différentielle homogène, nous la transformons au moyen de la substitution

$$y = vx,$$

d'où $$dy = vdx + xdv,$$

et notre équation devient

$$v^2x^2dx + (x^2 - vx^2)(vdx + xdv) = 0,$$
$$x^2vdx + x^3(1-v)\,dv = 0.$$

(*) Une fonction de x et de y est dite *homogène* par rapport aux variables si le résultat de la substitution de x et de y par λx et λy (λ étant arbitraire) se réduit à la fonction primitive multipliée par une certaine puissance de λ. Cette puissance de λ est appelée le *degré* de la fonction primitive.

Pour séparer les variables, divisons par vx^3. Nous obtenons

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1-v)dv}{v} = 0,$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dv}{v} - \int dv = \mathrm{C},$$

$$\log x + \log v - v = \mathrm{C},$$

$$\log_e vx = \mathrm{C} + v,$$

$$vx = e^{\mathrm{C}+v} = e^{\mathrm{C}} \cdot e^v,$$

$$vx = ce^v.$$

Mais $v = \frac{y}{x}$. Par suite, la solution est

$$y = ce^{\frac{y}{x}}. \quad \textit{Réponse.}$$

EXEMPLES

Équations différentielles.	*Solutions.*
1. $(x+y)dx + xdy = 0.$	$x^2 + 2xy = c.$
2. $(x+y)dx + (y-x)dy = 0.$	$\log(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = c.$
3. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx.$	$1 + 2cy - c^2x^2 = 0.$
4. $(8y+10x)dx + (5y+7x)dy = 0.$	$(x+y)^2(2x+y)^3 = c.$
5. $xy^2dy = (x^3+y^3)dx.$	$y^3 = 3x^3 \log cx.$
6. $(x^2-2y^2)dx + 2xydy = 0.$	$y^2 = -x^2 \log cx.$
7. $(x^2+y^2)dx = 2xydy$	$y^2 = x^2 + cx.$
8. $(2\sqrt{st} - s)dt + tds = 0.$	$te^{\sqrt{\frac{s}{t}}} = c.$
9. $(t-s)dt + tds = 0.$	$te^{\frac{s}{t}} = c.$
10. $x\cos\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = y\cos\frac{y}{x} - x.$	$xe^{\sin\frac{y}{x}} = c.$
11. $x\cos\frac{y}{x}(ydx+xdy) = y\sin\frac{y}{x}(xdy-ydx).$	$xy\cos\frac{y}{x} = c.$

Type III. Équations linéaires. — Une équation différentielle est dite *linéaire* si l'équation est du premier degré par rapport à la variable dépendante (généralement y) et ses dérivées (ou différentielles). L'équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q},$$

dans laquelle P, Q sont des fonctions de x seulement, ou des constantes.

Pour intégrer (A), posons

$$y = uz, \tag{B}$$

où z est une nouvelle variable et u une fonction de x à déterminer.

En différentiant (B), il vient

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}. \tag{C}$$

En substituant (C) et (B) dans (A), nous obtenons

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + \mathrm{P}uz = \mathrm{Q},$$

ou

$$u\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + \mathrm{P}u\right)z = \mathrm{Q}. \tag{D}$$

Déterminons maintenant, si possible, la fonction u de façon que le terme en z disparaisse ; cela signifie que le coefficient de z doit s'annuler, c'est-à-dire que

$$\frac{du}{dx} + \mathrm{P}u = 0.$$

Alors $$\frac{du}{u} = -\mathrm{P}dx$$

et $$\log_e u = -\int \mathrm{P}dx + \mathrm{C},$$

ce qui donne

$$u = c_1 e^{-\int \mathrm{P}dx}. \tag{E}$$

L'équation (D) devient alors

$$u\frac{dz}{dx} = \mathrm{Q}.$$

Pour trouver z d'après la dernière équation, substituons dans cette équation la valeur de u d'après (E) et intégrons. Nous obtenons

$$c_1 e^{-\int \mathrm{P}dx}\frac{dz}{dx} = \mathrm{Q},$$

$$c_1 dz = \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}dx,$$

$$c_1 z = \int \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}dx + \mathrm{C}. \tag{F}$$

La solution de (A) se trouve alors en substituant les valeurs de u et de z d'après (E) et (F) dans (B), ce qui donne

(G) $$y = e^{-\int P dx}\left(\int Q e^{\int P dx} dx + C\right).$$

La démonstration de l'exactitude de (G) s'établit immédiatement en substituant dans (A). En résolvant les exemples compris sous le titre qui précède, le lecteur devra trouver la solution suivant la méthode indiquée ci-dessus, plutôt qu'en utilisant (G) comme formule.

Exemple. — Résoudre l'équation

(1) $$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

Solution. Cette équation est évidemment de la forme linéaire (A), où

$$P = -\frac{2}{x+1} \quad \text{et} \quad Q = (x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

Posons $y = uz$; alors $\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$.

En substituant dans l'équation donnée (1), nous obtenons

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - \frac{2uz}{1+x} = (x+1)^{\frac{5}{2}}, \text{ ou}$$

(2) $$u\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x}\right)z = (x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

Pour déterminer u, nous égalons à zéro le coefficient de z, ce qui donne

$$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x} = 0,$$

$$\frac{du}{u} = \frac{2dx}{1+x}.$$

$$\log_e u = 2\log(1+x),$$

(3) $$u = e^{\log(1+x)^2} = (1+x)^2. \text{ (*)}$$

L'équation (2) devient maintenant, puisque le terme en z disparaît,

$$u\frac{dz}{dx} = (x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

En remplaçant u par sa valeur d'après (3), il vient

$$\frac{dz}{dx} = (x+1)^{\frac{1}{2}},$$

$$dz = (x+1)^{\frac{1}{2}} dx,$$

(4) $$z = \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

(*) Puisque $\log_e u = \log_e e^{\log(1+x)^2} = \log(1+x)^2 \log_e e = \log(1+x)^2$, il en résulte que $u = (1+x)^2$. Pour plus de simplicité nous avons supposé la valeur particulière zéro pour la constante d'intégration.

En substituant (4) et (3) dans $y = uz$, nous obtenons la solution

$$y = \frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{3} + C(x+1)^2. \qquad \textit{Réponse.}$$

EXEMPLES

Équations différentielles.	*Solutions.*
1. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$	$2y = (x+1)^4 + c(x+1)^2.$
2. $\frac{dy}{dx} - \frac{ay}{x} = \frac{x+1}{x}.$	$y = cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}.$
3. $x(1-x^2)dy + (2x^2-1)ydx = ax^3dx.$	$y = ax + cx\sqrt{1-x^2}.$
4. $dy - \frac{xydx}{1+x^2} = \frac{adx}{1+x^2}.$	$y = ax + c(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.$
5. $\frac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1.$	$s = \sin t + c\cos t.$
6. $\frac{ds}{dt} + s\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t.$	$s = \sin t - 1 + ce^{-\sin t}.$
7. $\frac{dy}{dx} - \frac{n}{x}y = e^x x^n.$	$y = x^n(e^x + c).$
8. $\frac{dy}{dx} + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}.$	$x^n y = ax + c.$
9. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{e^x}.$	$e^x y = x + c.$
10. $\frac{dy}{dx} + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$	$y = x^2\left(1 + ce^{\frac{1}{x}}\right).$

Type IV. Équations réductibles à la forme linéaire. — Certaines équations qui ne sont pas linéaires peuvent être réduites à la forme linéaire au moyen d'une transformation convenable. Un type de ces équations est

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} + Py = Qy^n,$$

expression dans laquelle P, Q sont des fonctions de x seulement ou des constantes. L'équation (A) peut être ramenée à la forme linéaire (A), type III, au moyen de la substitution $z = y^{-n+1}$. Toutefois, cette réduction n'est pas nécessaire si nous employons la même méthode, pour trouver la solution, que celle donnée sous le type III, p. 497. Illustrons ces considérations par un exemple.

EXEMPLE. — Résoudre l'équation

(1) $$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a \log x \,.\, y^2.$$

Solution. Cette équation est évidemment de la forme (A), dans laquelle

$$P = \frac{1}{x},\; Q = a \log x,\; n = 2.$$

Posons $y = uz$; alors $\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$.

En substituant dans (1), nous obtenons

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + \frac{uz}{x} = a \log x \cdot u^2z^2,$$

(2) $$u\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right)z = a \log x \,.\, u^2z^2.$$

Pour déterminer u nous égalons à zéro le coefficient de z, ce qui donne

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0,$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x},$$

$$\log u = -\log x = \log \frac{1}{x},$$

(3) $$u = \frac{1}{x}.$$

Puisque le terme en z disparaît, l'équation (2) devient maintenant

$$u\frac{dz}{dx} = a \log x \,.\, u^2z^2,$$

$$\frac{dz}{dx} = a \log x \,.\, uz^2.$$

En remplaçant u par sa valeur d'après (3), il vient

$$\frac{dz}{dx} = a \log x \cdot \frac{z^2}{x},$$

$$\frac{dz}{z^2} = a \log x \cdot \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{z} = \frac{a(\log x)^2}{2} + C,$$

(4) $$z = -\frac{2}{a(\log x)^2 + 2C}.$$

En substituant (4) et (3) dans $y = uz$, nous obtenons la solution

$$y = -\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{a(\log x)^2 + 2C},$$

ou $$xy\left[a(\log x)^2 + 2C\right] + 2 = 0.$$ *Réponse.*

EXEMPLES

Équations différentielles.	*Solutions.*
1. $\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3.$	$y^{-2} = x^2 + 1 + ce^{x^2}.$
2. $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = axy^2.$	$y = (c\sqrt{1 - x^2} - a)^{-1}.$
3. $3y^2\frac{dy}{dx} - ay^3 = x + 1.$	$y^3 = ce^{ax} - \frac{x+1}{a} - \frac{1}{a^2}.$
4. $\frac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1.$	$x\left[(2 - y^2)e^{\frac{y^2}{2}} + c\right] = e^{\frac{y^2}{2}}.$
5. $(y \log x - 1)ydx = xdy.$	$y = (cx + \log x + 1)^{-1}.$
6. $y - \cos x\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x(1 - \sin x).$	$y = \frac{\operatorname{tg} x + \sec x}{\sin x + c}.$
7. $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x.$	$y^{-1} = \log x + 1 + cx.$

232. Équations différentielles du nᵉ ordre et du premier degré. — Sous ce titre, nous considérerons quatre types d'équations qui ont de l'importance dans un ouvrage élémentaire. Ce sont des cas spéciaux des *équations différentielles linéaires* que nous avons définies, p. 497.

Type I. Équation différentielle linéaire

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_ny = 0,$$

dans laquelle les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont constants.

La substitution de e^{rx} à y dans le premier membre donne

$$(r^n + p_1r^{n-1} + p_2r^{n-2} + \cdots + p_n)e^{rx}.$$

Cette expression s'annule pour toutes les valeurs de r qui satisfont à l'équation

$$\text{(B)} \qquad r^n + p_1r^{n-1} + p_2r^{n-2} + \cdots + p_n = 0;$$

et par suite, pour chacune de ces valeurs de r, e^{rx} est une solution de (A).

L'équation (B) est appelée l'*équation caractéristique* de (A). Nous observons que les coefficients sont les mêmes dans les deux, les exposants dans (B) correspondant à l'ordre des dérivées dans (A), et

y dans (A) étant remplacé par 1. Supposons que les racines de l'équation caractéristique (B) soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Alors

(C) $$e^{r_1x},\ e^{r_2x},\ \ldots,\ e^{r_nx}$$

sont des solutions de (A). De plus, si chacune des solutions (C) est multipliée par une constante arbitraire, on trouve que les produits

(D) $$c_1e^{r_1x},\ c_2e^{r_2x},\ \ldots,\ c_ne^{r_nx}$$

sont aussi des solutions (*). Et l'on peut montrer, par substitution, que la somme des solutions (D), savoir

(E) $$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \cdots + c_ne^{r_nx},$$

est une solution de (A). La solution (E) contient n constantes arbitraires; c'est la *solution générale* (si les racines sont toutes différentes), tandis que les résultats (C) sont des *solutions particulières.*

1er Cas. *L'équation caractéristique a ses racines imaginaires.* — Puisque les racines imaginaires se présentent par paires, supposons qu'une paire de ces racines soit

$$r_1 = a + bi, \quad r_2 = a - bi, \quad i = \sqrt{-1}.$$

La solution correspondante est

$$\begin{aligned} y &= c_1e^{(a+bi)x} + c_2e^{(a-bi)x} \\ &= e^{ax}(c_1e^{ibx} + c_2e^{-ibx}) \\ &= e^{ax}\{c_1(\cos bx + i\sin bx) + c_2(\cos bx - i\sin bx)\}\ (^{**}) \\ &= e^{ax}\{(c_1 + c_2)\cos bx + i(c_1 - c_2)\sin bx\}, \end{aligned}$$

(*) En substituant $c_1e^{r_1x}$ à y dans (A), le membre de gauche devient

$$(r_1^n + p_1r_1^{n-1} + p_2r_1^{n-2} + \cdots + p_n)c_1e^{r_1x}.$$

Mais cette expression s'annule puisque r_1 est une racine de (B) ; par suite, $c_1e^{r_1x}$ est une solution de (A). De même pour les autres racines.

(**) En remplaçant x par ibx dans l'exemple 1, p. 268, nous avons

$$e^{ibx} = 1 + ibx - \frac{b^2x^2}{2!} - \frac{ib^3x^3}{3!} + \frac{b^4x^4}{4!} + \frac{ib^5x^5}{5!} - \cdots,$$

ou,

(1) $$e^{ibx} = 1 - \frac{b^2x^2}{2!} + \frac{b^4x^4}{4!} - \cdots + i\left(bx - \frac{b^3x^3}{3!} + \frac{b^5x^5}{5!} - \cdots\right);$$

et en remplaçant x par $-ibx$, il vient

$$e^{-ibx} = 1 - ibx - \frac{b^2x^2}{2!} + \frac{ib^3x^3}{3!} + \frac{b^4x^4}{4!} - \frac{ib^5x^5}{5!} - \cdots,$$

ou

(2) $$e^{-ibx} = 1 - \frac{b^2x^2}{2!} + \frac{b^4x^4}{4!} - \cdots - i\left(bx - \frac{b^3x^3}{3!} + \frac{b^5x^5}{5!} - \cdots\right).$$

Mais, en remplaçant x par bx dans (A), (B), p. 267, nous obtenons

(3) $$\cos bx = 1 - \frac{b^2x^2}{2!} + \frac{b^4x^4}{4!} - \cdots.$$

(4) $$\sin bx = bx - \frac{b^3x^3}{3!} + \frac{b^5x^5}{5!} - \cdots.$$

Par suite (1) et (2) deviennent

$$e^{ibx} = \cos bx + i\sin bx, \qquad e^{-ibx} = \cos bx - i\sin bx.$$

ou, $$y = e^{ax}(\mathrm{A} \cos bx + \mathrm{B} \sin bx),$$

expression dans laquelle A et B sont des constantes arbitraires.

2e cas. *L'équation caractéristique a des racines multiples.* — Considérons l'équation différentielle linéaire du 3e ordre

$$\text{(F)} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} + p_1 \frac{d^2y}{dx^2} + p_2 \frac{dy}{dx} + p_3 y = 0,$$

dans laquelle p_1, p_2, p_3 sont des constantes.

L'équation caractéristique correspondante est

$$\text{(G)} \qquad r^3 + p_1 r^2 + p_2 r + p_3 = 0.$$

Si r_1 est une racine de (G), nous avons montré que $e^{r_1 x}$ est une solution de (F).

Nous montrerons maintenant que si r_1 est une racine double de (G), $xe^{r_1 x}$ est également une solution de (F). En remplaçant y dans le membre de gauche de (F) par $xe^{r_1 x}$, nous obtenons

$$\text{(H)} \qquad xe^{r_1 x}(r_1^3 + p_1 r_1^2 + p_2 r_1 + p_3) + e^{r_1 x}(3r_1^2 + 2p_1 r_1 + p_2).$$

Mais puisque r_1 est une racine double de (G),

$$r_1^3 + p_1 r_1^2 + p_2 r_1 + p_3 = 0,$$

et $$3r_1^2 + 2p_1 r_1 + p_2 = 0.$$ D'après § 69, p. 99.

Par suite, (H) s'annule et $xe^{r_1 x}$ est une solution de (F). Nous avons alors deux solutions correspondant à la racine double r :

$$c_1 e^{r_1 x}, \qquad c_2 x e^{r_1 x}.$$

Plus généralement, si r_1 est une racine multiple de l'équation caractéristique (B) p. 502, se présentant s fois, nous pouvons écrire immédiatement s solutions distinctes de l'équation différentielle (A), p. 502, savoir

$$c_1 e^{r_1 x}, \quad c_2 x e^{r_1 x}, \quad c_3 x^2 e^{r_1 x}, \quad \ldots, \quad c_s x^{s-1} e^{r_1 x}.$$

Dans le cas où $a + bi$ et $a - bi$ sont chacune des racines multiples de l'équation caractéristique se présentant s fois, il s'ensuit que nous pouvons écrire $2s$ solutions distinctes de l'équation différentielle, savoir

$$c_1 e^{ax} \cos bx, \quad c_2 x e^{ax} \cos bx, \quad c_3 x^2 e^{ax} \cos bx, \quad \ldots, \quad c_s x^{s-1} e^{ax} \cos bx;$$
$$c_1' e^{ax} \sin bx, \quad c_2' x e^{ax} \sin bx, \quad c_3' x^2 e^{ax} \sin bx, \quad \ldots, \quad c_s' x^{s-1} e^{ax} \sin bx.$$

Nos résultats peuvent maintenant être résumés dans la **règle** *suivante* **pour résoudre les équations différentielles du type**

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = 0,$$

dans lesquelles $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *sont des constantes.*

1re opération. Écrire l'équation caractéristique correspondante

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + p_n = 0.$$

2e opération. Résoudre complètement l'équation caractéristique.

3e opération. D'après les racines de l'équation caractéristique, écrire comme il suit les solutions particulières correspondantes de l'équation différentielle :

ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE.		ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.
(*a*) *Chaque racine réelle distincte* r_1	*donne une solution particulière*	$e^{r_1 x}$.
(*b*) *Chaque paire distincte de racines imaginaires* $a \pm bi$	*donne*	*deux solutions particulières* $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$.
(*c*) *Une racine multiple se présentant s fois*	*donne*	*s solutions particulières obtenues en multipliant les solutions particulières* (*a*) *ou* (*b*) *par* $1, x, x^2, \ldots, x^{s-1}$.

4e opération. Multiplier chacune des n(*) solutions indépendantes par une constante arbitraire et ajouter les résultats. On obtient ainsi la solution complète.

EXEMPLE I. — Résoudre $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0.$

Solution. Suivons la règle ci-dessus.

1re opération. $r^3 - 3r^2 + 4 = 0$, équation caractéristique.
2e opération. En résolvant, les racines sont $-1, 2, 2$.
3e opération. (*a*) La racine -1 donne la solution e^{-x},
(*b*) La racine double 2 donne les deux solutions e^{2x}, xe^{2x}.
4e opération. La solution générale est

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}.$$ *Réponse.*

EXEMPLE II. — Résoudre $\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 5y = 0.$

Solution. Suivons la règle qui précède.

(*) On a un contrôle de l'exactitude du travail dans le fait que les trois premières opérations doivent donner *n* solutions indépendantes.

1re opération. L'équation caractéristique est

$$r^4 - 4r^3 + 10r^2 - 12r + 5 = 0.$$

2e opération. En résolvant cette équation, on trouve que les racines sont $1, 1, 1 \pm 2i$.

3e opération. (*b*) Les deux racines imaginaires $1 \pm 2i$ donnent les deux solutions $e^x \cos 2x$, $e^x \sin 2x$ $(a = 1, b = 2)$.

(*c*) La racine double 1 donne les deux solutions e^x, xe^x.

4e opération. La solution générale est

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^x \cos 2x + c_4e^x \sin 2x,$$

ou

$$y = (c_1 + c_2x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x)e^x. \qquad \textit{Réponse.}$$

EXEMPLES

Équations différentielles.	*Solutions générales.*
1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 9y.$	$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}.$
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$	$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 12y = 7\dfrac{dy}{dx}.$	$y = c_1e^{3x} + c_2e^{4x}.$
4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0.$	$y = (c_1 + c_2x)e^{2x}.$
5. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 4\dfrac{dy}{dx} = 0.$	$y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}.$
6. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8y = 0.$	$y = c_1e^{x\sqrt{2}} + c_2e^{-x\sqrt{2}} + c_3 \sin 2x + c_4 \cos 2x.$
7. $\dfrac{d^3s}{dt^3} - \dfrac{d^2s}{dt^2} - 6\dfrac{ds}{dt} = 0.$	$s = c_1e^{3t} + c_2e^{-2t} + c_3.$
8. $\dfrac{d^4\rho}{d\theta^4} - 12\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} + 27\rho = 0.$	$\rho = c_1e^{3\theta} + c_2e^{-3\theta} + c_3e^{\theta\sqrt{3}} + c_4e^{-\theta\sqrt{3}}.$
9. $\dfrac{d^2u}{dv^2} - 6\dfrac{du}{dv} + 13u = 0.$	$u = (c_1 \sin 2v + c_2 \cos 2v)e^{3v}.$
10. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2n^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + n^4y = 0.$	$y = (c_1 + c_2x) \cos nx + (c_3 + c_4x) \sin nx.$
11. $\dfrac{d^3s}{dt^3} = s.$	$s = c_1e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(c_2 \sin \dfrac{t\sqrt{3}}{2} + c_3 \cos \dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right).$
12. $\dfrac{d^3s}{dt^3} - 7\dfrac{ds}{dt} + 6s = 0.$	$s = c_1e^{2t} + c_2e^t + c_3e^{-3t}.$
13. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 0.$	$y = c_1 + (c_2 + c_3x + c_4x^2)e^x.$
14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 10y = 0.$	$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}.$
15. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 10y = 0.$	$y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x).$
16. $2\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0.$	$y = c_1e^{-\frac{1}{2}x} + e^x(c_2 \cos x + c_3 \sin x).$

Type II. Équation différentielle linéaire

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = X,$$

dans laquelle X *est une fonction de* x *seulement, ou une constante, et* $p_1, p_2, \cdots, p_n$ *sont des constantes.*

Quand $X = 0$, (I) se ramène à (A), type I, p. 502,

$$\text{(J)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = 0.$$

La solution complète de (J) est appelée la *fonction complémentaire* de (I).

Soit u la solution complète de (J), c'est-à-dire la fonction complémentaire de (I), et v une solution particulière quelconque de (I). Alors

$$\frac{d^n v}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n v = X,$$

et

$$\frac{d^n u}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n u = 0.$$

En additionnant, nous obtenons

$$\frac{d^n}{dx^n}(u+v) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(u+v) + p_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(u+v) + \cdots + p_n(u+v) = X,$$

ce qui montre que $u+v$ est une solution(*) de (I). Trouver une solution particulière v est un problème d'une difficulté considérable, sauf dans certains cas spéciaux. En ce qui concerne les problèmes donnés dans cet ouvrage, nous pouvons utiliser la **Règle** *suivante* **pour résoudre les équations différentielles du type II.**

1re opération. Remplacer par zéro le membre de droite de l'équation donnée (I) *et résoudre d'après la règle p. 505. On obtient ainsi comme solution la fonction complémentaire de* (I), *savoir,*

$$y = u.$$

2e opération. Différentier successivement l'équation donnée (I) *et obtenir, soit directement, soit par élimination, une équation différentielle d'un ordre supérieur du type* I.

(*) Dans les ouvrages sur les équations différentielles, on montre que $u+v$ est la solution complète.

3ᵉ opération. Résoudre cette nouvelle équation d'après la règle de la p. 505, ce qui donne sa solution complète

$$y = u + v,$$

dans laquelle la partie u est la fonction complémentaire de (I), *déjà trouvée dans la première opération* (*) *et v est la somme des termes additionnels trouvés.*

4ᵉ opération. Pour trouver les valeurs des constantes d'intégration dans la solution particulière v, substituer

$$y = v$$

et ses dérivées dans l'équation donnée (I). *Dans l'identité qui en résulte, égaler les coefficients des termes semblables, résoudre par rapport aux constantes d'intégration, substituer leurs valeurs dans*

$$y = u + v,$$

ce qui donne la solution complète de (I).

Nous allons maintenant illustrer cette méthode au moyen d'exemples.

Note. La solution de l'équation caractéristique de la nouvelle équation différentielle dérivée est facilitée si l'on observe que le membre de gauche de cette équation est exactement divisible par le membre de gauche de l'équation caractéristique utilisée pour trouver la fonction complémentaire.

EXEMPLE I. — Résoudre

$$\text{(K)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = ae^{-2x}.$$

Solution. 1ʳᵉ opération. Remplaçons le membre de droite par zéro, il vient

$$\text{(L)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

En appliquant la règle de la p. 505, nous obtenons comme solution complète de (L),

$$\text{(M)} \qquad y = c_1e^x + c_2e^{-2x} = u,$$

2ᵉ opération. En différentiant (K), on obtient

$$\text{(N)} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = -2ae^{-2x}.$$

En multipliant (K) par 2 et en ajoutant le résultat à (N), nous obtenons

$$\text{(O)} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0,$$

qui est une équation différentielle du type I.

(*) D'après la méthode suivie, il est évident que toute solution de l'équation primitive doit aussi être une solution de l'équation dérivée.

3e opération. En résolvant d'après la règle de la p. 505, nous obtenons pour solution complète de (O)

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x},$$

ou, d'après (M),

$$y = u + c_3 x e^{-2x} = u + v.$$

4e opération. Nous allons maintenant déterminer c_3 de façon que $c_3 x e^{-2x}$ soit une solution particulière v de (K).

En substituant dans (K) $y = c_3 x e^{-2x}$,

$$\frac{dy}{dx} = c_3 e^{-2x}(1 - 2x), \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = c_3 e^{-2x}(4x - 4),$$

nous obtenons $$-3c_3 e^{-2x} = a e^{-2x};$$

$$-3c_3 = a \quad \text{ou} \quad c_3 = -\tfrac{1}{3}a.$$

Par suite, une solution particulière de (K) est

$$v = -\tfrac{1}{3} a x e^{-2x},$$

et la solution complète est

$$y = u + v = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \tfrac{1}{3} a x e^{-2x}.$$

Exemple II. — Résoudre

(P) $$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = \cos ax.$$

Solution. 1re opération. En résolvant

(Q) $$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = 0,$$

nous obtenons la fonction complémentaire

(R) $$y = c_1 \sin nx + c_2 \cos nx = u.$$

2e opération. En différentiant (P) deux fois, nous obtenons

(S) $$\frac{d^4y}{dx^4} + n^2 \frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 \cos ax.$$

En multipliant (P) par a^2 et en ajoutant le résultat à (S), nous obtenons

(T) $$\frac{d^4y}{dx^4} + (n^2 + a^2)\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 n^2 y = 0.$$

3e opération. La solution complète de (T) est

$$y = c_1 \sin nx + c_2 \cos nx + c_3 \sin ax + c_4 \cos ax$$

ou $$y = u + c_3 \sin ax + c_4 \cos ax = u + v.$$

4e opération. Déterminons maintenant c_3 et c_4 de façon que $c_3 \sin ax + c_4 \cos ax$ soit une solution particulière v de (P).

En substituant dans (P)

$$y = c_3 \sin ax + c_4 \cos ax, \qquad \frac{dy}{dx} = c_3 a \cos ax - c_4 a \sin ax,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -c_3 a^2 \sin ax - c_4 a^2 \cos ax,$$

nous obtenons

$$(n^2 c_4 - a^2 c_4) \cos ax + (n^2 c_3 - a^2 c_3) \sin ax = \cos ax.$$

En égalant les coefficients des termes semblables dans cette identité, nous obtenons

$$n^2c_4 - a^2c_4 = 1 \qquad \text{et} \qquad n^2c_3 - a^2c_3 = 0,$$

ou

$$c_4 = \frac{1}{n^2 - a^2} \qquad \text{et} \qquad c_3 = 0.$$

Par suite, une solution particulière de (P) est

$$v = \frac{\cos ax}{n^2 - a^2},$$

et la solution complète est

$$y = u + v = c_1 \sin nx + c_2 \cos nx + \frac{\cos ax}{n^2 - a^2}.$$

EXEMPLES

Équations différentielles.	*Solutions complètes.*
1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = x.$	$y = c_1e^{3x} + c_2e^{4x} + \frac{12x+7}{144}.$
2. $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = a.$	$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + (c_3 + c_4x)e^x + a.$
3. $\frac{d^2s}{dt^2} - a^2s = t + 1.$	$s = c_1e^{at} + c_2e^{-at} - \frac{t+1}{a^2}.$
4. $\frac{d^3\rho}{d\theta^3} - 2\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \frac{d\rho}{d\theta} = e^\theta.$	$\rho = \left(c_1 + c_2\theta + \frac{\theta^2}{2}\right)e^\theta + c_3.$
5. $\frac{d^4y}{dx^4} - a^4y = x^3.$	$y = c_1e^{ax} + c_2e^{-ax} + c_3 \sin ax + c_4 \cos ax - \frac{x^3}{a^4}.$
6. $\frac{d^2s}{dx^2} + a^2s = \cos ax.$	$s = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax + \frac{x \sin ax}{2a}.$
7. $\frac{d^2s}{dt^2} - 2a\frac{ds}{dt} + a^2s = e^t.$	$s = (c_1 + c_2t)e^{at} + \frac{e^t}{(a-1)^2},$
8. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^{2x}.$	$y = e^{-x}(c_1x + c_2) + \frac{1}{9}e^{2x}.$
9. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 5x + 2.$	$y = c_1e^x + c_2e^{-x} - 5x - 2.$
10. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = x.$	$y = c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}.$
11. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{nx}.$	$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{e^{nx}}{n^2 - 5n + 6}.$
12. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = xe^{nx}.$	$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{xe^{nx}}{n^2-3n+2} - \frac{(2n-3)e^{nx}}{(n^2-3n+2)^2}.$
13. $\frac{d^2s}{dt^2} - 9\frac{ds}{dt} + 20s = t^2e^{3t}.$	$s = c_1e^{4t} + c_2e^{5t} + \frac{2t^2 + 6t + 7}{4}e^{3t}.$
14. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = t \sin^2 t.$	$s = \left(c_1 - \frac{t^2}{16}\right)\sin 2t + \left(c_2 - \frac{t}{32}\right)\cos 2t + \frac{t}{8}.$

Type III. $$\frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

X étant une fonction de x seulement, ou une constante.

Pour résoudre ce type d'équations différentielles, nous avons la règle ci-après d'après le chapitre XXIX, p. 456 :

Intégrer n fois successivement. Chaque intégration introduira une constante arbitraire.

Exemple. — Résoudre $\frac{d^3 y}{dx^3} = xe^x$.

Solution. En intégrant une première fois, on a

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \int xe^x dx,$$

ou $$\frac{d^2 y}{dx^2} = xe^x - e^x + C_1.$$ D'après (A), p. 402.

En intégrant une deuxième fois, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \int xe^x dx - \int e^x dx + \int C_1 dx$$
$$= xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2.$$

En intégrant une troisième fois

$$y = \int xe^x dx - \int 2e^x dx + \int C_1 x dx + \int C_2 dx$$
$$= xe^x - 3e^x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

ou $$y = xe^x - 3e^x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$ *Réponse.*

Type IV. $$\frac{d^2 y}{dx^2} = Y,$$

Y étant une fonction de y seulement.

La règle pour intégrer ce type est la suivante :

1re opération. Multiplier le membre de gauche par le facteur $2\frac{dy}{dx}dx$, *et le membre de droite par le facteur équivalent* $2dy$, *et intégrer. L'intégrale du membre de gauche sera* (*) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

2e opération. Extraire la racine carrée des deux membres, séparer les variables et intégrer de nouveau (**).

(*) Puisque $d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2}dx$.

(**) Chaque intégration introduit une constante arbitraire.

EXEMPLE. — Résoudre $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$.

Solution. Ici $\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$, et par suite est du Type IV.

1re opération. En multipliant le membre de gauche par $2\frac{dy}{dx}dx$ et le membre de droite par $2dy$, nous obtenons

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}dx = -2a^2ydy.$$

En intégrant, il vient

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -a^2y^2 + C_1.$$

2e opération. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 - a^2y^2}$,

en prenant le signe positif du radical.

En séparant les variables, nous obtenons

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 - a^2y^2}} = dx.$$

Intégrant,
$$\frac{1}{a}\text{arc sin}\frac{ay}{\sqrt{C_1}} = x + C_2,$$

ou
$$\text{arc sin}\frac{ay}{\sqrt{C_1}} = ax + aC_2,$$

ce qui est la même chose que

$$\frac{ay}{\sqrt{C_1}} = \sin(ax + aC_2)$$

$$= \sin ax \cos aC_2 + \cos ax \sin aC_2, \qquad \text{d'après 31, p. 2,}$$

ou
$$y = \frac{\sqrt{C_1}}{a}\cos aC_2 \cdot \sin ax + \frac{\sqrt{C_1}}{a}\sin aC_2 \cdot \cos ax$$

$$= c_1 \sin ax + c_2 \cos ax. \qquad \textit{Réponse.}$$

EXEMPLES

Équations différentielles.	*Solutions.*
1. $\frac{d^3y}{dx^3} = x^2 - 2\cos x.$	$y = \frac{x^5}{60} + 2\sin x + c_1x^2 + c_2x + c_3.$
2. $v\frac{d^3u}{dv^3} = 2.$	$u = v^2 \log v + c_1v^2 + c_2v + c_3.$
3. $\frac{d^3\rho}{d\theta^3} = \sin^3\theta.$	$\rho = -\frac{\cos^3\theta}{27} + \frac{7\cos\theta}{9} + c_1\theta^2 + c_2\theta + c_3.$
4. $\frac{d^2s}{dt^2} = f\sin nt.$	$s = -\frac{f}{n^2}\sin nt + c_1t + c_2.$
5. $\frac{d^2s}{dt^2} = g.$	$s = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2.$

6. $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m$. $y = \frac{m!\,x^{m+n}}{(m+n)!} + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$.

7. $\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 y$. $ax = \log\left(y + \sqrt{y^2 + c_1}\right) + c_2$, ou $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$.

8. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{as}}$. $3t = 2a^{\frac{1}{4}}\left(s^{\frac{1}{2}} - 2c_1\right)\left(s^{\frac{1}{2}} + c_1\right)^{\frac{1}{2}} + c_2$.

9. $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a}{y^3}$. $(c_1 t + c_2)^2 + a = c_1 y^2$.

10. $\frac{d^2x}{dt^2} = e^{nx}$. $t\sqrt{2n} = c_1 \log \frac{\sqrt{c_1^2 e^{nx} + 1} - 1}{\sqrt{c_1^2 e^{nx} + 1} + 1} + c_2$.

11. $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 \sin x$. $y = c_1 + c_2 x + (6 - x^2)\sin x - 4x \cos x$.

12. $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{k}{s^2}$. Trouver t étant donné que $\frac{ds}{dt} = 0$ et $s = a$ quand $t = 0$.

Réponse. $t = \sqrt{\frac{a}{2k}}\left\{\frac{a}{2}\left(\text{arc sin vers}\,\frac{2s}{a} - \pi\right) - \sqrt{as - s^2}\right\}$.

EXEMPLES VARIÉS

Résoudre les équations différentielles ci-après :

1. $\frac{d^4y}{dx^4} - a^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{x}$.

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$.

4. $3\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x+1} = \frac{x^3}{y^2}$.

5. $(4y + 3x)\frac{dy}{dx} + y = 2x$.

6. $2\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 12x = 0$.

7. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{4x}$.

8. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^x$.

9. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$.

10. $\frac{dy}{dx} + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$.

11. $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$.

12. $x^2y\,dx - (x^3 + y^3)dy = 0$.

13. $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$.

14. $\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = 1$.

CHAPITRE XXXI

INTÉGRAPHE. — INTÉGRATION APPROCHEE TABLE D'INTÉGRALES

233. Intégration mécanique. — Nous avons vu que la détermination de l'aire limitée par une courbe C dont l'équation est

$$y = f(x)$$

et l'évaluation de l'intégrale définie

$$\int f(x) dx$$

sont des problèmes équivalents.

Jusqu'ici, nous avons considéré la relation entre les variables x et y comme étant donnée par des formules analytiques et nous avons appliqué des méthodes analytiques pour obtenir les intégrales cherchées. Cependant, si la relation entre les variables est donnée, non analytiquement, mais graphiquement, comme c'est fréquemment le cas dans les investigations physiques, c'est-à-dire par une courbe (*), la méthode analytique n'est pas applicable à moins qu'on ne puisse obtenir l'équation exacte ou approchée de la courbe. Néanmoins, il est possible de déterminer l'aire limitée par une courbe, que nous connaissions ou non son équation, au moyen de procédés mécaniques. Nous allons étudier la construction, théorie et pratique, de deux de ces procédés, savoir: l'intégraphe, inventé par Abdank-Abakanowicz(**) et le planimètre polaire. Avant d'aborder la discussion de l'intégraphe, il est nécessaire d'entreprendre l'étude des *courbes intégrales*.

234. Courbes intégrales. — Si $F(x)$ et $f(x)$ sont deux fonctions telles que

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dx} F(x) = f(x),$$

(*) Par exemple, l'enregistrement fait par un thermomètre enregistreur, un indicateur de machine à vapeur ou par certaines machines à contrôler.

(**) Voir *les Intégraphes, la courbe intégrale et ses applications*, par Abdank-Abakanowicz, Paris, 1889

la courbe

(B) $$y = F(x)$$

est appelée une *courbe intégrale* de la courbe

(C) $$y = f(x)(*).$$

Le nom de *courbe intégrale* est dû au fait que d'après (C) on voit que la même relation entre les fonctions peut être exprimée comme il suit :

(D) $$\int_0^x f(x)dx = F(x). \qquad F(0) = 0.$$

Traçons une courbe primitive et une courbe intégrale correspondante de façon qu'on puisse facilement comparer leurs points de correspondance (*fig.* 268).

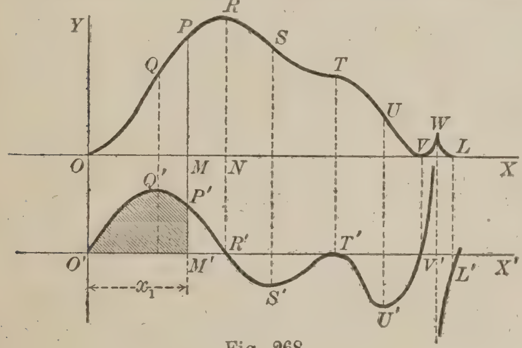


Fig. 268.

Courbe intégrale

$$y = F(x).$$

Courbe primitive

$$y = f(x).$$

Pour trouver une expression de la partie ombrée (O'M'P') de l'aire située sous la courbe primitive, nous substituons dans (A), p. 422, ce qui donne

$$\text{aire O'M'P'} = \int_0^{x_1} f(x)dx.$$

Mais, d'après (D), cette expression devient

$$\text{aire O'M'P'} = \int_0^{x_1} f(x)dx = [F(x)]_{x=x_1} = F(x_1) = \text{MP} \ (**).$$

Théorème. — *Pour la même abscisse* x_1, *le nombre donnant la longueur de l'ordonnée de la courbe intégrale* (B) *est le même que le nombre qui donne l'aire comprise entre la courbe primitive, les axes et l'ordonnée correspondant à cette abscisse.*

(*) Cette courbe est quelquefois appelée *courbe primitive.*

(**) Quand $x_1 = $ O'R', l'aire positive O'M'R'P' est représentée par l'ordonnée maximum NR. A droite de R' l'aire est sous l'axe des x et, par suite, négative. En conséquence, les ordonnées de la courbe intégrale qui représentent la somme algébrique des aires enveloppées décroîtront en passant de R' à T'. La courbe intégrale la plus générale est de la forme

$$y = F(x) + C,$$

cas dans lequel la *différence* des ordonnées pour $x = 0$ et $x = x_1$ donne l'aire située sous la courbe primitive. Dans la courbe intégrale tracée, $C = F(0) = 0$, c'est-à-dire que la courbe intégrale générale est obtenue si cette courbe intégrale est déplacée de la distance C parallèlement à OY.

Le lecteur devra également observer que :

a) Pour la même abscisse x_1, le nombre donnant la pente de la courbe intégrale est le même que le nombre donnant la longueur de l'ordonnée correspondante de la courbe primitive [d'après (C)]. Aussi (C) est quelquefois appelée *courbe des pentes* de (B). Dans la figure 268, nous voyons qu'aux points O, R, T, V, où la courbe intégrale est parallèle à OX, les points correspondants O′, R′, T′, V′ sur la courbe primitive ont des ordonnées nulles, et correspondant au point W, la courbe primitive est discontinue.

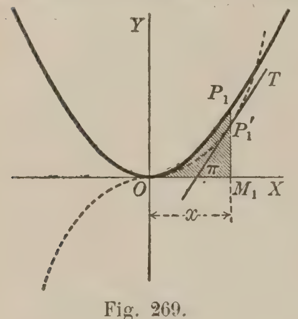


Fig. 269.

b) Correspondant aux points d'inflexion Q, S, U sur la courbe intégrale, nous avons des ordonnées maxima ou minima pour la courbe primitive.

Par exemple, puisque $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{9}\right) = \frac{x^2}{3}$, il s'ensuit que

(E) $$y = \frac{x^3}{9}$$

est une courbe intégrale de la parabole

(F) $$y = \frac{x^2}{3}.$$

Puisque d'après (F),

$$\text{aire } OM_1P_1 = \int_0^{x_1} \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x_1^3}{9},$$

et, d'après (E),

$$M_1P_1' = \frac{x_1^3}{9},$$

on voit que $\frac{x_1^3}{9}$ indique le nombre d'unités linéaires comprises dans l'ordonnée M_1P_1' et aussi le nombre d'unités d'aire représentées par l'aire ombrée OM_1P_1.

De même, puisque, d'après (E),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{3}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{x_1^2}{3},$$

et, d'après (F),

$$M_1P_1 = \frac{x_1^2}{3},$$

on voit que le même nombre $\frac{x_1^2}{3}$ indique la longueur de l'ordonnée M_1P_1 et la pente de la tangente en P_1'.

Evidemment, l'origine est un point d'inflexion de la courbe intégrale et un point d'ordonnée minimum sur la courbe primitive.

235. L'intégraphe. — La théorie de cet instrument est extrêmement simple et dépend de la relation existant entre la courbe donnée et une courbe intégrale correspondante.

L'instrument est construit comme il suit (*fig.* 270). Un chariot rectangulaire C se déplace sur des roulettes au-dessus du plan dans une direction parallèle à l'axe des x de la courbe $y = f(x)$.

Deux côtés du chariot sont parallèles à l'axe des x : les deux autres, naturellement, lui sont perpendiculaires. Le long de l'un de ces côtés perpendiculaires se déplace un petit curseur C_1 portant la pointe à tracer T, et le long de l'autre, un petit curseur C_2 portant une tige F qui peut tourner autour d'un axe perpendiculaire à la surface et qui supporte le disque tranchant D au plan duquel il est perpendiculaire. Un bouton S_1 est fixé sur le curseur C_1 de façon à être à la même distance de l'axe des x que la pointe à tracer T. Un second bouton S_2

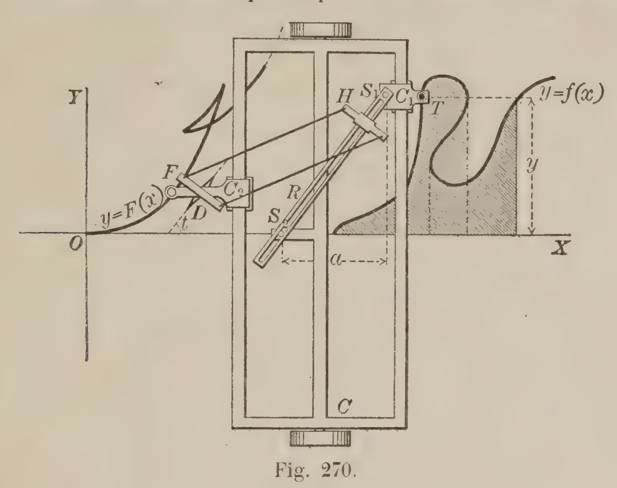


Fig. 270.

est fixé dans une traverse du chariot principal C, de façon à être sur l'axe des x. Une barre évidée R relie ces deux boutons et coulisse sur eux. Un curseur transversal H glisse sur cette barre et est relié à la traverse F par un parallélogramme. La partie essentielle de l'instrument consiste dans le disque tranchant D qui se déplace sous le poids d'une surface plane continue (papier). Ce disque ne glisse pas et par suite, quand il roule, il doit toujours se déplacer le long d'un chemin auquel la trace du plan du disque est tangente en chaque point. Si maintenant on met ce disque en mouvement, il est évident, d'après la figure, que la construction de l'appareil assure que le plan du disque D sera parallèle à la barre R.

Si a est la distance comprise entre les ordonnées passant par les boutons S_1 et S_2 et τ l'angle que fait R (et par suite aussi le plan du disque) avec l'axe des x, nous avons

(A) $$\operatorname{tg} \tau = \frac{y}{a};$$

et si

$$y' = F(x')$$

est la courbe tracée par le point de contact du disque, nous avons

(B) $$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy'}{dx} \cdot \text{(*)}$$

(*) Puisque $x = x' + d$, où $d =$ largeur de l'appareil et par suite

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dx'} = \frac{dy'}{dx}.$$

En comparant (A) et (B), il vient

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{y}{a},$$

ou

(C) $$y' = \frac{1}{a}\int y dx = \frac{1}{a}\int f(x) dx = F(x'), (*)$$

c'est-à-dire (en supprimant les accents), que la courbe

$$y = F(x)$$

est une *courbe intégrale* de la courbe

(D) $$y = \frac{1}{a} f(x).$$

Le facteur $\frac{1}{a}$ fixe évidemment simplement l'*échelle* à laquelle la courbe intégrale est tracée et n'affecte pas sa *forme*.

Un crayon ou une plume est attaché au curseur C_2 afin de tracer la courbe $y = F(x)$.

Le déplacement du disque D, avant de tracer la courbe primitive, équivaut au changement de la constante d'intégration.

236. Planimètre polaire. — C'est un instrument qui sert à mesurer mécaniquement les aires. Avant de décrire l'appareil, nous allons examiner la théorie qui lui sert de base.

237. — Calcul de l'aire balayée par une ligne de longueur constante qui se déplace. — Considérons l'aire ABQB'A'PA balayée par la ligne AB de longueur constante l (*fig.* 271). Soient PQ et P'Q' des positions consécutives de la ligne, $d\theta$ = l'angle POP' = le changement de direction de PQ, et ds = l'arc circulaire décrit autour de O par le point R, milieu de la ligne. En faisant usage des différentielles, nous avons

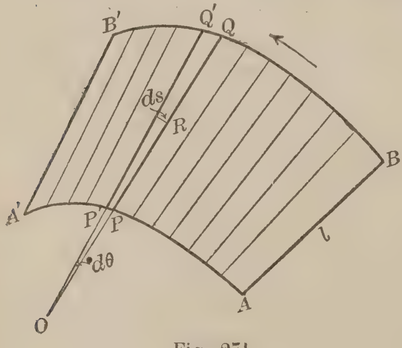


Fig. 271.

aire de OQQ' $= \frac{1}{2}\overline{OQ}^2 d\theta$, (**)

aire de OPP' $= \frac{1}{2}\overline{OP}^2 d\theta$.

$$\text{aire PQQ'P'} = \frac{1}{2}\overline{OQ}^2 d\theta - \frac{1}{2}\overline{OP}^2 d\theta$$
$$= \frac{1}{2}(OQ + OP)(OQ - OP) d\theta$$
$$= OR \cdot PQ d\theta$$
$$= l \cdot OR d\theta = l ds.$$

(*) On suppose que l'instrument est construit de telle sorte que les abscisses de deux points correspondants quelconques des deux courbes diffèrent seulement par une constante ; par suite x est une fonction de x'.

(**) Aire d'un secteur circulaire $= \frac{1}{2}$ rayon $\times$ arc $= \frac{1}{2}$ OQ $\cdot$ OQ$d\theta = \frac{1}{2}\overline{OQ}^2 d\theta$.

En additionnant tous ces éléments, on a

$$\text{(A)} \qquad \text{aire ABQB'A'PA} = \int l\,ds = l\int ds = ls,$$

expression dans laquelle s = le déplacement du centre de la ligne dans une direction constamment perpendiculaire à cette ligne (*). Pour trouver s, supposons que la ligne soit remplacée par une baguette ayant une petite roue au centre R, la baguette étant l'axe de la roue. Quand la baguette se déplace horizontalement au-dessus de la surface (papier), en général, la roue glissera et tournera. Evidemment

$$s = \text{distance dont elle roule}$$
$$= \text{circonférence de la roue} \times \text{nombre de tours.}$$

$$\text{(B)} \qquad s = 2\pi rn,$$

expression dans laquelle r = le rayon de la roue et n = le nombre de tours.

En substituant (B) dans (A), nous obtenons

$$\text{(C)} \qquad \text{aire balayée} = 2\pi rln.$$

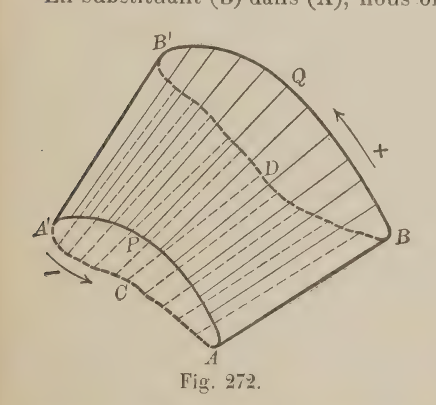


Fig. 272.

Jusqu'ici nous avons tacitement supposé que les aires étaient balayées constamment dans la même direction. Il est d'ailleurs facile de voir que les résultats sont vrais sans aucune restriction, pourvu que les aires soient considérées comme positives ou négatives, suivant qu'elles sont balayées vers le côté de la ligne sur laquelle ds est pris positivement ou inversement. Choisissons les signes comme l'indique la figure 272. Si la ligne AB revient finalement à sa position primitive, A et B ayant décrit des courbes fermées, il est évident que la formule ci-dessus donnera (en tenant compte des signes) l'excès de l'aire limitée par le trajet de A sur celle limitée par le trajet de B.

Car

aire positive = ABQB'A'PA = ABDB'A'PA + courbe fermée BQB'DB ;
aire négative = B'A'CABDB' = ABDB'A'PA + courbe fermée APA'CA.

En prenant la différence, nous avons

aire nette = courbe fermée BQB'DB — courbe fermée APA'CA.

Si l'aire de l'une de ces courbes fermées est nulle (telle que APA'CA), c'est-à-dire si A accomplit le même trajet à l'aller et au retour, *l'aire balayée par la ligne sera égale à l'aire de la courbe fermée* BQB'DB.

Un type simple et souvent employé de planimètre polaire a été inventé par Amsler, de Schaffhouse en 1854. Il consiste essentiellement en deux barres OA et AB, articulées en A, OA tournant autour d'un point fixe O et AB étant

(*) Il doit être observé que s ne sera pas la longueur de la trajectoire décrite par le centre R à moins que AA' et BB' ne soient des arcs de cercle de centre O.

l'axe d'une roue située en son centre R et ayant une pointe à tracer en B (*fig.* 273). Si la pointe à tracer décrit complètement la courbe fermée, A oscillera de long en large le long d'un arc de cercle (tel que CD), décrivant un contour d'aire nulle. Par suite, l'aire balayée par la barre AB égale exactement l'aire de la courbe fermée; elle est donnée par la formule

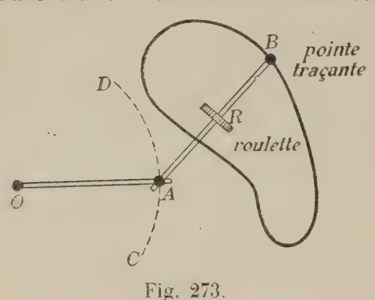


Fig. 273.

(D) *Aire de la courbe fermée* $= 2\pi rln$.

dans laquelle

$l =$ la longueur de la barre,
$r =$ le rayon de la roue,
$n =$ le nombre de tours indiqués sur la roue après que la pointe à tracer a effectué un circuit complet de la courbe.

238. Intégration approchée. — Puisque la valeur d'une intégrale définie est une mesure de l'aire limitée par une courbe, il s'ensuit que la mesure exacte d'une telle aire donnera la valeur exacte d'une intégrale définie, et une mesure approchée de cette aire donnera une valeur approximative de l'intégrale. Nous allons expliquer maintenant deux règles approchées pour mesurer les aires.

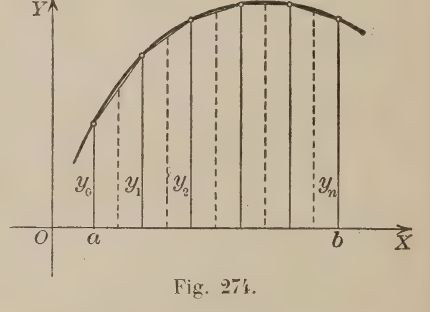


Fig. 274.

239. Règle des trapèzes. — Au lieu d'inscrire des rectangles dans l'aire, comme au § 204, p. 418, il est évident que nous obtiendrons une valeur approchée beaucoup plus précise de l'aire en y inscrivant des trapèzes. Ainsi, divisons l'intervalle de $x = a$ à $x = b$ en n parties égales et désignons chaque partie par Δx. L'aire d'un trapèze étant égale au demi-produit de la somme des côtés parallèles par la hauteur, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x = \text{aire du premier trapèze};$$

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x = \text{aire du second trapèze};$$

. . . .

$$\frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x = \text{aire du } n^e \text{ trapèze}.$$

En additionnant, nous obtenons

$$\frac{1}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)\Delta x = \text{aire des trapèzes.}$$

Par suite, la règle des trapèzes est

$$\textbf{(A)} \qquad \text{aire} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x.$$

Il est clair que plus le nombre des intervalles est grand (c'est-à-dire plus Δx est petit), plus la somme des trapèzes se rapprochera de l'aire limitée par la courbe.

Exemple. — Calculer $\int_1^{12} x^2dx$ par la règle des trapèzes, en divisant $x = 1$ à $x = 12$ en onze intervalles.

Solution. Ici, $\frac{b-a}{n} = \frac{12-1}{11} = 1 = \Delta x$. L'aire en question est comprise sous la courbe $y = x^2$. En substituant les abscisses $x = 1, 2, 3, \ldots, 12$ dans cette équation, nous obtenons les ordonnées $y = 1, 4, 9, \ldots, 144$. Par suite, d'après (A),

$$\text{aire} = \left(\frac{1}{2} + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + \frac{1}{2}\cdot 144\right)\cdot 1 = 577\frac{1}{2}.$$

Par intégration, $\int_1^{12} x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{12} = 575\frac{2}{3}.$

Donc, dans cet exemple, la règle des trapèzes donne une erreur inférieure à un tiers de 1 pour 100.

240. Règle de Simpson. (*Règle de la parabole*). — Au lieu de tracer des lignes droites (cordes) entre les points d'une courbe et de former des trapèzes, nous pouvons obtenir une approximation de l'aire encore plus grande en réunissant les points par des arcs de parabole et en additionnant les aires comprises sous ces arcs. On peut faire passer une parabole avec un axe vertical par trois points quelconques pris sur une courbe et une série de ces arcs s'adaptera plus exactement sur la courbe que la ligne brisée des cordes. Divisons maintenant

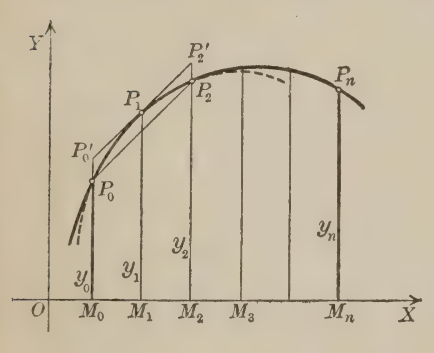


Fig. 275.

l'intervalle de $x = a = OM_0$ à $x = b = OM_n$ en un nombre *pair* ($= n$) de parties, chacune d'elles étant égale à Δx. Par chaque groupe successif de trois points P_0, P_1, P_2; P_2, P_3, P_4; etc., sont tracés des arcs de paraboles avec des axes verticaux. D'après la figure 275,

aire de la bande parabolique $M_0P_0P_1P_2M_2$ = aire du trapèze $M_0P_0P_2M_2$
+ aire du segment parabolique $P_0P_1P_2$.

Mais, l'aire du trapèze $M_0P_0P_2M_2 = \frac{1}{2}(y_0 + y_2)2\Delta x$

$$= (y_0 + y_2)\Delta x,$$

et l'aire du segment parabolique $P_0P_1P_2$ = les deux tiers du parallélogramme circonscrit $P_0P_0'P_2'P_2$

$$= \frac{2}{3}\left[y_1 - \frac{1}{2}(y_0 + y_2)\right]2\Delta x = \frac{2}{3}(2y_1 - y_0 - y_2)\Delta x.$$

Par suite, l'aire de la première bande parabolique $M_0P_0P_1P_2M_2$

$$= (y_0 + y_2)\Delta x + \frac{2}{3}(2y_1 - y_0 - y_2)\Delta x$$

$$= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

De même,

$$\text{deuxième bande} = \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$\text{troisième bande} = \frac{\Delta x}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6),$$

. . . .

$$n^e \text{ bande} = \frac{\Delta x}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

En additionnant, nous obtenons comme somme de ces aires :

$$\frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Par suite, la *règle de Simpson* est (n étant pair)

$$\text{(B)} \qquad \textbf{aire} = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + y_n).$$

Comme dans le cas de la règle des trapèzes, plus le nombre des parties suivant lesquelles M_0M_n est divisé est grand, plus le résultat approchera de l'aire comprise sous la courbe.

EXEMPLE. — Calculer $\int_0^{10} x^3dx$ par la règle de Simpson, en prenant dix intervalles.

Solution. Ici $\frac{b-a}{n} = \frac{10-0}{10} = 1 = \Delta x$.

L'aire en question est comprise sous la courbe $y = x^3$. En substituant les abscisses $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$ dans $y = x^3$, nous obtenons les ordonnées $y = 0$, 1, 8, 27, ..., 1000. Par suite, d'après (B),

$$\text{aire} = \frac{1}{3}(0 + 4 + 16 + 108 + 128 + 500 + 432 + 1\,372 + 1\,024 + 2\,916 + 1\,000) = 2\,500.$$

Par intégration, $$\int_0^{10} x^3dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 2\,500,$$

de sorte que, dans cet exemple, la règle de Simpson arrive à donner un résultat exact.

EXEMPLES

1. Calculer l'intégrale de l'exemple 1 (ci-dessus) par la règle des trapèzes en prenant dix intervalles. *Rép*. 2 525.

2. Calculer $\int_1^5 \frac{dx}{x}$ par les deux règles quand $n = 12$. *Rép*. Trap. 1,6182 ; Simp. 1,6098.

3. Evaluer $\int_1^{11} x^3dx$ par les deux règles quand $n = 10$. *Rép*. Trap. 3 690 ; Simp. 3 660.

4. Calculer $\int_1^{10} \log_{10} xdx$ par les deux règles quand $n = 10$. *Rép*. Trap. 6,0656 ; Simp. 6,0896.

5. Evaluer $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$ par les deux règles quand $n = 6$. *Rép*. Trap. 1,0885 ; Simp. 1,0906.

6. Calculer $\int_0^{60^\circ} \sin xdx$ par les deux règles pour des intervalles de dix degrés.

7. Evaluer $\int_2^6 x^3dx$ par les deux règles pour $n = 12$.

8. Trouver l'erreur dans l'évaluation de $\int_0^{10} x^4dx$ par la règle de Simpson quand $n = 10$.

9. Evaluer $\int_0^1 e^xdx$ par la règle de Simpson quand $n = 10$.

241. Intégrales de référence. — Nous donnons ci-après une table d'intégrales de référence. En étudiant le calcul intégral pour la première fois, le lecteur devra se servir aussi peu que possible de la table, si même il s'en sert. Aussitôt que la dérivation de ces intégrales est parfaitement comprise, la table peut être utilisée pour épargner du temps et du travail, dans la solution des problèmes pratiques.

QUELQUES FORMES ÉLÉMENTAIRES

1. $\int (du \pm dv \pm dw \pm \cdots) = \int du \pm \int dv \pm \int dw \pm \cdots.$

2. $\int a dv = a \int dv.$

3. $\int df(x) = \int f'(x) dx = f(x) + \mathrm{C}.$

4. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C},\ n \neq -1.$

5. $\int \dfrac{dx}{x} = \log x + \mathrm{C}.$

Formes contenant des puissances entières de $a + bx$.

6. $\int \dfrac{dx}{a+bx} = \dfrac{1}{b} \log (a + bx) + \mathrm{C}.$

7. $\int (a+bx)^n dx = \dfrac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + \mathrm{C},\ n \neq -1.$

8. $\int \mathrm{F}(x, a+bx) dx.$ Essayer une des substitutions, $z = a + bx$, $xz = a + bx$.

9. $\int \dfrac{x dx}{a+bx} = \dfrac{1}{b^2} [a + bx - a \log (a+bx)] + \mathrm{C}.$

10. $\int \dfrac{x^2 dx}{a+bx} = \dfrac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2 \log (a+bx)\right] + \mathrm{C}.$

11. $\int \dfrac{dx}{x(a+bx)} = -\dfrac{1}{a} \log \dfrac{a+bx}{x} + \mathrm{C}.$

12. $\int \dfrac{dx}{x^2(a+bx)} = -\dfrac{1}{ax} + \dfrac{b}{a^2} \log \dfrac{a+bx}{x} + \mathrm{C}.$

13. $\int \dfrac{x dx}{(a+bx)^2} = \dfrac{1}{b^2} \left[\log (a+bx) + \dfrac{a}{a+bx}\right] + \mathrm{C}.$

14. $\int \dfrac{x^2 dx}{(a+bx)^2} = \dfrac{1}{b^3} \left[a + bx - 2a \log (a+bx) - \dfrac{a^2}{a+bx}\right] + \mathrm{C}.$

15. $\int \dfrac{dx}{x(a+bx)^2} = \dfrac{1}{a(a+bx)} - \dfrac{1}{a^2} \log \dfrac{a+bx}{x} + \mathrm{C}.$

16. $\int \dfrac{x dx}{(a+bx)^3} = \dfrac{1}{b^2} \left[-\dfrac{1}{a+bx} + \dfrac{a}{2(a+bx)^2}\right] + \mathrm{C}.$

Formes contenant $a^2 + x^2$, $a^2 - x^2$, $a + bx^n$, $a + bx^2$.

17. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{a} + \mathrm{C}$; $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + \mathrm{C}.$

18. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \log \dfrac{a+x}{a-x} + \mathrm{C}$; $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \log \dfrac{x-a}{x+a} + \mathrm{C}.$

19. $\int \dfrac{dx}{a+bx^2} = \dfrac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} x \sqrt{\dfrac{b}{a}} + \mathrm{C}.$

20. $\int \dfrac{dx}{a^2-b^2x^2} = \dfrac{1}{2ab} \log \dfrac{a+bx}{a-bx} + \mathrm{C}.$

21. $\int x^m(a+bx^n)^p dx$.

$$= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx.$$

22. $\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx.$

23. $\int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^p}$

$$= -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}} - \frac{(m-n+np-1)b}{(m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-n}(a+bx^n)^p}.$$

24. $\int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^p}$

$$= \frac{1}{an(p-1)x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}} + \frac{m-n+np-1}{an(p-1)}\int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^{p-1}}.$$

25. $\int \frac{(a+bx^n)^p dx}{x^m} = -\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{a(m-1)x^{m-1}} - \frac{b(m-n-np-1)}{a(m-1)}\int \frac{(a+bx^n)^p dx}{x^{m-n}}.$

26. $\int \frac{(a+bx^n)^p dx}{x^m} = \frac{(a+bx^n)^p}{(np-m+1)x^{m-1}} + \frac{anp}{np-m+1}\int \frac{(a+bx^n)^{p-1}dx}{x^m}.$

27. $\int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{x^{m-n+1}}{b(m-np+1)(a+bx^n)^{p-1}} - \frac{a(m-n+1)}{b(m-np+1)}\int \frac{x^{m-n}dx}{(a+bx^n)^p}.$

28. $\int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{x^{m+1}}{an(p-1)(a+bx^n)^{p-1}} - \frac{m+n-np+1}{an(p-1)}\int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^{p-1}}.$

29. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right].$

30. $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a}\left[\frac{x}{(a+bx^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}}\right].$

31. $\int \frac{xdx}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(a+bz)^n}$, où $z=x^2$.

32. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{-x}{2b(n-1)(a+bx^2)^{n-1}} + \frac{1}{2b(n-1)}\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}}.$

33. $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)} = \frac{1}{an}\log\frac{x^n}{a+bx^n} + C.$

34. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^n} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{n-1}} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{(a+bx^2)^n}.$

35. $\int \frac{xdx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\log\left(x^2+\frac{a}{b}\right) + C.$

36. $\int \frac{x^2dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+bx^2}.$

37. $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{a+bx^2} + C.$

38. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{a+bx^2}.$

39. $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+bx^2}.$

Formes contenant $\sqrt{a+bx}$.

40. $\int x\sqrt{a+bx}\,dx = -\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C.$

41. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C.$

42. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx} + C.$

43. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2-4\,abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx} + C.$

44. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} + C$, pour $a > 0$.

45. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C$, pour $a < 0$.

46. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = \frac{-\sqrt{a+bx}}{ax} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$

47. $\int \frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x} = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$

Formes contenant $\sqrt{x^2+a^2}$.

48. $\int (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$

49. $\int (x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$

50. $\int (x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}dx = \frac{x(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (x^2+a^2)^{\frac{n}{2}-1}dx.$

51. $\int x(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}dx = \frac{(x^2+a^2)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} + C.$

52. $\int x^2(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$

53. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$

54. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$

55. $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^2+a^2} + C.$$

56. $$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

57. $$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

58. $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a}\log\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

59. $$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C.$$

60. $$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\log\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x} + C.$$

61. $$\int \frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\,dx}{x} = \sqrt{a^2+x^2} - a\log\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C.$$

62. $$\int \frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

Formes contenant $\sqrt{x^2-a^2}$.

63. $$\int (x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$$

64. $$\int (x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3a^4}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$$

65. $$\int (x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}\,dx = \frac{x(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int (x^2+a^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dx.$$

66. $$\int x(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} + C.$$

67. $$\int x^2(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$$

68. $$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$$

69. $$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C.$$

70. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^2-a^2} + C.$

71. $\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

72. $\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

73. $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{a} + C;\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C.$

74. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C.$

75. $\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{a} + C.$

76. $\int \frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}dx}{x} = \sqrt{x^2-a^2} - a\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{x} + C.$

77. $\int \frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

Formes contenant $\sqrt{a^2-x^2}$.

78. $\int (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} + C.$

79. $\int (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} + C.$

80. $\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}dx = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{a^2n}{n+1}\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}-1}dx.$

81. $\int x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}dx = -\frac{(a^2-x^2)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} + C.$

82. $\int x^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} + C.$

83. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a};\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x.$

84. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

85. $\int \frac{x\,dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$

86. $\int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \text{arc sin } \frac{x}{a} + C.$

87. $\int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \text{arc sin } \frac{x}{a} + C.$

88. $\int \frac{x^m dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{(m-1)a^2}{m} \int \frac{x^{m-2}}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} dx.$

89. $\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \log \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$

90. $\int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C.$

91. $\int \frac{dx}{x^3(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3} \log \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$

92. $\int \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C.$

93. $\int \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \text{arc sin } \frac{x}{a} + C.$

Formes contenant $\sqrt{2ax - x^2}$, $\sqrt{2ax + x^2}$.

94. $\int \sqrt{2ax - x^2}\, dx = \frac{x - a}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \text{arc sin vers } \frac{x}{a} + C.$

95. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \text{arc sin vers } \frac{x}{a}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \text{arc sin vers } x + C.$

96. $\int x^m \sqrt{2ax - x^2}\, dx = -\frac{x^{m-1}(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}{m + 2} + \frac{(2m + 1)a}{m + 2} \int x^{m-1}\sqrt{2ax - x^2}\, dx.$

97. $\int \frac{dx}{x^m \sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{(2m - 1)ax^m} + \frac{m - 1}{(2m - 1)a} \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{2ax - x^2}}.$

98. $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2ax - x^2}}{m} + \frac{(2m - 1)a}{m} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$

99. $\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^m} dx = -\frac{(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}{(2m - 3)ax^m} + \frac{m - 3}{(2m - 3)a} \int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^{m-1}} dx.$

100. $\int x\sqrt{2ax - x^2}\, dx = -\frac{3a^2 + ax - 2x^2}{6}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^3}{2} \text{arc sin vers } \frac{x}{a}.$

101. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax} + C.$

102. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a \text{ arc sin vers } \frac{x}{a} + C.$

103. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{3}{2}a^2 \text{ arc sin vers } \frac{x}{a} + C.$

104. $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}dx = \sqrt{2ax-x^2} + a \text{ arc sin vers } \frac{x}{a} + C.$

105. $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}dx = -\frac{2\sqrt{2ax-x^2}}{x} - \text{arc sin vers } \frac{x}{a} + C.$

106. $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^3}dx = -\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3ax^3} + C.$

107. $\int \frac{dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}} + C.$

108. $\int \frac{xdx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a\sqrt{2ax-x^2}} + C.$

109. $\int F(x, \sqrt{2ax-x^2})dx = \int F(z+a, \sqrt{a^2-z^2})dz$, où $z = x - a$.

110. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}} = \log\left(x+a+\sqrt{2ax+x^2}\right) + C.$

111. $\int F(x, \sqrt{2ax+x^2})dx = \int F(z-a, \sqrt{z^2-a^2})dz$, où $z = x + a$.

Formes contenant $a + bx \pm cx^2$.

112. $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \text{ arc tg } \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$, quand $b^2 < 4ac$.

113. $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \log \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}} + C$, quand $b^2 > 4ac$.

114. $\int \frac{dx}{a+bx-cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}} \log \frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b} + C.$

115. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log\left(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right) + C.$

116. $\int \sqrt{a+bx+cx^2}dx$

$$= \frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b^2-4ac}{8c^{\frac{3}{2}}} \log\left(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right) + C.$$

117. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{ arc sin } \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$

118. $\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,dx = \frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2} + \frac{b^2+4ac}{8c^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$

119. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}$

$- \frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}} \log\left(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right) + C.$

120. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c} + \frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$

Autres formes algébriques.

121. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b)\log\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}\right) + C.$

122. $\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C.$

123. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C.$

124. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$

125. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}} + C.$

Formes exponentielles et trigonométriques.

126. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$

127. $\int e^x dx = e^x + C.$

128. $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$

129. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

130. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

131. $\int \operatorname{tg} x dx = \log \sec x = -\log\cos x + C$

132. $\int \operatorname{cotg} x dx = \log \sin x + C.$

133. $\int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \log(\sec x + \operatorname{tg} x) = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C.$

134. $\int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \log(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x) = \log \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

135. $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C.$

136. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + C.$

137. $\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + C.$

138. $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x dx = -\operatorname{cosec} x + C.$

139. $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

140. $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

141. $$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx.$$

142. $$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx.$$

143. $$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2}x}.$$

144. $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\,\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x}.$$

145. $$\int \cos^m x\sin^n x\,dx = \frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x\sin^n x\,dx.$$

146. $$\int \cos^m x\sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x\sin^{n-2}x\,dx.$$

147. $$\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}x}.$$

148. $$\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2}x\cos^n x}.$$

149. $$\int \frac{\cos^m x\,dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos^{m+1}x}{(n-1)\sin^{n-1}x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x\,dx}{\sin^{n-2}x}.$$

150. $$\int \frac{\cos^m x\,dx}{\sin^n x} = \frac{\cos^{m-1}x}{(m-n)\sin^{n-1}x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2}x\,dx}{\sin^n x}.$$

151. $$\int \sin x\cos^n x\,dx = -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1} + C.$$

152. $$\int \sin^n x\cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1}x}{n+1} + C.$$

153. $$\int \mathrm{tg}^n x\,dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2}x\,dx + C.$$

154. $$\int \mathrm{cotg}^n x\,dx = -\frac{\mathrm{cotg}^{n-1}x}{n-1} - \int \mathrm{cotg}^{n-2}x\,dx + C.$$

155. $$\int \sin mx\sin nx\,dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

156. $$\int \cos mx\cos nx\,dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

157. $$\int \sin mx\cos nx\,dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

158. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + C, \text{ quand } a > b.$$

159. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{\sqrt{b-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-\sqrt{b+a}} + C, \text{ quand } a < b.$$

160. $$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{a\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C, \text{ quand } a > b.$$

161. $\int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}} + C$, quand $a < b$.

162. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b \operatorname{tg} x}{a}\right) + C.$

163. $\int e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax}(a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} + C;$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

164. $\int e^{ax} \cos nx dx = \frac{e^{ax}(n \sin nx + a \cos nx)}{a^2 + n^2} + C;$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

165. $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C.$

166. $\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$

167. $\int a^{mx} x^n dx = \frac{a^{mx} x^n}{m \log a} - \frac{n}{m \log a} \int a^{mx} x^{n-1} dx.$

168. $\int \frac{a^x dx}{x^m} = -\frac{a^x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{\log a}{m-1} \int \frac{a^x dx}{x^{m-1}}.$

169. $\int e^{ax} \cos^n x dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x (a \cos x + n \sin x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x dx.$

170. $\int x^m \cos ax dx = \frac{x^{m-1}}{a^2}(ax \sin ax + m \cos ax) - \frac{m(m-1)}{a^2} \int x^{m-2} \cos ax dx.$

Formes logarithmiques.

171. $\int \log x dx = x \log x - x + C.$

172. $\int \frac{dx}{\log x} = \log(\log x) + \log x + \frac{1}{2^2} \log^2 x + \cdots.$

173. $\int \frac{dx}{x \log x} = \log(\log x) + C.$

174. $\int x^n \log x dx = x^{n+1}\left[\frac{\log x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C.$

175. $\int e^{ax} \log x dx = \frac{e^{ax} \log x}{a} - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx.$

176. $\int x^m \log^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \log^{n-1} x dx.$

177. $\int \frac{x^m dx}{\log^n x} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\log^{n-1} x} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m dx}{\log^{n-1} x}.$

INDEX

(Les nombres renvoient aux pages.)

TABLE DES MATIÈRES

CALCUL DIFFÉRENTIEL

CHAPITRE I

RECUEIL DE FORMULES

CHAPITRE II

VARIABLES ET FONCTIONS

CHAPITRE III

THÉORIE DES LIMITES

CHAPITRE IV

DIFFÉRENTIATION

CHAPITRE V

RÈGLES POUR DIFFÉRENTIER LES FORMES ÉLÉMENTAIRES CLASSIQUES

CHAPITRE VI

APPLICATIONS SIMPLES DE LA DÉRIVÉE

CHAPITRE VII

DIFFÉRENTIATION SUCCESSIVE

CHAPITRE VIII

MAXIMA ET MINIMA. POINTS D'INFLEXION. TRACÉ DES COURBES

Chapitre IX

DIFFÉRENTIELLES

Chapitre X

LE TEMPS CONSIDÉRÉ COMME NOUVELLE VARIABLE

Chapitre XI

CHANGEMENT DE VARIABLE

Chapitre XII

COURBURE. RAYON DE COURBURE

Chapitre XIII

THÉORÈME DE LA MOYENNE. FORMES INDÉTERMINÉES

Chapitre XIV

CERCLE DE COURBURE. CENTRE DE COURBURE

Chapitre XV

DIFFÉRENTIATION PARTIELLE

Chapitre XVI

ENVELOPPES

Chapitre XVII

SÉRIES

Chapitre XVIII

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS

Chapitre XIX

ASYMPTOTES. POINTS SINGULIERS

CHAPITRE XX

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

CHAPITRE XXI

COURBES DE RÉFÉRENCE

CALCUL INTÉGRAL

CHAPITRE XXII

INTÉGRATION. RÈGLES POUR INTÉGRER LES FORMES ÉLÉMENTAIRES CLASSIQUES

CHAPITRE XXIII

CONSTANTE D'INTÉGRATION

Chapitre XXIV

L'INTÉGRALE DÉFINIE

Chapitre XXV

INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES

Chapitre XXVI

INTÉGRATION PAR SUBSTITUTION D'UNE NOUVELLE VARIABLE. RATIONALISATION

Chapitre XXVII

INTÉGRATION PAR PARTIES. FORMULES DE RÉDUCTION

Chapitre XXVIII

L'INTÉGRATION DÉFINIE COMME OPÉRATION DE SOMMATION

Chapitre XXIX

INTÉGRATION SUCCESSIVE ET PARTIELLE

Chapitre XXX

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

CHAPITRE XXXI

INTÉGRAPHE. INTÉGRATION APPROCHÉE. TABLE D'INTÉGRALES

CHARTRES. — IMPRIMERIE DURAND, RUE FULBERT.

